المحاضرة الثانية : توان الجسيم - عملي

د.نزار عبد الرحمن

تعريف الجسيم : عبارة عن جسم أبعاده وكتلته صغيرة جدا بحيث يمكن إهمالها

الشرط اللازم والكافي لتوازن الجسيم هو أن يكون المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسيم مساويا الصفر.

*مراحل حل المسائل المتعلقة بتوازن الجسيم :

1.تحديد الجسيم

2. رسم مخطط الجسم الحر للجسيم : أي أننا نتخيّل الجسيم حراً في الفراغ محررا من كافة قيوده ونستبدل عن هذه القيود بالقوى المناسبة .

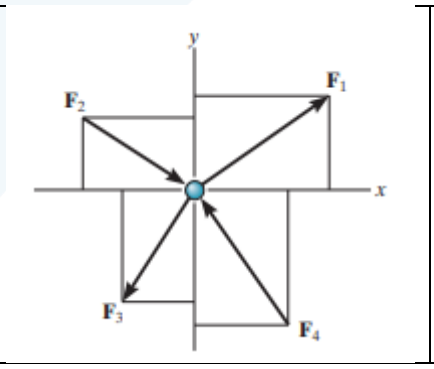
تعريف القيد : هو كل ما يمنع حركة الجسم في الفراغ (نابض ،حبل ، كبل ، نقاط وسطوح استناد .....).

3- كتابة معادلتين للتوازن :

نحل المعادلتين ونحسب المجاهيل ، وإذا نتج بعد الحساب أن إشارة إحدى القوى سالبة فهذا يعني أن الاتجاه الصحيح لهذه القوة هو عكس الاتجاه المفروض .

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$

$$\sum F_x . \boldsymbol{i} + \sum F_Y \ . \boldsymbol{J} = 0$$

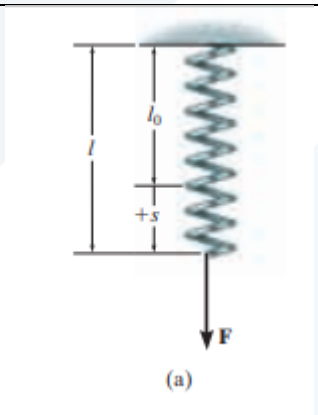


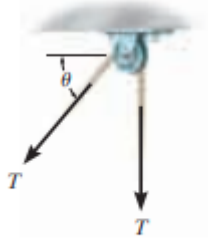
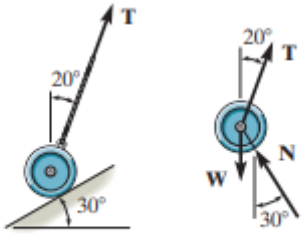
من هذه المعادلة الشعاعية ينتج شرطين لتوازن الجسيم : مركبات القوة وفق المحورين x y يجب أن تكون مساوية للصفر:

$$\sum F_x = 0$$

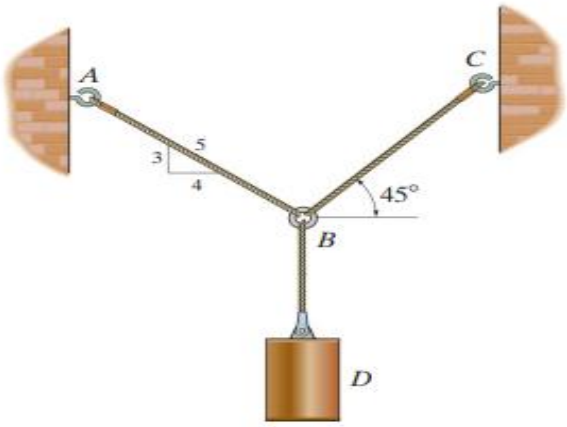
$$\sum F_Y = 0$$

بعض التطبيقات على توازن الجسيم :

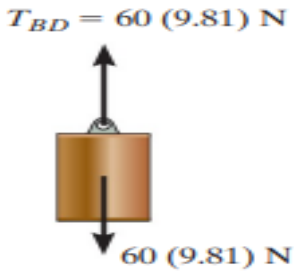
1- النوابض : نحسب القوة المؤثرة في النابض عن طريق العلاقة: $F = K.S$ **حيث K: ثابت استطالة النابض** $S = l - l_0$ **S مقدار الاستطالة** **= الطول النهائي – الطول الأصلي** l الطول النهائي l_0 الطول الأصلي	

2- الكابلات والحبال والبكرات: تستخدم الكابلات والحبال لنقل تأثير القوى والحمولات على طرفي البكرة ، ونعتبر أن الكبل أو الحبل يكون متوازنا على طرفي البكرة ، وفي أي مقطع من مقاطعه	 Cable is in tension (b)
نقاط الاستناد الملساء : عند الاستناد على سطح أملس ، عندها يكون رد فعل السطح عبارة عن قوة متعامدة مع سطح الاستناد عند نقطة الاستناد.	 (a) (b)

