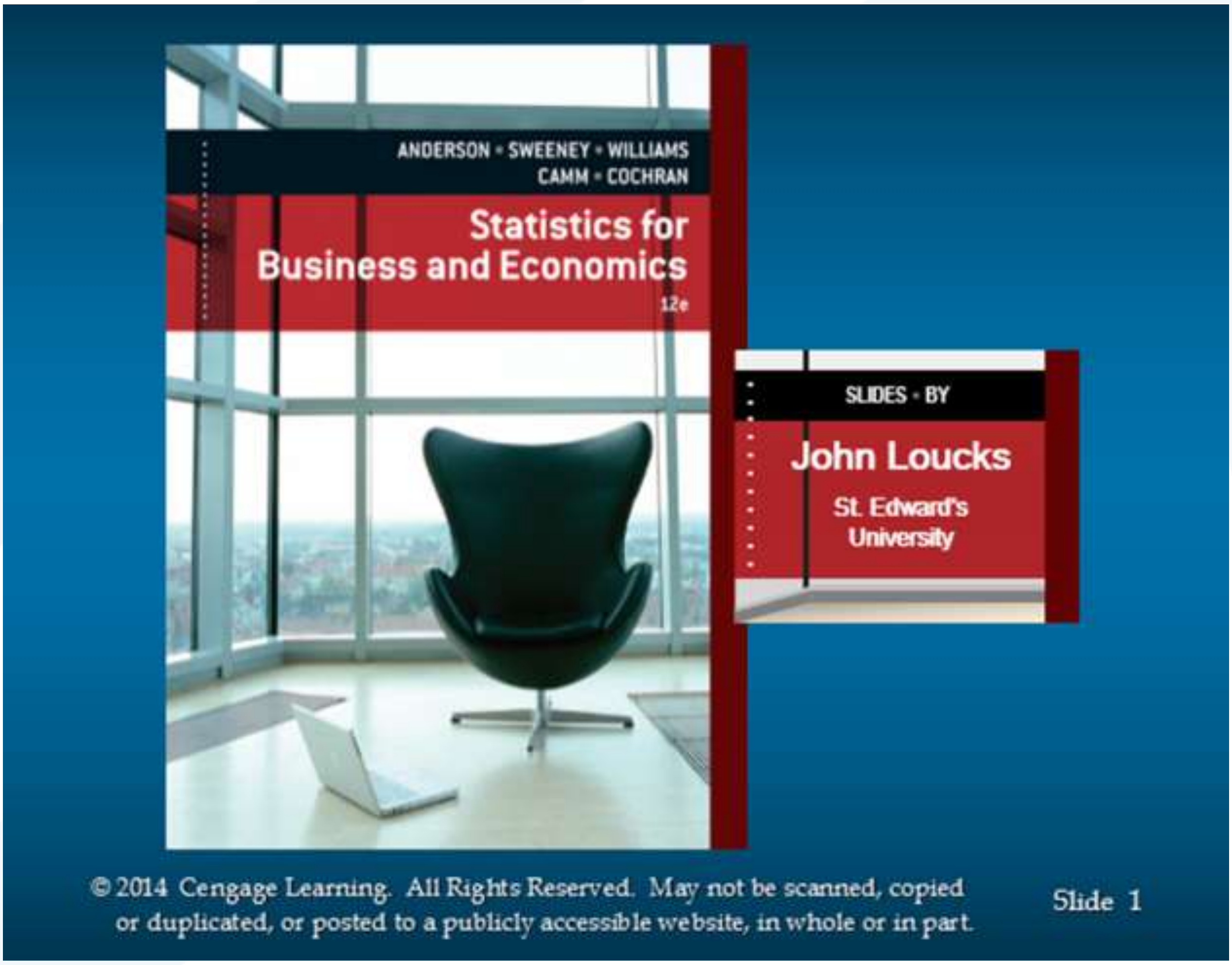
كلية ادارة الاعمال

الإحصاء 1 Statistics

الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الأول للعام 2023-2024

محاضرة رقم 4



مقاييس النزعة المركزية

تمهيد:

عرضنا في الفصول السابقة كيفية جمع البيانات الإحصائية، والطريقة المستخدمة في تصنيفها وترتيبها وتبويبها في صورة جداول وكذلك تمثيلها بيانياً.

