التحليل الرياضي ١

محاضرة 3 ميكاترونيكس

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

استمرار تابع عددي

تمارين

1 في أي النقاط تكون التوابع الآتية مستمرة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2, x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x\neq 3\\ 5, & x=3\end{cases}$$

$$y=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$$

$$y=\frac{1}{x-2}-3x$$

2 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<3\\ 2ax, & x\geq 3\end{cases}$$

تمارين

1 في أي النقاط تكون التوابع الآتية مستمرة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$$

$$y = \frac{1}{x - 2} - 3x$$

الحل

$$y = \frac{1}{x - 2} - 3x$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x = 2$

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$

التابع غير مستمر عند النقطتين $x = 5$ و $x = -2$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 5 = g(3)$$

التابع المعطى مستمر في كل النقاط

تمارين

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2, x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

التابع غير مستمر عند $x=-2$ لأن النهاية غير موجودة

$f(-2)=4$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=\infty$$

التابع مستمر عند $x=2$ لأن

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=\frac{12}{4}=3=f(2)$$

2 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<3\\ 2ax, & x\geq 3\end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=(3)^2-1=8 \qquad \lim_{x\to 3^+}(2a)(3)=6a$$

بالتالي حتى يكون التابع المعطى مستمراً يجب

$$6a=8\Rightarrow a=\frac{4}{3}.$$

اشتقاق تابع عددي

تمارين

1 أوجد معادلة المماس لكل من التابعين الآتيين في النقاط المعطاة

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

2 أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$$v = \frac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$$

$$v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$$

$$y = \frac{2x+5}{3x-2}$$

تمارين

1 أوجد معادلة المماس لكل من التابعين الآتيين في النقاط المعطاة

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

الحل

$$k(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x = 2$$

$$k'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} \longrightarrow k'(2) = -\frac{1}{16}$$

$$y - \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{16}\right)(x-2) \Rightarrow y = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}x$$ معادلة المماس للمنحني المعطى

$$y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$$

$$y'(x) = \frac{(x+3)'(1-x) - (1-x)'(x+3)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} \longrightarrow y'(-2) = \frac{4}{9}$$

$$y - \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)(x+2) \Rightarrow y = \frac{11}{9} + \frac{4}{9}x$$ معادلة المماس للمنحني المعطى

تمارين

2 أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$$y = \frac{2x+5}{3x-2} \qquad v = (1-t)(1+t^2)^{-1} \qquad v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$y = \frac{2x+5}{3x-2}$$

$$y' = \frac{(3x-2)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-2)^2} = \frac{6x-4-6x-15}{(3x-2)^2} = \frac{-19}{(3x-2)^2}$$

$$v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$$

$$v = (1-t)\,(1+t^2)^{-1} = \frac{1-t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{(1+t^2)(-1)-(1-t)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-1-t^2-2t+2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$$

$$v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$$

$$v' = \frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-(1+x-4\sqrt{x})}{x^2} = \frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}$$