مسألة1 :أوجد القوة المؤثرة في الكبلين AB,BC من أجل تعليق اسطوانة كتلتها 60Kg كغ



(a)



(b)

$$\sum F_x = 0\,, T_{BC}.\cos 45 - T_{AB}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0\,, T_{BC}.\sin 45 + T_{AB}(\tfrac{3}{5}) = 0\ , \quad (2)$$

من المعادلة (1) نكتب :

$$T_{AB} = 0.883T_{BC}$$

نعوض في المعادلة (2) :

$$T_{BC}.\sin 45 + (\frac{3}{5})(0.833T_{BC}) - 60(9.81) = 0$$

ينتج $T_{BC} = 476\text{N}$, $T_{AB} = 420\ \text{N}$

مسألة (2) : أوجد الطول اللازم للحبل AC،من أجل تعليق مصباح كتلته $8Kg$ في وضعية التوازن. الطول الأصلي للنابض $L'_{AB} = 0.4m$ ،ثابت استطالة النابض $k_{AB} = 300N/m$

الحل : إذا علمنا قيمة القوة المؤثرة في النابض ، نستطيع حساب استطالة النابض عن طريق المعادلة : $F= K.S$، عنها نستطيع حساب طول الحبل من الشكل الهندسي .

الحل :مخطط الجسم الحر :مخطط الجسم الحر للجسيم A مبيّن في الشكل(b) وزن المصباح : $W=8(9.81)=78.5\ N$

كتابة معادلات التوازن :

$$\sum F_x = 0 \, , T_{AB} - T_{AC}.\cos 30 = 0 \quad (1)$$

$$= 0 \sum F_Y = 0 \, , T_{AC}.\sin 30 - 78.5$$

بحل المعادلتين ينتج :

$$T_{AC} = 157N, T_{AB} = 136N$$

استطالة النابض AB : $T_{AB} = K_{AB}.S_{AB}$

الطول النهائي للنابض : $L_{AB} = L'_{AB} + S_{AB}$

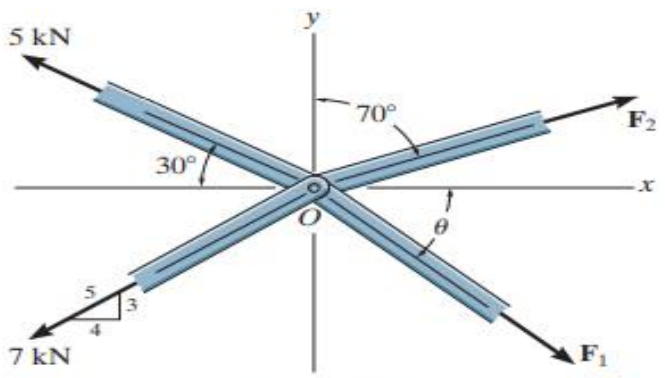
$$L_{AB} = 0.4m + 0.453m = 0.853m$$

المسافة الكلية من C إلى B:

$$2m = l_{AC}.cos30 + \quad 0.853m$$

$$l_{AC} = 1.32m$$

مسألة 3:عناصر من جائز شبكي , متمفصلة عند النقطة O. أوجد مقدار القوة F1 والزاوية θ من أجل التوازن . F2=6KN.



