

# نظرية المعلومات - معلوماتية

## المحاضرة الثالثة عملي

د. بشرى معلا

## المسألة الأولى

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & ? & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & ? & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

لدينا قناة مميزة بمصفوفة الضجيج الآتية:

المطلوب:

1. أكمل مصفوفة الضجيج. مع التعليل
2. ارسم مخطط القناة.
3. احسب كمية المعلومات المتبادلة  $I(X,Y)$  حيث  $P(x_1)=1/4$  ,  $P(x_2)=3/4$ .

## حل المسألة الأولى

1. المصفوفة هي :

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

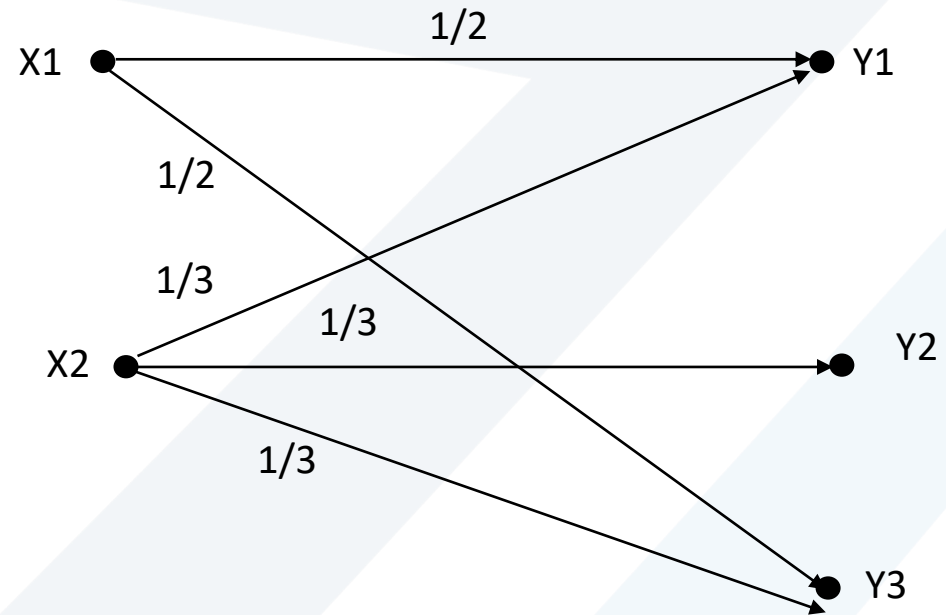
$$\sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) = 1$$

$$P(y_1 / x_1) + P(y_2 / x_1) + P(y_3 / x_1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + P(y_2 / x_1) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow P(y_2 / x_1) = 0$$

$$P(y_1 / x_2) + P(y_2 / x_2) + P(y_3 / x_2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + P(y_2 / x_2) + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P(y_2 / x_1) = \frac{1}{3}$$

## حل المسألة الأولى

2. مخطط القناة:



3. حساب  $I(X,Y)$ :

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \frac{1}{P(y_j/x_i)}$$

انطلاقاً من العلاقة:  $I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$

يلزمنا حساب المصفوفة  $P(X,Y)$  بالاعتماد على العلاقة  $P(x, y) = P(x) \cdot P(y/x)$

$$P(X, Y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بالتعويض في علاقة  $H(Y/X)$ :

$$H(Y/X) = \frac{1}{8} \log_2(2) + \frac{1}{8} \log_2(8) + \frac{3 \times 1}{4} \log_2(3) = 1.437 \text{ bit}$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{m=3} P(y_j) \log_2 \frac{1}{P(y_j)}$$

يلزمنا حساب  $p(y_j)$  لحساب  $H(Y)$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n=2} P(x_i, y_j)$$

بالتعويض:

$$P(x_2, y_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + P(y_1) = P(x_1, y_1) \Rightarrow P(y_1) = \frac{3}{8}$$

$$P(x_2, y_2) + P(y_2) = P(x_1, y_2) \Rightarrow P(y_2) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(y_3) = 1 - (P(y_1) + P(y_2)) = 1 - \frac{5}{8} \Rightarrow P(y_3) = \frac{3}{8}$$

$$H(Y) = 2 \times \frac{3}{8} \log_2 \left( \frac{8}{3} \right) + \frac{1}{4} \log_2(4) = 1.56 \text{ bit}$$

بالتعويض في  $H(Y)$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

بالتعويض في علاقة  $I(X,Y)$

$$I(X,Y) = 1.56 - 1.437 = 0.123 \text{ bit}$$

## المسألة الثانية

بفرض لدينا قناة ثنائية خالية من الضجيج ، فيها  $r = 10^5$  symbol/sec

بين إمكانية استبدالها بقناة مستمرة لها المحددات  $B=8\text{KHZ}$ ,  $\frac{S}{N} = 31$



## حل المسألة الثانية

$$C_D = r \log_2 \mu$$

سعة القناة المتقطعة:

$$10^5 \Rightarrow C_D = 10^5 \log_2 2 \text{ Bit/sec}$$

$$C_{CONT} = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

سعة القناة المستمرة:

$$\Rightarrow C_{CONT} = 8 \times 10^3 \log_2 (1 + 31) = 4 \times 10^4 \text{ Bit/sec}$$