غير أننا قد نحتاج في أحيان كثيرة إلى التعبير عن توزيع قيم ظاهرة ما بقيمة واحدة تُظهر الخصائص العامة لتلك الظاهرة.

فعند دراسة ميل معظم قيم تلك الظاهرة للتمركز حول قيمة معينة يُطلق على هذا الميل اسم النزعة المركزية. وهو ما يُعرف بظاهرة النزعة المركزية أي نزعة القيم المختلفة إلى التوضع حول القيمة النموذجية أو القيمة الممثلة لمجموعة القيم في التوزيع.

المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها أغلبية هذه البيانات تسمى بمقاييس النزعة المركزية. تتمثل القيمة المتوسطة للمجتمع أكثر من أية وحدة من مفرداته فهي رقم واحد يعبر عن، أو يمثل جميع البيانات لكل المجموعة.

التي يجب أن يتمتع بها مقياس جيد من مقاييس التمركز وأهمها:Yulleشروط يول

1. يجب تحديد قيمته بالضبط أي يجب أن يكون معرفاً تعريفاً دقيقاً، وليست بمجرد تقدير.
2. . يجب أن يُبنى على جميع المشاهدات أو غالبيتها.
3. . يمكن حسابه بسهولة وبسرعة.
4. . يمكن التعبير عنه بصورة رمزية، أو بعلاقة، مما يجعله خاضعاً للمعالجات الجبرية المختلفة.
5. – يفضل الا تتأثر بتذبذب العيّنات، أو يكون تأثيرها أقل ما يمكن.
6. . لا يتأثر كثيراً بالتقلبات التي قد تنشأ عن اختلاف العيّنة أو العيّنات في مجتمع واحد.
7. - لا يتأثر كثيراً بالقيم الشاذة أو القيم المتطرفة

مقاييس النزعة المركزية

1- الوسط الحسابي Mean Arthimetic: $\overline{X}$

الوسط الحسابي أو المتوسط لمتغيّر ما هو القيمة الناتجة عن قسمة مجموعة تلك القيم على عددها ويرمز له بـ $\overline{x}$ (إكس بار).

طرق حساب الوسط الحسابي:

-حالة بيانات مفردة(سلسلة قياسات):

أي إذا كان لدينا n مجموعة من القيم أو المشاهدات $x_i : x_1, x_2, x_3, \ , \ , \ , \ , x_n$

فإن الوسط الحسابي لها يساوي:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{f} x}{f}$$

مثال

البيانات التالية تمثل علامات خمسة طلاب في الإحصاء.

$$x_i : 70, 65, 50, 80, 75$$

فما هو متوسط علامات الطلاب:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{70+65+50+80+75}{5} = \frac{340}{5} = 68$$

. حالة بيانات مرتّبة غير مبوية: Ungrouped data

إذا كان لدينا سلسلة قياسات $x_i : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وكل قياس مكرر أكثر من مرة وحجم البيانات صغير نسبياً فيحسب وسطها الحسابي على النحو التالي:

قيم الترتيب x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
التكرارات n_i	n_1	n_2	n_3	n_n
$n_i\ x_i$	$n_1\ x_1$	$n_2\ x_2$	$n_3\ x_3$	$n_n\ x_n$

الوسط الحسابي يساوي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} nx_i}{n} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{f} fx}{f}$$

مثال

لتكن لدينا البيانات التي تمثل علامات الطلاب في الإحصاء موزعة في الجدول التالي:

الدرجات	x_i	50	55	60	65	68	70	75	$\sum n_i$
التكرار	n_i	1	5	8	4	10	2	1	$\sum n_i = 31$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{\Sigma n_i} = \frac{50\times1+\dots\dots+75\times1}{31} = \frac{1960}{31} = 63{,}23$$

بيانات مبوبة Grouped data

إذا كانت $x'_i : x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $n_i : n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$ على التوالي، فالوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n x_i}{\sum n} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{f} f x}{\sum f}$$

وخطوات حسابه هي:

1 . تعيين مراكز الفئات =.

الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة

2

$$X' = \frac{U + L}{2}$$

2 . ضرب مركز كل فئة بمقدار تكرارها .

$$X' * f \Leftrightarrow X' * n$$

3 . قسم مجموع (حاصل ضرب مركز كل فئة × تكرارها) $\sum X' * f \Leftrightarrow \sum X' * n$ على مجموع التكرارات.

$$\bar{X} = \frac{\sum X' * n}{\sum n} \Leftrightarrow \bar{X} = \frac{\sum f * X'}{\sum f}$$

مثال

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 250 طالباً في مقرر الإحصاء. (المصدر فرضي)

الفئات	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100]	Σ
التكرار $f = n$	6	14	26	43	51	47	2	27	7	250

المطلوب: حساب الوسط الحسابي لعلامات الطلاب في مقرر الإحصاء.

الحل:

جدول حساب الوسط الحسابي لعلامات الطلاب في مقرر الإحصاء بالطريقة المباشرة (حالة بيانات مبوّبة).

الفئات	التكرارات $f_i = n_i$	مركز الفئة X'	$X'*f$
[10-20[	6	15	90
[20-30[	14	25	350
[30-40[	26	35	910
[40-50[	43	45	1935
[50-60[	51	55	2805
[60-70[	47	65	3055
[70-80[	29	75	2175
[80-90[	27	85	2295
[90-100[	7	95	665
Σ	$\sum f = 250$		$\sum X'*f = 14280$

ومنه نجد أن الوسط الحسابي يساوي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{f} X'*f}{\sum f} = \frac{14280}{250} = 57.12$$

4-خواص الوسط الحسابي:

-خاصة(1): إن قيمة الوسط الحسابي لبيانات مفردة، أو مرتّبة واحد، لكنه يخالف عن القيمة الحقيقة في حالة تبويب البيانات،

خاصة 2 : اذا اضفنا او طرحنا من قياس من القياسات عدد ثابت مقداره C فان الوسط الحسابي الجديد يساوي الوسط الحسابي الأصلي مضافا او مطروحا منه العدد الثابت. وفق العلاقات الاتية:ح

حالة البيانات	العلاقة
1-حالة بيانات مفردة:	$\overline{x}c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(xi \pm c)}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \pm \frac{nc}{n} = \overline{x} \pm c$
2-حالة بيانات مرتّبة:	$\overline{x}c = \frac{\sum_{i=1}^{n} ni\,(x_i \pm c)}{\sum ni} = \overline{x} \pm c$
3-حالة بيانات مبوّبة	$\overline{x}c = \frac{\sum_{i=1}^{n} ni\,(x_i' \pm c)}{\sum n_i} = \overline{x} \pm c$

لنعود إلى مثالنا السابق (علامات الطلاب في مقرر الإحصاء

لنأخذ عدداً ثابتاً: $c = 10$ يتم البرهان عملياً على ذلك كما في الجدول التالي:

الفئات	التكرار ni	مركز الفئة x_i^1	مركز الفئة $x_i' + c$ + العدد الثابت c = 10	$n_i\,(x_i' + c)$
[20-10[	6	15	25	150
20-30	14	25	35	490
30-40	26	53	41	1170
40-50	43	45	55	2365
50- 60	51	55	65	3315
60- 70	47	65	75	3325
70- 80	29	75	85	2465
80- 90	27	85	95	2565
[90- 100]	7	95	105	735
Σ	Σn_i 250	-	-	$\sum n * (x' + c)$ 16780

ومنه يكون الوسط الحسابي الجديدة يساوي:

$$\overline{xc} = \frac{\sum n_i\,(xi' + c)}{\sum n_i} = \frac{16780}{250} = 67.12$$

أي أن الوسط الحسابي الجديد يزيد عن الوسط الأصلي بمقدار العدد الثابت الحسابي الأصلي $\bar{x} = 57.12$.