$$(40)\ ,\Rightarrow\ x_{AD}= 0.4905\text{m}F_{AD} = 2(9.81) = x_{AD}$$

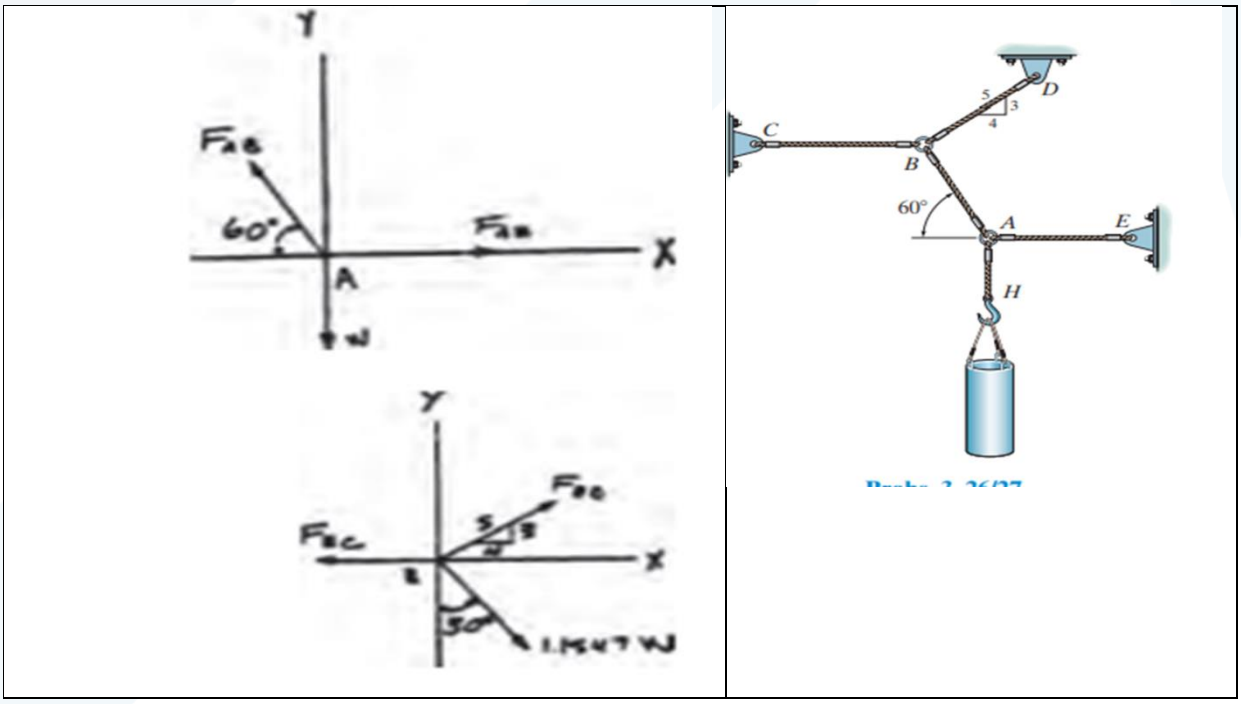
$$\sum FX = 0 \Rightarrow F_{AB}(\frac{4}{5}) - F_{AC}(\frac{1}{\sqrt{2}})=0 \quad ,(1)$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow F_{AB}(\frac{3}{5})+F_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2(9.81) = 0(2)$$

$$F_{AC} = 15.86\text{KN},\ x_{AD}=\frac{15.86}{20}=0.793\text{m},$$

$$= 14.01\text{N}, x_{AB} = \frac{14.01}{30} = 0.467\ \text{m}F_{AB}$$

- مسألة 4:اسطوانة كتلتها 30 Kg. احسب القوة المؤثرة في كل حبل من أجل التوازن



العقدة A

$$\sum FX = 0 \Rightarrow T_{AE} - T_{AB}.COS60 = 0\ ,(1)-$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow T_{AB}.SIN60 - 30(9.81) = 0\ ,(2)$$

- العقدة B

$$\sum FX = 0 \Rightarrow -T_{BC} + T_{AB}.COS60 + T_{BD}(\frac{4}{5}) = 0\ ,(3)$$

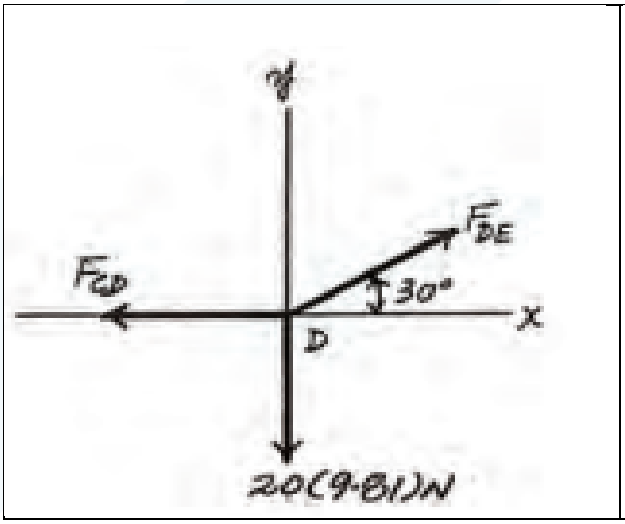
$$\sum FY = 0 \Rightarrow -T_{AB}.SIN60 - T_{BD}(\frac{4}{5}) = 0\ ,(4)$$

