

Information theory and coding

نظرية المعلومات و الترميز

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

عنوان المحاضرة الثالثة

القنوات المتقطعة و القنوات المستمرة و ساعاتها

الغاية من المحاضرة الثالثة:

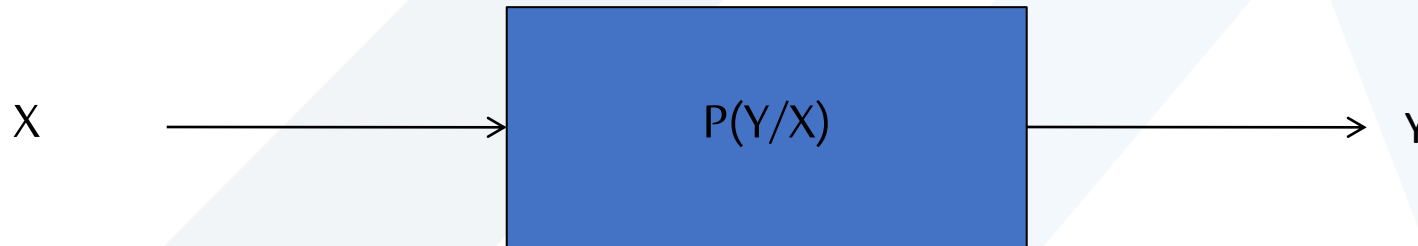
- ✓ تعريف القناة المتقطعة
- ✓ سعة القناة المتقطعة الخالية الضجيج
- ✓ القناة ذات الضجيج وسعتها
- ✓ تعريف القناة المستمرة و سعتها
- ✓ النظام المثالي

تعريف القناة المتقطعة (1/2) (Discrete Channels)

➤ تعريف 1:

هي نظام مكون من دخل وحيد و خرج وحيد ذي أبجدية دخل متقطعة X و أبجدية خرج متقطعة Y و مصفوفة انتقال من X إلى Y ($P(Y/X)$) بحيث:

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y / x) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$





جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

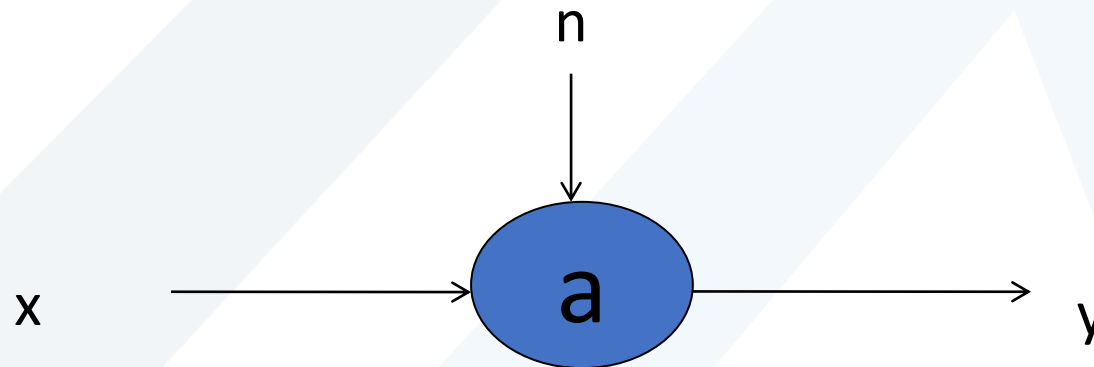
تعريف القناة المتقطعة (2/2) (Discrete Channels)

➤ **تعريف 2:**

إذا كانت X و Y و Z أبجديات متقطعة.

ليكن a تابع معرف بالشكل $a : X \times N \rightarrow Y$ و بفرض أن n متغير عشوائي يأخذ قيمه من N و يدعى متغير الضجيج (Noise Variable).