$$\bar{x} = \bar{X}_c \mp C = 67.12 - 10 = 57.12$$

أي

خاصة 3 : اذا ضربنا او قسمنا كل قياس من القياسات بعدد ثابت مقداره C فان الوسط الحسابي الجديد يساوي حاضل ضرب او قسمة الوسط الأصلي بالعدد الثابت أي :

حالة البيانات	العلاقة
حالة بيانات مفردة	$\bar{x}c = \dfrac{\sum \frac{x_i}{c}}{n} = \dfrac{\frac{1}{c}\sum x_i}{n} = \dfrac{1}{c}\bar{x}$
حالة بيانات مرتّبة:	$\bar{x}c = \dfrac{\sum n_i\left(\frac{x_i}{c}\right)}{\sum n_i} = \dfrac{1}{c}\bar{x}$
حالة بيانات مبوّبة:	$\bar{x}c = \dfrac{\sum n_i\left(\frac{x_i}{c}\right)}{\sum n_i} = \dfrac{\frac{1}{c}\sum x'_i n_i}{\sum n_i} = \dfrac{1}{c}\bar{x}$

لنعود إلى معطيات (علامات الطلاب في مقرر الإحصاء):

الفئات	ni	x_i'	$\frac{x_i}{C=5}$	القسمة على عدد ثابت $n_i\left(\frac{x_i}{c}\right)$	الضرب بعدد ثابت	
					$x_i'.c=5$	$n_i\left(x_i'.c\right)$
10-20	6	15	3	18	75	450
20-30	14	25	5	70	125	1750
30-40	26	35	7	182	175	4550
40-50	43	45	9	387	225	9675
50- 60	51	55	11	561	275	14025
60- 70	47	65	13	611	325	15275
70- 80	24	75	15	435	375	10875
80- 90	27	85	17	459	425	11475
90- 100	7	95	19	133	475	3325
Σ	250	-	////////	$\sum n*\left(\frac{X'}{c}\right)=2856$	////////	$\sum n*\left(X'*c\right)=71400$

الوسط الحسابي للقياسات الجديدة في حالة القسمة على عدد ثابت:

$$\overline{x}c=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\left(\frac{x_i}{c}\right)}{\sum n_i}=\frac{2856}{250}=11.424$$

الوسط الحسابي الأصلي يساوي:

$$\overline{X}=\overline{X}_c*c=11.424*5=57.12$$

اما في حالة الضرب بعدد ثابت يكون لدينا:

الوسط الحسابي للقياسات الجديدة:

$$\bar{X}_c = \frac{\sum n(x'*c)}{\sum n}$$

$$\bar{X}_c = \frac{\sum n(x'*c)}{\sum n} = \frac{771400}{250} = 285.6$$

ومنه الوسط الحسابي الأصلي يساوي: $\bar{X} = \frac{\bar{X}_c}{c} = \frac{285.6}{5} = 57.12$

-خاصة (4): إن مجموع انحرافات القياسات عن وسطها الحسابي يساوي الصفر، ويعبر رياضياً عن ذلك كما يلي:

*حالة بيانات مفردة: $\sum(X-\bar{X})=0$

*حالة بيانات مرتّبة: $\sum n*(X-\bar{X})=0$

*حالة بيانات مبوّبة: $\sum n*(X'-\bar{X})=0$

مثال

لنعود إلى معطيات (علامات الطلاب في مقرر الإحصاء): حالة بيانات مبوبة

الفئات	ni	$x_i^{'}$	$x_i^{'} - \bar{x}$	$n_i\left(x_i^{'} - \bar{x}\right)$
10-20	6	15	-42.12	-252.72
20-30	14	25	-32.12	-449.68
30-40	26	35	-22.12	-575.12
40-50	43	45	-12.22	-521.16
50- 60	51	55	-2.12	-108.12
60- 70	47	65	7.88	-370.36
70- 80	24	75	17.88	-518.52
80- 90	27	85	27.88	752.76
90- 100	7	95	37.88	256.16
Σ	250 $\sum n$	-	/////////	-1906.80 +1906.80 = 0

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن.