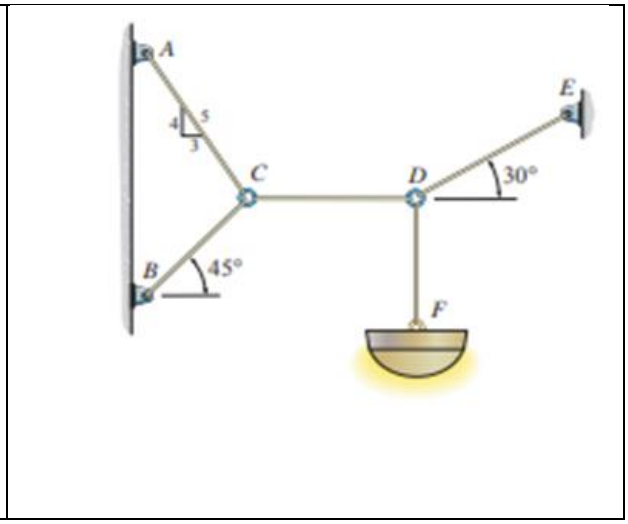
T_{HA}=**30(9.81)=294** N, $T_{AE} = 170N$

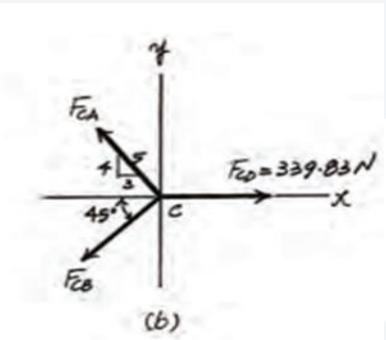
$T_{AB} =$ 340 N,$T_{BD} = 490N, T_{BC} = 562N$

مسألة 5: احسب القوة المؤثرة في كل حبل من أجل تعليق مصباح كتلته Kg20

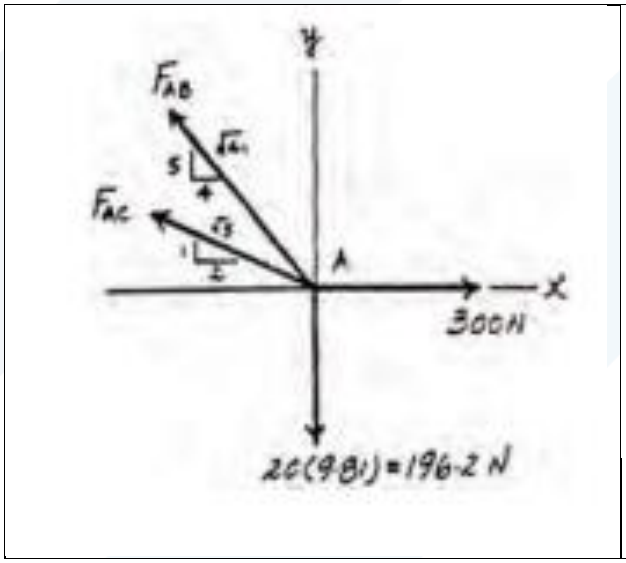
في وضعية التوازن .

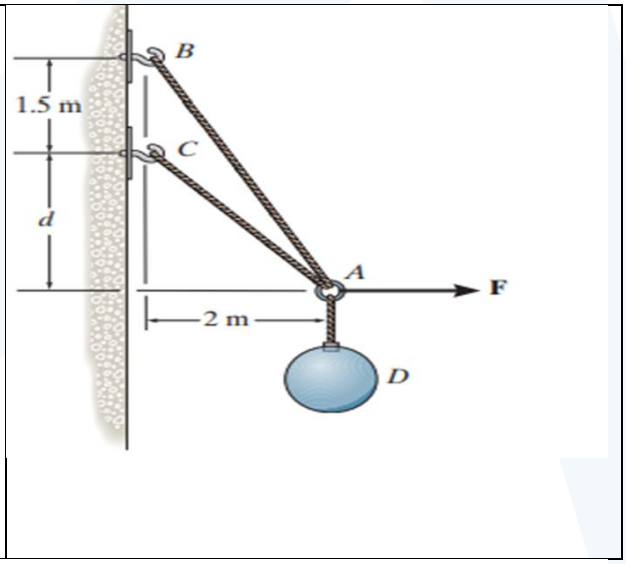






مسألة 6:احسب القوى المؤثرة في الكبلين ABوAC اللازمة لتعليق كرة كتلتها 20 كغ في وضعية التوازن ، F= 300N.





SOLUTION

Equations of Equilibrium:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 300 - F_{AB}\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) - F_{AC}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$06247F_{AB} + 0.8944F_{AC} = 300$$

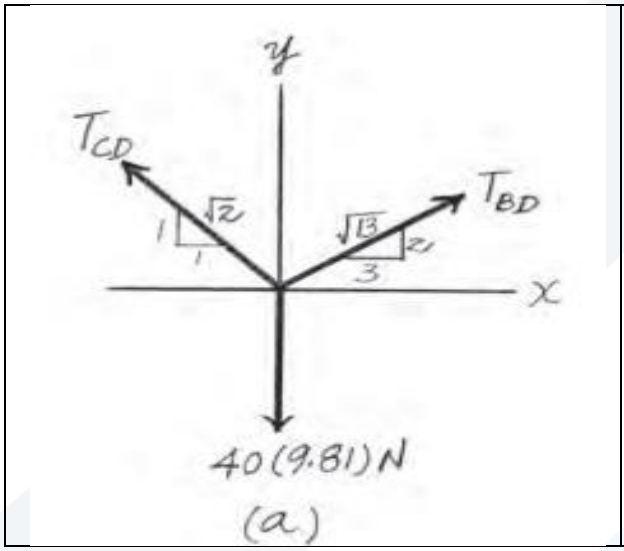
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right) + F_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 196.2 = 0$$