فالقناة المتقطعة (a, Z) هي نظام مكون من دخل وحيد و خرج وحيد بأبجدية دخل متقطعة X و أبجدية خرج متقطعة Y ، و يكون لكل دخل x متغير ضجيج n مستقل عنه. و يكون الخرج $y = a(x, n)$



تعريف سعة القناة المتقطعة

➤ تعريفها:

هي قياس لمقدار المعلومات الأعظمي الذي يمكن للقناة إيصاله خلال واحدة الزمن و نرملها بـ C و واحدتها bit/sec

➤ النظرية الأساسية:

- إذا كان لدينا قناة سعتها C ومنبع ذو معدل انتروبيا R
- حيث أن $(R \leq C)$ فإنه يوجد طريقة ترميز معينة بحيث يمكن إرسال خرج المنبع عبر القناة بخطأ ذو تردد صغير وعشوائي بالرغم من وجود الضجيج.
 - لكن إذا كان $(R > C)$ فإنه ليس بالإمكان إرسال المعلومات دون وجود خطأ.
- ومنه فإن سعة القناة يمكن أن تعرف بأنها المعدل الأعظمي لنقل المعلومات إلى المستخدم.



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

سعة القناة المتقطعة الخالية من الضجيج

❖ تعريف القناة المتقطعة الخالية من الضجيج :

هي القناة المتقطعة التي تكون فيها نسبة الإشارة إلى الضجيج كبيرة بشكل كاف، و يكون احتمال الخطأ عند المستقبل صغيراً جداً بحيث يمكننا القول أن القناة خالية من الضجيج.

سعة القناة المتقطعة الخالية من الضجيج:

إذا كان لدينا منبعاً ينتج $M(T)$ رسالة مختلفة عن بعضها البعض ذات طول T .

في جهة الاستقبال يشكل (المنبع + القناة) منبعاً جديداً يولد رسائل على دخل المستقبل.

يمثل هذا المنبع المكافئ منبعاً متقطعاً وله أجدية بمقدار $M(T)$ فيكون:

□ معدل الانتروبيا الأعظمي

$$R_{\max} = \frac{H_{\max}}{T} = \frac{1}{T} \log_2 M(T)$$

$$H_{\max} = \log_2 M(T) \quad \square \text{ الانتروبيا الأعظمية المولدة من قبل المنبع}$$

□ إذا افترضنا أننا نراقب المنبع خلال مدة عمله اللانهائية أي أن:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log_2 M(T)$$

➤ من أجل الرسالة ذات الطول T ومعدل إرسال الرموز بوحدة الزمن r .

■ و كل رمز يعبر عن إحدى الحالات الممكنة.

$$M(T) = \mu^{r \cdot T}$$

■ فيكون عدد الرسائل :

حيث μ : عدد الحالات الممكنة (الحالات المختلفة للرسائل)

➤ و بالتعويض في علاقة السعة السابقة يكون :

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log_2 \mu^{r \cdot T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{r \cdot T}{T} \log_2 \mu \Rightarrow$$

$$C = r \log_2 \mu \quad \text{bit/sec}$$

مثال عن سعة القناة الثنائية الخالية من الضجيج (Binary Noiseless Channel Capacity)

➤ القناة الثنائية الخالية من الضجيج (Binary Noiseless Channel): هي القناة التي عندما يرسل فيها بت يتم الحصول عليه دون أي خطأ.



➤ نلاحظ أنه في كل مرة لدينا بت واحد يتم إرساله (صفر أو واحد) أي ($r=1$)، وعدد الحالات الممكنة هنا هي 2 التي تمثل الصفر و الواحد أي ($\mu=2$). فتكون سعة هذه القناة:

$$C = r \log_2 \mu = 1 \log_2 2 = 1 \text{ bit/sec}$$

القناة المتقطعة ذات الضجيج (Noisy Discrete Channel)

➤ تعريفها:

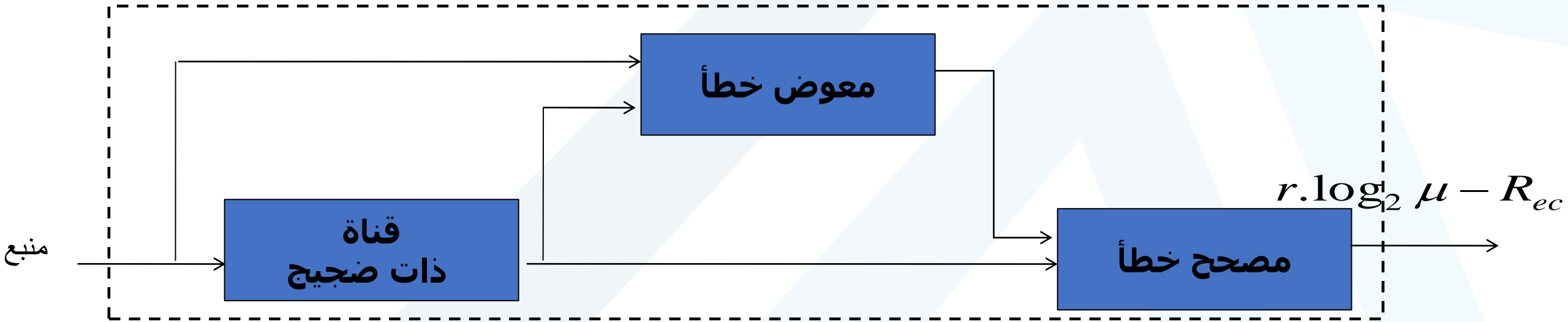
هي القناة المتقطعة التي تقوم بنقل الإشارة المفيدة زائدة الضجيج. مما يؤدي إلى انخفاض استطاعة القناة لنقل المعلومات.

➤ سعتها:

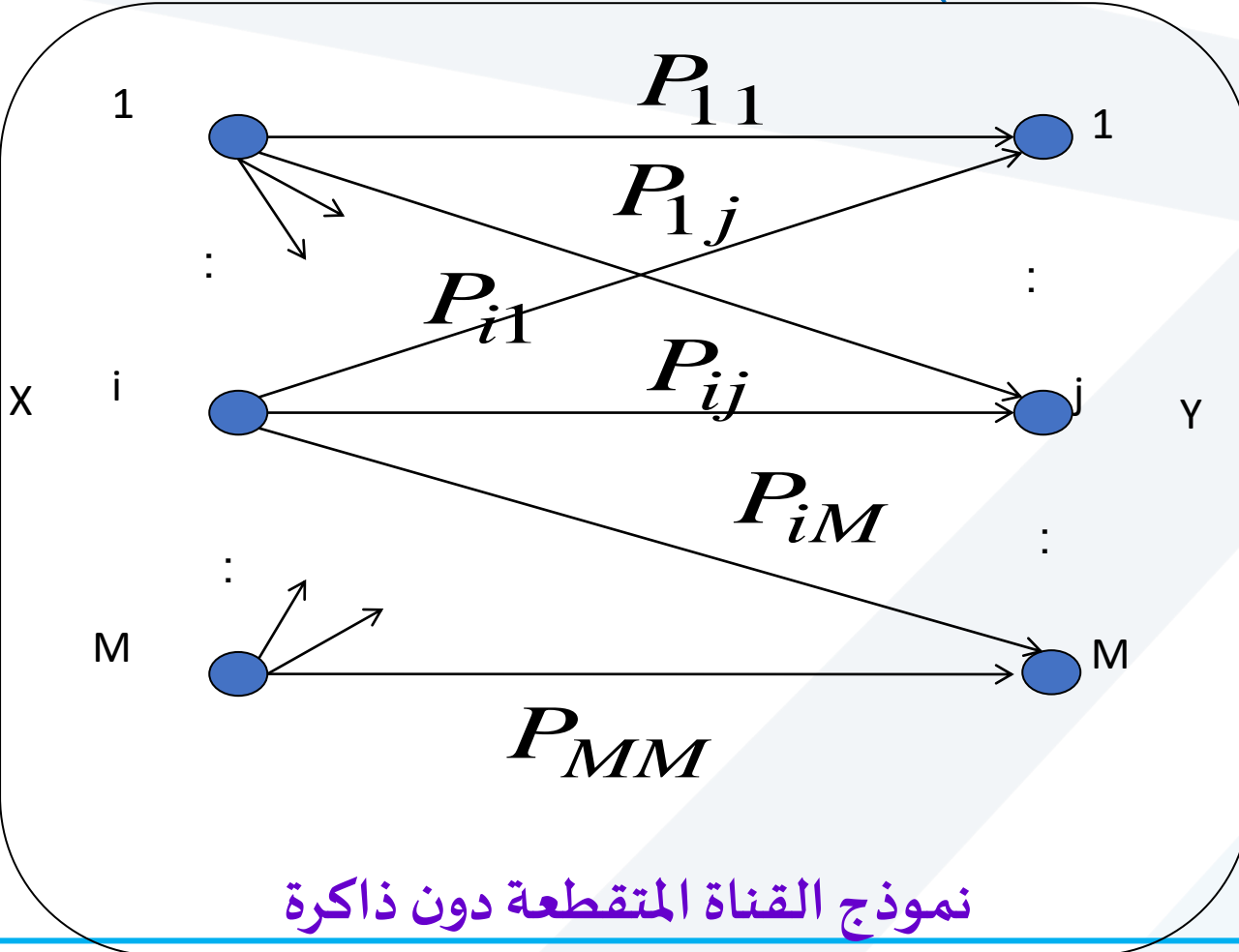
- سعتها أقل من سعة القناة دون ضجيج
- لتصحيح الخطأ يستخدم معوض خطأ يقوم بفحص الدخل والخرج من أجل معرفة التصحيح الواجب إجراؤه.
- بفرض أن القناة تعمل عند سعتها العظمى C
- معدل المعلومات المزود من المعوض R_{ec}
- بذلك فإن القناة ذات الضجيج تكافئ قناة خالية من الضجيج منقوصاً منها المعوض
- وفتكون سعة القناة ذات الضجيج:

$$C = r \cdot \log_2 \mu - R_{ec}$$

سعة القناة المتقطعة ذات الضجيج (Noisy Discrete Channel Capacity)



القناة المتقطعة دون ذاكرة (Discrete Memoryless Channel)



نموذج القناة المتقطعة دون ذاكرة

تعريفها:

قناة دخلها متغير عشوائي يأخذ قيمة من مجموعة قيم متقطعة محدودة X وخرجها يتعلق بدخل القناة في اللحظة ذاتها و ليس بالدخل في لحظة سابقة.

من أجل قناة مثالية: يكون الخرج مساو للدخل

من أجل قناة غير مثالية: يكون الخرج مختلف عن الدخل باحتمال معطى (p)

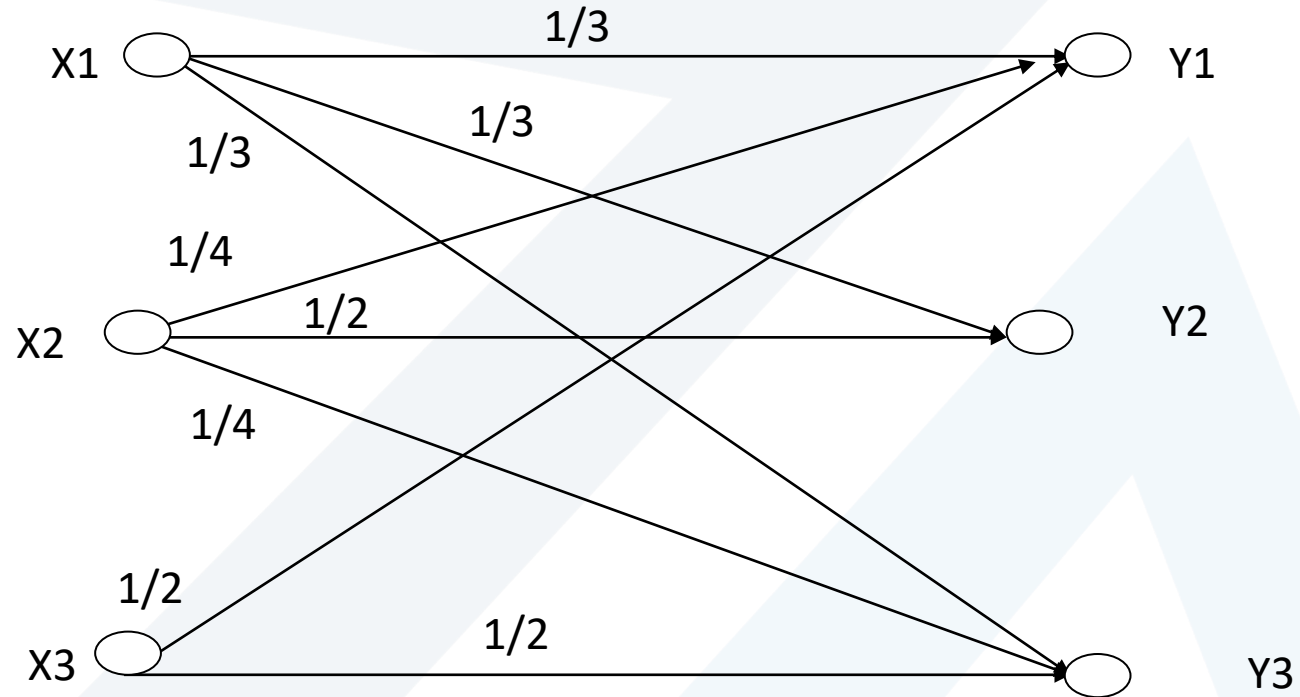
نموذج القناة المتقطعة دون ذاكرة (Probability model)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_{y1} \\ \vdots \\ P_{yM} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{مصفوفة احتمالات الخرج} \\ P(Y)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{M1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N1} & P_{2N} & \dots & P_{MN} \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة القناة } P(Y/X)} \underbrace{\begin{bmatrix} P_{x1} \\ \vdots \\ P_{xN} \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة احتمالات الدخل } P(X)}$$

$$P(Y) = P(Y/X) \cdot P(X)$$

مثال (1/2)

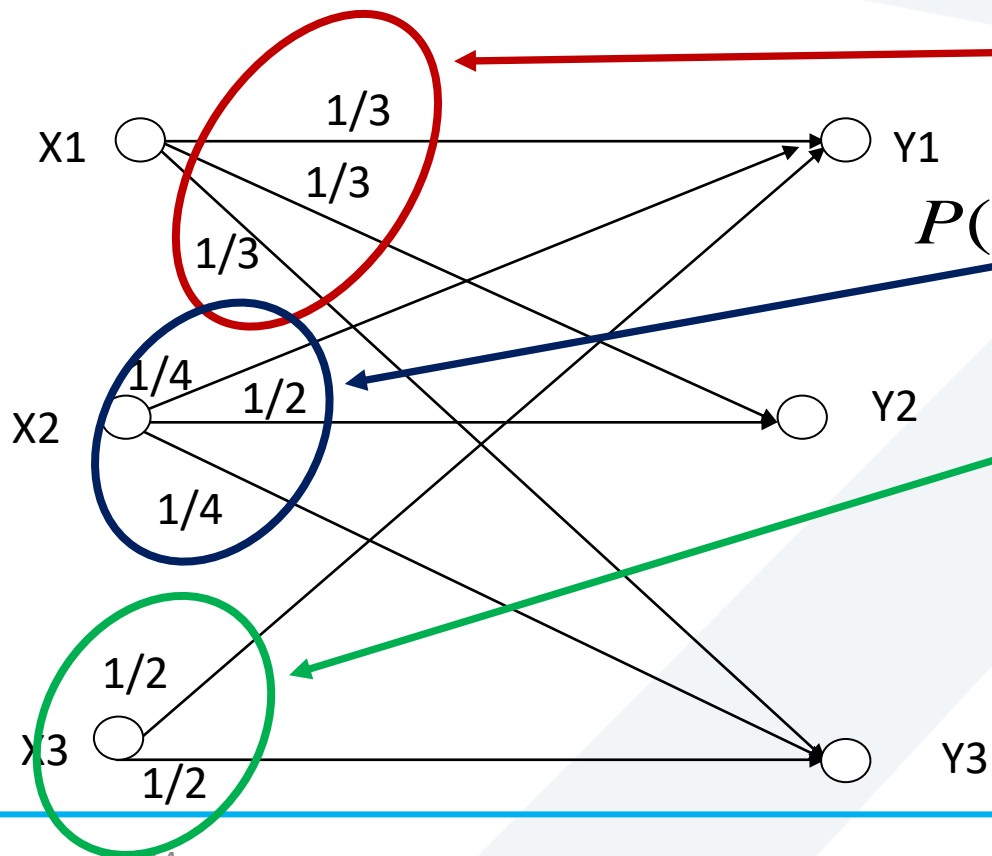
بفرض قناة اتصال متقطعة بثلاثة مداخل و ثلاثة مخارج ممثلة وفق النموذج:



استنتج مصفوفة الضجيج الموافقة لهذه القناة

مثال (2/2)

استنتاج مصفوفة الضجيج الموافقة لهذه القناة



$P(Y / X)$

$$\begin{bmatrix}
 P(Y_1/X_1) & P(Y_2/X_1) & P(Y_3/X_1) \\
 P(Y_1/X_2) & P(Y_2/X_2) & P(Y_3/X_2) \\
 P(Y_1/X_3) & P(Y_2/X_3) & P(Y_3/X_3)
 \end{bmatrix}$$

$$P(Y / X) = \begin{bmatrix}
 1/3 & 1/3 & 1/3 \\
 1/4 & 1/2 & 1/4 \\
 1/2 & 0 & 1/2
 \end{bmatrix}$$

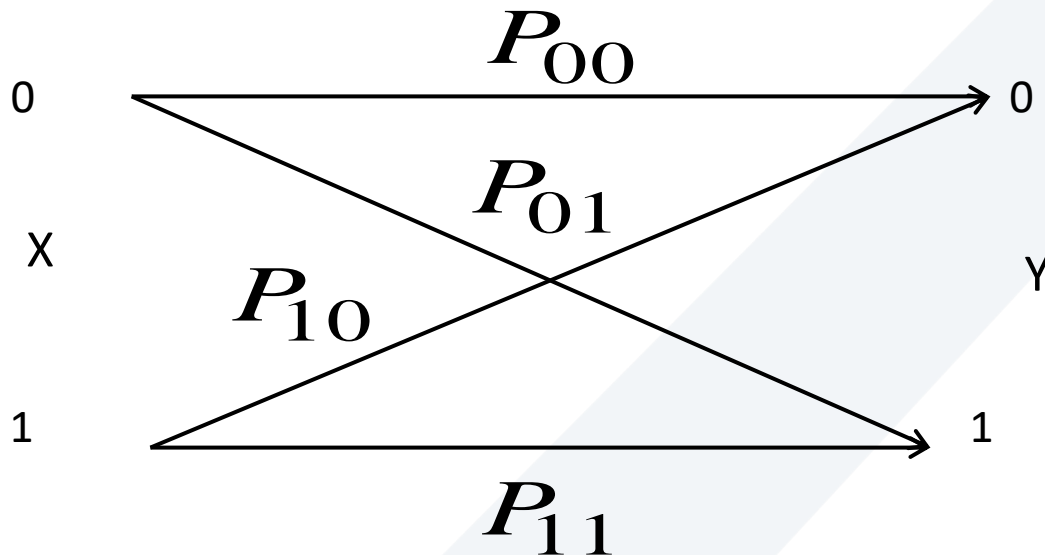
القناة الثنائية (1/3) (Binary Channel)