نلاحظ أن  $C_D > C_{cont}$  أي سعة القناة المتقطعة أكبر من سعة القناة المستمرة لذا لا يمكن استبدال القناة المتقطعة بالقناة المستمرة

## المسألة الثالثة

يراد إرسال معلومات بمعدل 30000bits/sec

ما هي نسبة الإشارة إلى الضجيج عندما تكون قيمة عرض الحزمة :

B=30KHZ .2

B=3KHZ .1

## حل المسألة الرابعة

B=3KHZ .1

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

بالانطلاق من علاقة السعة:

$$3 \times 10^4 = 3 \times 10^3 \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$$10 = \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$$\Rightarrow 10 = 3.32 \log_{10} \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$$3 = \log_{10} \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \Rightarrow \log_{10} 10^3 = \log_{10} \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$$\Rightarrow 10^3 = \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \Rightarrow \frac{S}{N} = 10^3 = 30\text{dB}$$

للتحويل إلى الديسبل:  $10 \log(S/N)$

$$10 \log(10^3) = 30 \text{ dB}$$

بنفس الطريقة نحسب نسبة الإشارة للضجيج لحالة  $B=30 \text{ KHZ}$  فيكون  $S/N=1$

## المسألة الخامسة

لتكن لدينا قناة اتصال، بثلاثة مداخل و ثلاثة مخارج ، بحيث:

$$P (y_1/x_1) = P (y_2/x_2) = P (y_3/x_3) = 0.5, P (y_1/x_2) = P (y_1/x_3) = 0.25,$$

$$P (y_2/x_1) = P (y_2/x_3) = 0.25$$

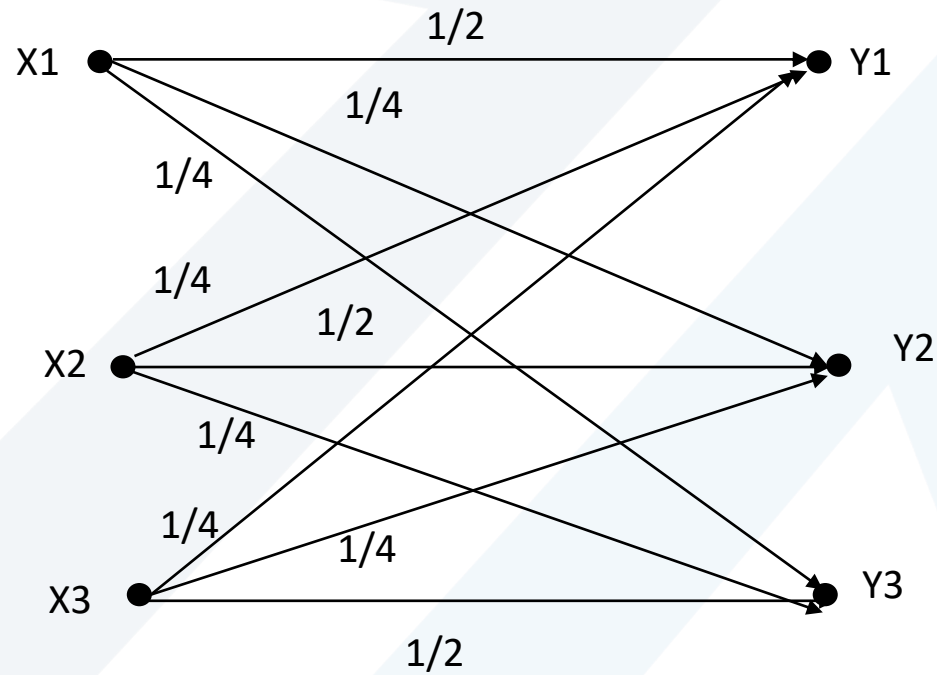
$$P (y_3/x_1) = P (y_3/x_2) = 0.25$$

المطلوب: ارسم مخطط القناة

احسب كمية المعلومات المتبادلة ضمن هذه القناة , إذا كانت كل رموز الدخل لها نفس احتمال الحدوث، و أن انتروبيا الخرج أعظمية لكل رمز من رموز الخرج

## حل المسألة الخامسة

ارسم مخطط القناة



## المسألة الخامسة

احسب كمية المعلومات المتبادلة ضمن هذه القناة , إذا كانت كل رموز الدخل لها نفس احتمال الحدوث، و أن انتروبيا الخرج أعظمية لكل رمز من رموز الخرج

تعطى كمية المعلومات المتبادلة بالعلاقة:  $I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X)$

$$H(Y) = \log_2(m) = \log_2(3) = 1.584 \text{ bit/symbol}$$

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j/x_i)$$

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y/x)$$

نحتاج لحساب  $P(X,Y)$   
نستخدم العلاقة :

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

من فرضيات المسألة مصفوفة الضجيج معطاة:

$$1/3 = P(x_1) = P(x_2) = P(x_3)$$

حسب فرضيات المسألة احتمالات الدخل متساوية أي:

$$P(X, Y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

فتكون مصفوفة الارتباط:



$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j/x_i)$$

$$H(Y/X) = \frac{3}{6} \log_2(2) + \frac{6}{12} \log_2(4) = 1.5 \text{ bit}$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$I(X,Y) = 1.548 - 1.5 = 0.48 \text{ bit/sec}$$

التعويض في العلاقة:

# نهاية المحاضرة الثالثة