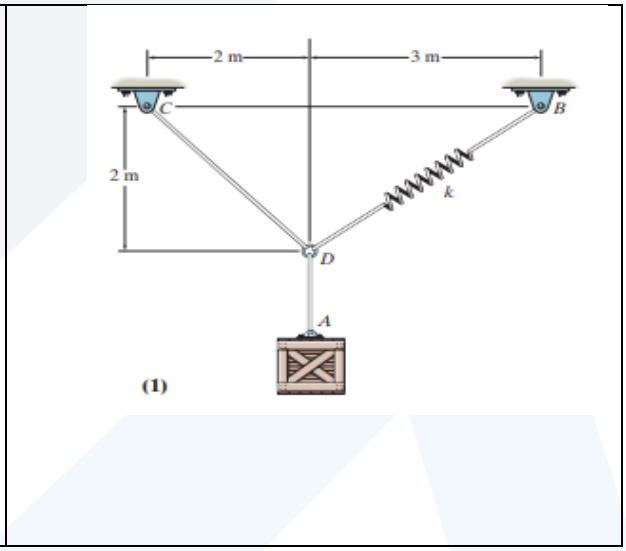
$$0.7809F_{AB} + 0.4472F_{AC} = 196.2$$

Solving Eqs. (1) and (2) yields

$$F_{AB} = 98.6 \text{ N} \qquad F_{AC} = 267 \text{ N}$$

مسألة 7 : أوجد الطول الأصلي للنابض DB،من أجل تعليق صندوق كتلته 40 كغ في وضعية التوازن .K=180N/m.





SOLUTION

Equations of Equilibrium. Referring to the *FBD* shown in Fig. *a*,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{BD}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - T_{CD}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{BD}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + T_{CD}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 40(9.81) = 0$$

Solving Eqs (1) and (2)

$$T_{BD} = 282.96 \text{ N} \qquad T_{CD} = 332.96 \text{ N}$$

The stretched length of the spring is

$$l = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ m}$$

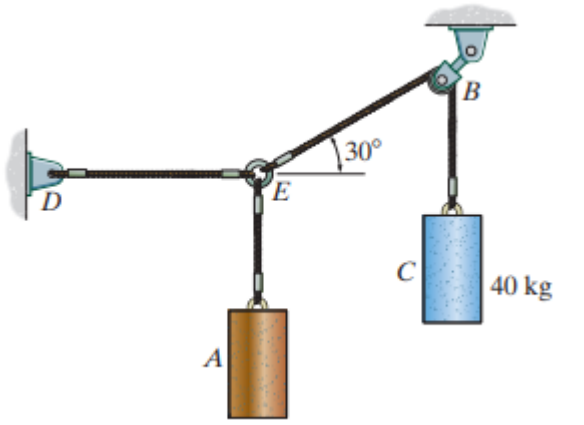
Then, $x = l - l_0 = \sqrt{13} - l_0$. Thus

$$F_{sp} = kx; \qquad 282.96 = 180(\sqrt{13} - l_0)$$

$$l_0 = 2.034 \text{ m} = 2.03 \text{ m}$$

مسألة 8: إذا كانت الكتلة الاسطوانة C 40Kg، احسب كتلة الاسطوانة A

لتعليق المجموعة في وضعية التوازن

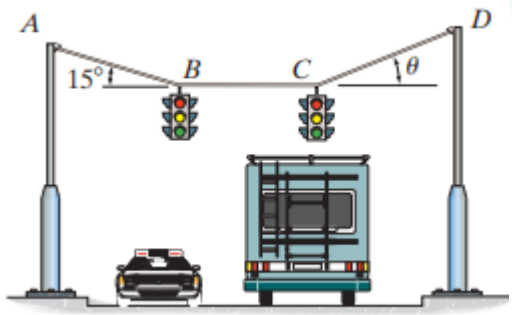


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad (392.4\text{ N})\sin 30° - m_A(9.81) = 0$$
$$m_A = 20\text{ kg} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة9 : احسب قوى الشد في الكبلات AB و BCو CD، اللازمة لتعليق اشارات المرور

ذات الكتل 10kgو 15 kg عند النقطتين Bو Cعلى التوالي . واحسب قيمة الزاوية θ.