:

$$\sum_{L=1}^{n} n_i\left(x_i^{'} - \bar{x}\right) = 0$$

-**خاصة (5): إن** مجموع مربعات انحرافات القياسات عن وسطها الحسابي أصغر من مجموع مربعات انحرافاتها عن أية قيمة أخرى زيادة ونقصان، ويعبر رياضياً بالعلاقة الآتية:

حالة البيانات	العلاقة
بيانات مفردة	$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-A\right)^2$
بيانات مرتبة غير مبوبة	$\sum_{i=1}^{n} ni\left(x_i-\bar{x}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} ni\left(x_i-A\right)^2$
بيانات مبوبة	$\sum_{i=1}^{n} ni\left(x_i-\bar{x}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} ni\left(x'_i-A\right)^2$

لنعود إلى مثالنا السابق (علامات الطلاب في مقرر الإحصاء بكلية الاقتصاد) كما في الجدول الآتي:

الفئات	التكرار ni	مركز الفئة x'_i	الانحرافات عن الوسط $x'_i - \bar{x}$	مربع الانحرافات $(x'_i - \bar{x})^2$	$ni(x'_i - \bar{x})^2$	الانحرافات عن قيمة أخرى		
						$x'_i - A$ A = 45	$(x'_i - A)^2$	$ni(x'_i - A)^2$
10-20	6	15	- 42,12	1774,049	10644,57	- 30	900	5400
20-30	14	25	- 32,12	1031,894	14443,72	- 20	400	5600
30-40	26	53	- 22,12	489,249	12721,65	- 10	100	2600
40-50	43	45	- 12,12	146,944	6316,46	0	0	0
50- 60	51	55	- 2,12	4,494	229,21	+ 10	100	5100
60- 70	47	65	+ 7,88	62,094	2918,44	+ 20	400	18800
70- 80	29	75	+ 17,88	319,694	4271,14	+ 30	900	26100
80- 90	27	85	+ 27,88	777,294	20986,95	+ 40	1600	43200
90-100	7	95	+ 37,88	1434,894	10044,26	+ 50	2500	17500
Σ	250	-	-	-	87576,40	-	-	124300
	$\bar{x} = 57,12$ مجموع مربعات القياسات عن مجموع مربعات انحرافات القياسات عن وسطها الحسابي							

ومن الجدول أعلاه نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} ni\left(xi - \bar{x}\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} ni\left(x'i - A\right)^2$$

أي أن:

$$\mathbf{87576,40 < 124300}$$

مجالات تطبيق الوسط الحسابي:

- المجالات التي يلائمها الوسط الحسابي:

1- متوسط عدد أفراد الأسرة. 2- متوسط علامات الطالب.

3- متوسط الهطولات المطرية. 4- متوسط درجات الحرارة.

5- متوسط دخل الفرد.

- المجالات التي لا يلائمها الوسط الحسابي:

1- معدلات النمو السكانية ولاقتصادية
2- متوسط سلسلة قياسات ذو توزيع ملتو
3- متوسط الأسعار
4- متوسط الأرقام القياسية
5- متوسط سرعة الحافلات

الوسط الهندسيMean Geometri الرمز $\bar{G}$

يعرف الوسط الهندسي بأنه ناتج الجذر النوني لجداءات القياسات المعلومة. ويعبر عنه رياضياً بالعلاقات التالية:

- لتكن لدينا سلسلة القياسات التالية: $x_i : x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ....x_n$

حيث أن xi>0، فيكون الوسط الهندسي لها يساوي في حالة بيانات مفردة:

حالة البيانات	العلاقة
بيانات مفردة	$\bar{G} = \sqrt[n]{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 .....x_n} = \sqrt[n]{\pi_{i=1}^{n} x_i}$
بيانات غير مبوبة / مرتبة	$\bar{G} = \sqrt[n]{x_1{}^{n_1} + x_2{}^{n_2} + x_3{}^{n_3} .....x_n} = \sqrt[n]{\pi_{i=1}^{n} x_i}$
بيانات مبوبة	$\bar{G} = \sqrt[n]{x'_1{}^{n_1} + x'_2{}^{n_2} + x'_3{}^{n_3} + ... + x'_n{}^{n_m}} = \sqrt[n]{\prod_i^n x'_i{}^{n_j}}$