➤ قناة مصفوفة M المتقطعة (Discrete M -ary Channel):

هي قناة مصممة لإرسال واستقبال أحد رموز مصفوفة مكونة من M رمز حيث $M > 2$

تدعى هذه القناة **بالقناة الثنائية** في حال كانت $M=2$

➤ يكون نموذج القناة الثنائية هو:



$$P_{00} + P_{01} = 1$$

$$P_{11} + P_{10} = 1$$

احتمال الخطأ $P_e = P_0 P_{01} + P_1 P_{10}$

القناة الثنائية (2/3) (Binary Channel)

وتكون هذه القناة قناة ثنائية متناظرة (BSC (Binary Symmetric Channel إذا كان:

$$P_{00} = P_{11} \Rightarrow P_{01} = P_{10}$$

p

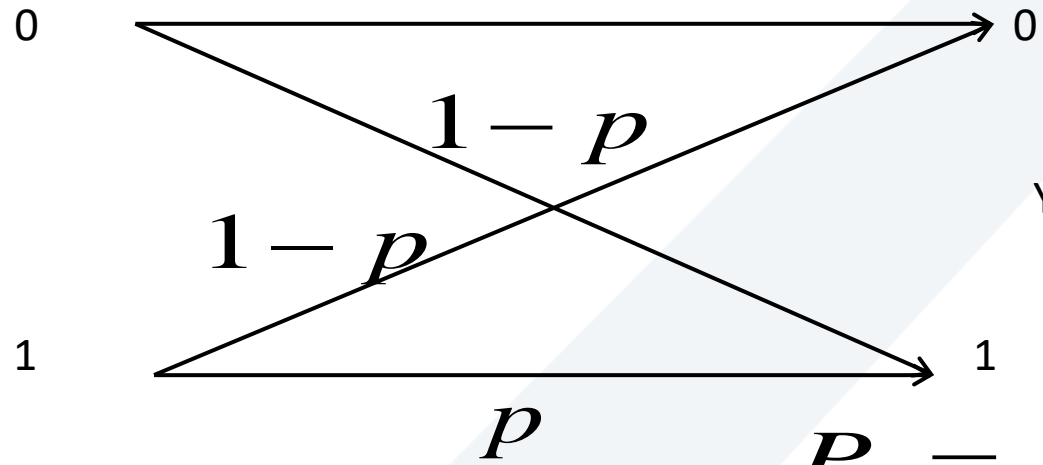
$$P_0 = P_1 = 0.5$$

أي:

$$P_{00} = P_{11} = p$$

$$\Rightarrow P_{01} = P_{10} = 1 - p$$

$$P_e = P_0(1 - p) + P_1(1 - p) = (1 - p)$$



القناة الثنائية (3/3) (Binary Channel)

القناة الثنائية الخالية من الضجيج (Binary Noiseless Channel) ➤



$$P_{00} = P_{11} = 1 \implies P_{01} = P_{10} = 0$$

$$P_e = 0$$

القناة المستمرة (1/3) (Continues Channel)

➤ تعريفها:

هي القناة التي تستخدم لنقل الإشارات المستمرة في الزمن من الشكل $x(t)$.

➤ محددات القناة:

عرض الحزمة الترددية B

نسبة الإشارة للضجيج S/N

➤ **سعة القناة المستمرة (قانون Hartly- Shanon):**

لتكن لدينا قناة مستمرة ذات حزمة ترددية أساسية ذات استجابة ترددية مستوية من أجل المجال الترددي $f \leq B$ و تحتوي على الضجيج. و يجب أن يحقق معدل إرسال الإشارات ضمن القناة المستمرة يعطى بالعلاقة: $r \leq 2.B$



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY

القناة المستمرة (2/3) (Continues Channel)

➤ في قناة تحتوي على ضجيج يمكن حساب قيمة μ بدلالة نسبة الإشارة للضجيج:

➤ لتكن عند خرج القناة:

■ استطاعة الإشارة S

■ استطاعة الضجيج N

■ و منه الاستطاعة الكلية المستقبلية $S+N$

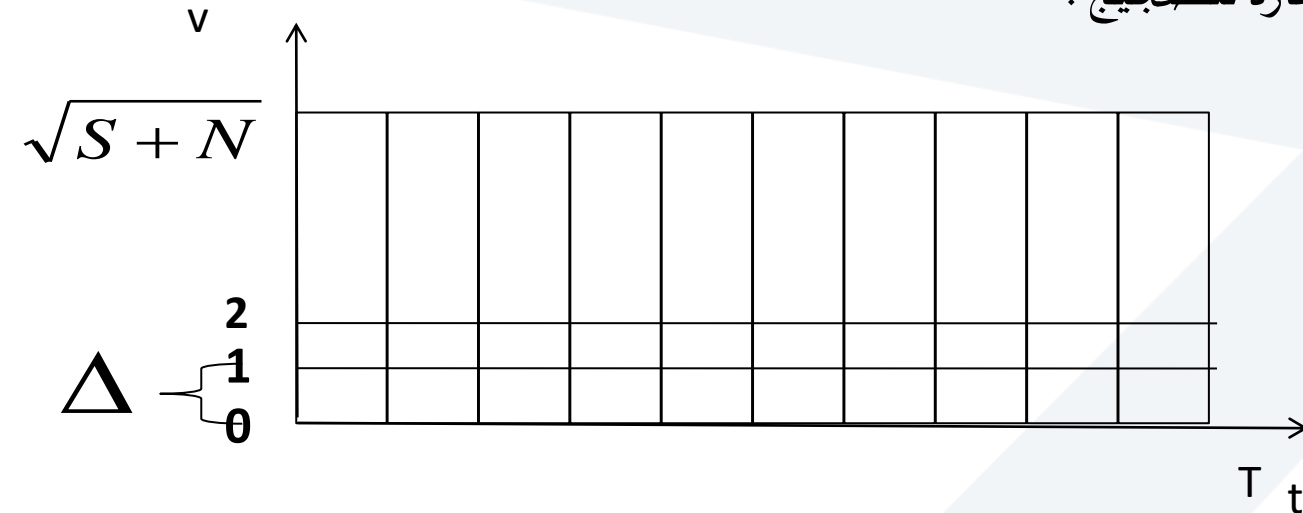
■ القيمة الفعالة لجهد الخرج $\sqrt{S+N}$

■ بسبب وجود الضجيج نفترض أنه عند الاستقبال تكون مستويات الجهد

متباعدة عن بعضها البعض بمقدار يتراوح بين قيمة الجهد الفعال للضجيج

$$\Delta = \sqrt{N} \quad \text{و القيمة الفعالة لجهد الخرج } \sqrt{S+N}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{S+N}}{\sqrt{N}} = \left(1 + \frac{S}{N}\right)^{1/2} \quad \text{إذاً عدد الحالات:}$$



القناة المستمرة (3/3) (Continues Channel)

$$\mu = \left(1 + \frac{S}{N}\right)^{1/2}$$

إذاً لدينا: $r \leq 2.B$

$$C = r \cdot \log_2 \mu = 2.B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)^{1/2}$$

بالتعويض يكون:

$$C = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bit/sec}$$

و هذا ما يسمى قانون **شانون-هارتلي (Hartly - Shannon)** يوضح التبادل ما بين عرض الحزمة و سعة القناة من أجل زيادة معدل معلومات محدود يمكن زيادة السعة المطلوبة بزيادة عرض الحزمة و العكس بالعكس .

مردود الاتصالات

➤ إذا فرضنا إن لدينا نظام مثالي ($C = R_{\max}$) ، معدل تدفق المعلومات فيه R و الاستطاعة المستقبلية S_R عندها نعرف مردود الاتصالات لهذا النظام بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{R}{R_{\max}} = 0.693 \frac{\eta \cdot R}{S_R}$$

نهاية المحاضرة الثالثة