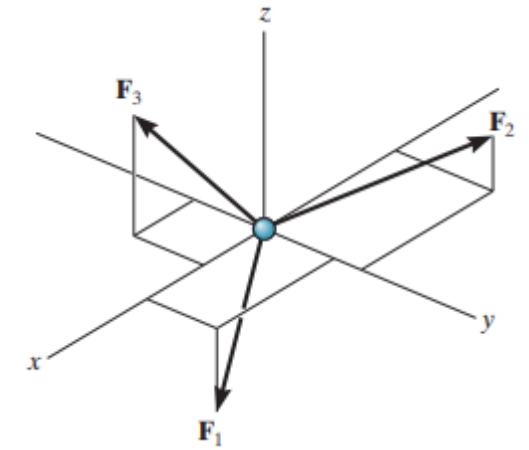
$$\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{AB}\sin 15° - 10(9.81)\text{ N} = 0$$
$$T_{AB} = 379.03\text{ N} = 379\text{ N}$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad T_{BC} - 379.03\text{ N}\cos 15° = 0$$
$$T_{BC} = 366.11\text{ N} = 366\text{ N}$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad T_{CD}\cos\theta - 366.11\text{ N} = 0$$
$$\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{CD}\sin\theta - 15(9.81)\text{ N} = 0$$
$$T_{CD} = 395\text{ N}$$
$$\theta = 21.9°$$



توازن الجسيم في الفراغ :

الشرط اللازم والكافي لتوازن الجسيم في الفراغ هو أن يكون المجموع الشعاعي لكافة القوى الخارجية المؤثرة على الجسين مساويا للصفر .

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$



في الفراغ ثلاثي الأبعاد يمكن تحليل القوى إلى مركبات **I .j,k** أي أن :

$$\sum F_x \,.\, i + \sum F_y \,.\, j + \sum F_z . \mathrm{j} = 0$$

من أجل تحقيق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (3)$$

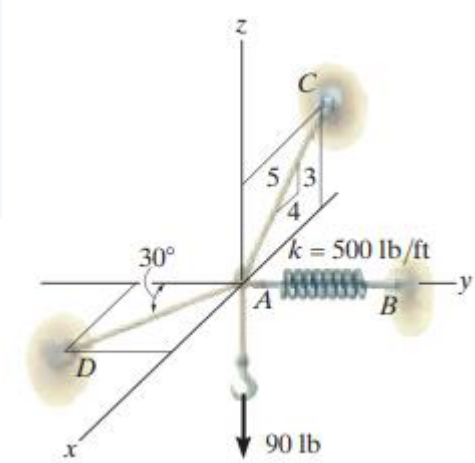
هذه المعادلات الثلاث تبين أن المجموع الجبري لمركبات كافة القوى وفق

المحاور x,y,z يجب أن يكون مساويا للصفر .

EXAMPLE10:

A 90-lb load is suspended from the hook shown in Fig. a.

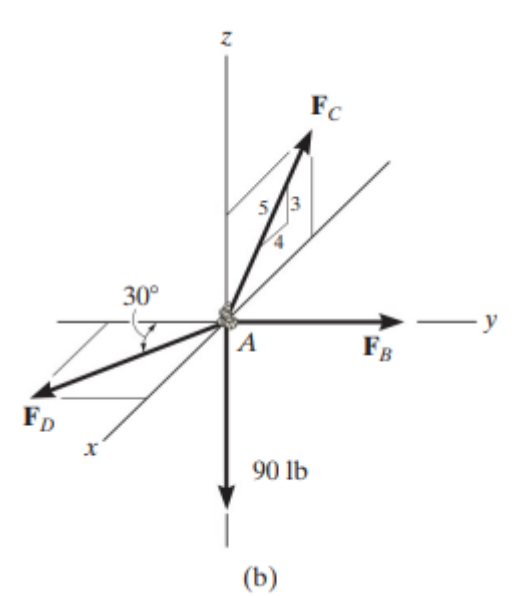
If the load is supported by two cables and a spring having a stiffness k = 500 lb/ft, determine the force in the cables and the stretch of the spring for equilibrium. Cable AD lies in the x–y plane and cable AC lies in the x–z plane



Free-Body Diagram.

The connection at A is chosen for the equilibrium analysis since the cable forces are concurrent at this point. The free-body diagram

is shown in Fig. b.