ونظراً لصعوبة إجراء الحسابات في هذه العلاقات الثلاثة لا سيما إذا كان مجموع البيانات كبيراً نسبياً، لذا فإنه يستعان باللوغاريتمات، حيث نحسب قيم اللوغاريتم ثم نقوم بقلب Log G فنحصل على الوسط الهندسي، وذلك على النحو التالي:

حالة البيانات	العلاقة
بيانات مفردة	$Log\ \bar{G} = \frac{1}{n}\left[Logx_1 + Logx_2 + ...+ Logx_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} Logx_i}{n}$
بيانات مرتبة	$Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[n_1 \log x_1 + n_2 \log x_2 + ...+ n_i \log x_n\right]$ $Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[n_i \log x_n\right]$
بيانات مبوبة	$Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[n_1 \log x'_1 + n_2 \log x'_2 + ...+ n_i \log x'_n\right]$ $Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[n_i \log x'_n\right]$

مثال

لتكن لدينا سلسلة القياسات التالية:

$$\chi_i = 15 \quad 12 \quad 18 \quad 20 \; 21 \, 35 \quad 40$$

$$\overline{G} = \sqrt[7]{15 \times 12 \times 18 \times 20 \times 24 \times 35 \times 40}$$

وبأخذ اللوغاريتم لهذه القياسات نجد أن:

$$Log\overline{G} = \frac{1}{7}\left[Log_{15} + Log_{18} + Log_{20} + Log_{12} + Log_{21} + Log_{35} + Log_{40}\right]$$

$$= \frac{1}{7}\left[1.17609 + 1.25527 + 1.30103 + 1.07918 + 1.39794 + 1.54407 + 1.60206\right]$$

$$Log\overline{G} = \frac{9.35564}{7} = 1.33652$$

ومنه نجد أن الوسط الهندسي يساوي:

$$\overline{G} = Inti\ log(1.33652) = 21.703$$

أما الوسط الحسابي لهذه السلسلة في البيانات فهو يساوي:

$$\overline{G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1}{n} = \frac{15+12+18+20+25+15+40}{7} = \frac{165}{7} = 23.57$$

من ذلك يتضح بأن الوسط الهندسي لقيم مختلفة موجبة دائماً أصغر من الوسط الحسابي.

- حالة بيانات مبوّبة، إذا كانت لدينا سلسلة البيانات التالية حيث أن:

- مثال

- نريد حساب متوسط معدلات تغير أسعار 180 مادة غذائية بالنسبة لأسعارها في العام الماضي، وهي الأسعار النسبية المبينة (في الجدول الآتي) سعر المادة في هذا العام مقسوم على سعرها في العام الماضي معطاة على شكل نسب مئوية ومبوّبة في مجالات متجانسة.

مجال الأسعار منسوبة إلى العام الماضي	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180
تكرار أسعار المواد: n	5	16	25	40	50	10	8	6

الحل:

إن متوسط معدلات تغير الأسعار لهذه المواد تحسب بواسطة الوسط الحسابي (لأنها معلومات نسبية). ولتسهيل الحسابات تنظم في جدول مساعد على النحو التالي:

فئات الأسعار	تكرارات أسعار المواد ni	مركز الفئة x_i'	$\log x'i$	$ni \log x_i'$
100-110	5	105	2.02119	10.106
110-120	16	115	2.0607	32.971
120-130	25	125	2.0464	52.422
130-140	40	135	2.1303	85.213
140-150	50	145	2.1612	108.07
150-160	10	155	2.1403	21.903
160-170	8	165	2.2175	17.74
170-180	6	175	2.2430	13.46
Σ	160	////////	///////	341.885

$$Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[n_i \log x'_n\right] = \frac{1}{160}\left[341.885 = 2.13678\right]$$

$$\boxed{\bar{G} = nti\ log(2.13647) = 137.02}$$

وهذا يعني أن مستوى الأسعار في العام الحالي في المتوسط 137.02% في مستواها في العام الماضي أي ان الأسعار ازدادت في المتوسط 37.02% = 100 - 137, 02.