(b)

Equations of Equilibrium. By inspection, each force can easily be resolved into its x, y, z components, and therefore the three scalar equations of equilibrium can be used. Considering components Directed along each positive axis as "positive," we have:

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_D \sin 30° - \left(\tfrac{4}{5}\right) F_C = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -F_D \cos 30° + F_B = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \left(\tfrac{3}{5}\right) F_C - 90 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$

Solving Eq. (3) for F_C, then Eq. (1) for F_D, and finally Eq. (2) for F_B, yields

$$F_C = 150 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_D = 240 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_B = 207.8 \text{ lb} = 208 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

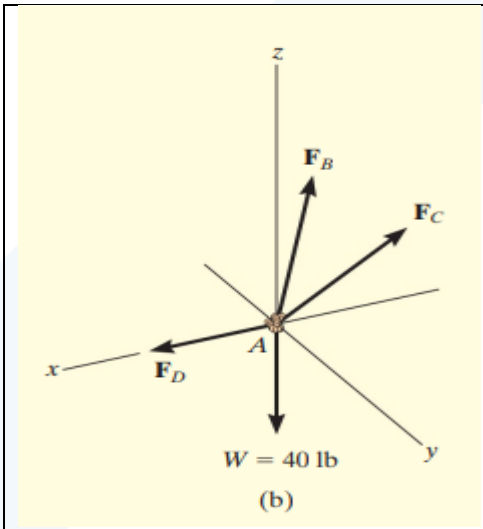
The stretch of the spring is therefore

$$F_B = k s_{AB}$$

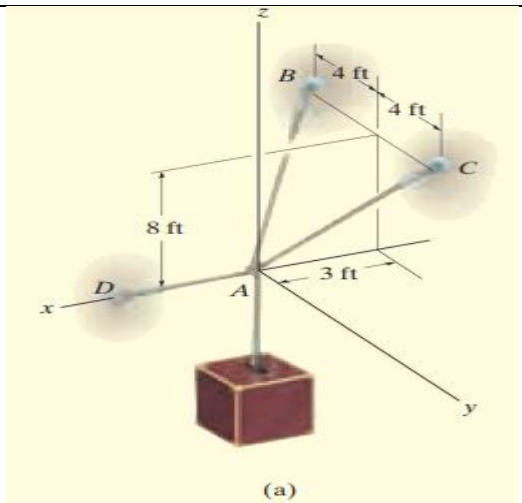
$$207.8 \text{ lb} = (500 \text{ lb/ft})(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.416 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

Example11:Determine the force in each cable used to support the 40-lb crate shown in Fig. a



(b)



(a)

Equations of Equilibrium: First we will express each force in Cartesian vector form. Since the coordinates of points B and C are B(-3 ft, -4 ft, 8 ft) and C(-3 ft, 4 ft, 8 ft), we have

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}\ \text{lb}$$

Equilibrium requires

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$-0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$-0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Equating the respective **i**, **j**, **k** components to zero yields

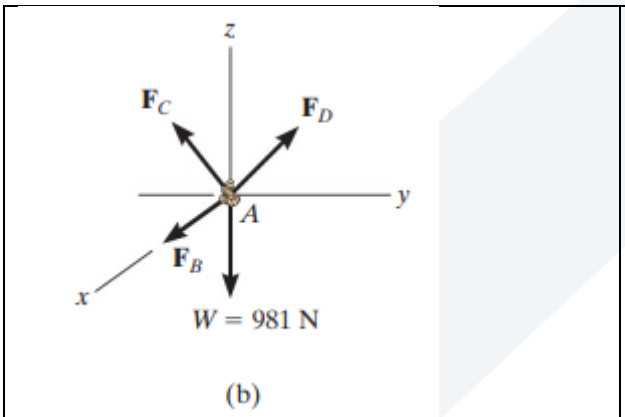
x

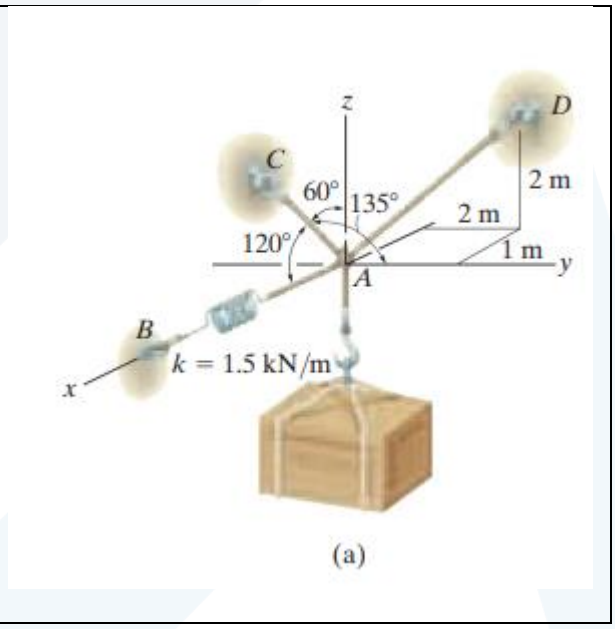
$$\Sigma F_x = 0; \qquad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (3)$$

Equation (2) states that $F_B = F_C$. Thus, solving Eq. (3) for F_B and F_C and substituting the result into Eq. (1) to obtain F_D, we have

$$F_B = F_C = 23.6\ \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$
$$F_D = 15.0\ \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$

EXAMPLE12: Determine the tension in each cord used to support the 100-kg crate shown in Fig. a





Solution :

Free-Body Diagram. The force in each of the cords can be determined by investigating the equilibrium of point A. The free-body diagram is shown in Fig. 3–13b. The weight of the crate is W = 100(9.81) = 981 N

Equations of Equilibrium:

Each force on the free-body diagram is first expressed in Cartesian vector form. point D(–1 m, 2 m, 2 m) for FD, we have

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \cos 120°\mathbf{i} + F_C \cos 135°\mathbf{j} + F_C \cos 60°\mathbf{k}$$
$$= -0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= -0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = \{-981\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

Equilibrium requires

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$F_B\mathbf{i} - 0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$
$$-0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Equating the respective **i**, **j**, **k** components to zero,

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.707F_C + 0.667F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0 \qquad (3)$$

Solving Eq. (2) for F_D in terms of F_C and substituting this into Eq. (3) yields F_C. F_D is then determined from Eq. (2). Finally, substituting the results into Eq. (1) gives F_B. Hence,

$$F_C = 813\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$
$$F_D = 862\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$
$$F_B = 694\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

EXAMPLE13 :Determine the magnitude of forces F1, F2, F3, so that the particle is held in equilibrium

$$\Sigma F_x = 0; \quad \left[\left(\tfrac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\tfrac{3}{5}\right) + 600\,\text{N} - F_2 = 0 \qquad (1)$$

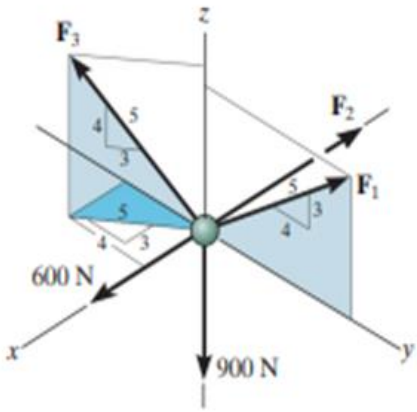
$$\Sigma F_y = 0; \quad \left(\tfrac{4}{5}\right)F_1 - \left[\left(\tfrac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad \left(\tfrac{4}{5}\right)F_3 + \left(\tfrac{3}{5}\right)F_1 - 900\,\text{N} = 0 \qquad (3)$$

$$F_3 = 776\,\text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_1 = 466\,\text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_2 = 879\,\text{N} \qquad \textit{Ans.}$$



EXAMPLE14 :Determine the tension developed in cables AB, AC, and AD.

$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\{-\cos 60^\circ \sin 30^\circ\,\mathbf{i} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ\,\mathbf{j} + \sin 60^\circ\,\mathbf{k}\}$$
$$= -0.25F_{AC}\,\mathbf{i} + 0.4330F_{AC}\,\mathbf{j} + 0.8660F_{AC}\,\mathbf{k}$$

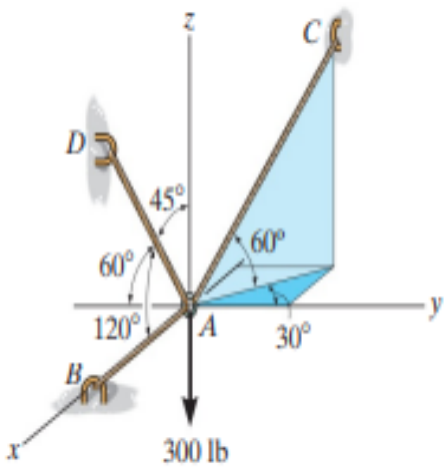
$$\mathbf{F}_{AD} = F_{AD}\{\cos 120^\circ\,\mathbf{i} + \cos 120^\circ\,\mathbf{j} + \cos 45^\circ\,\mathbf{k}\}$$
$$= -0.5F_{AD}\,\mathbf{i} - 0.5F_{AD}\,\mathbf{j} + 0.7071F_{AD}\,\mathbf{k}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad 0.4330F_{AC} - 0.5F_{AD} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad 0.8660F_{AC} + 0.7071F_{AD} - 300 = 0$$

$$F_{AD} = 175.74\,\text{lb} = 176\,\text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_{AC} = 202.92\,\text{lb} = 203\,\text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{AB} - 0.25(202.92) - 0.5(175.74) = 0$$

$$F_{AB} = 138.60\,\text{lb} = 139\,\text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$