* خواص الوسط الهندسي:

1- إن لوغاريتم الوسط الهندسي يتمتع خواص الوسط الحسابي جميعها، ولكن الوسط الهندسي نفسه يتمتع إلا بخاصة الجدار ثابت

2- إن الوسط الهندسي يعطي نتيجة أكثر تمثيلاً للقيمة المركزية من غيره عندما تكون بعض القياسات متطرفة نحو اليمين أي في التوزيعات الملتوية نحو اليمين، وهو بالمقابل يعطي قيمة متميزة عندما تكون بعض القياسات متطرفة نحو اليسار أي قيم صغيرة جداً والسبب هو أن الوسط الهندسي يتأثر كثيراً بالقياسات الصغيرة أكثر من تأثره بالقياسات الكبيرة.

4- أن أهم الحالات تطبيق الوسط الهندسي هي:

معدلات النمو الاقتصادية

أسعار الفائدة المركبة المتغيّرة

الأرقام القياسية

معدلات التزايد السكاني

مثال

(ليكن لدينا الجدول التالي الذي يبين عدد السكان /مليون نسمة/ خلال عشرة أعوام

الأعوام	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
عدد السكان	8.08	8.40	8.71	8.99	4.30	4.62	10.10	10.42	10.79	11.14

(المصدر المجموعة الإحصائية السورية)

$$Log\bar{G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log xi}{n}$$

والمطلوب حساب معدا نمو السكان

الحل:

: طريقة الوسط الهندسي:

ولتسهيل الحسابات تنظم البيانات في الجدول المساعد التالي:

الأعوام	عدد السكان/نسمة	نسبة السكان في كل سنة على السنة السابقة لها سلسلة متحركة	$Logx'i$
1974	8.08	-----	
1975	8.40	$\bar{p} = \frac{nt}{nt-1} = \frac{8.40}{8.08} = 1.040$	0.0170
1976	8.71	1.037	0.01574
1977	8.99	1.032	0.01374
1978	9.30	1.035	0.0149
1979	9.62	1.034	0.01489
1980	10.10	1.050	0.02115
1981	10.42	1.032	0.01355
1982	10.79	1.036	0.01515
1983	11.14	$\bar{p} = \frac{nt}{nt-1} = \frac{11.19}{10.79} = 1.032$	0.01386
Σ			$\sum \log x = 0.13986113$

$$Log\bar{G} = \frac{1}{\sum n}\left[\log x_{n}\right] = \frac{1}{9}[0.13986113] = 0.015540125$$

$$\bar{G} = Anti\log(0.015540125) \Longrightarrow 1.036430357 - 1 = 0.036430357$$

منه نجد أن الوسط الهندسي يساوي.

ويتقديم العدد واحد من $\bar{G}$ نحصل على وسطي نسبة التزايد السنوي والتي نرمزلها بـ k ومنه نجد أن:

$$\boldsymbol{K = 1.03641 - 1 = 0.036}$$

$$\boldsymbol{k = 0.036 \times 100 = 3.6\%}$$

b- طريقة الفائدة المركبة: يعبر رياضياً عنه بالعلاقة التالية:

$$Pn = Po(1+k)^{n}$$

$$1+k = \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_o}}$$

الفائدة المركبة

نحوّل العلاقة إلى لوغاريتم فنجد أن:

$$Log(1+k) = \frac{Log\ p_n - Log\ p_o}{n}$$

$$\log(1+k) = \frac{\log p_n - \log p_0}{n} = \frac{\log 11.14 - \log 8.08}{9} = \frac{1.04688191 - 0.90741136}{9} =$$

$$\frac{0.13947383}{9} = 0.015497092$$

Antilog (0.015497092)=1.03632 $\longrightarrow$ 1+k=1.03632 $\longrightarrow$ k=3.36%

-الوسط التوافقي Mean Harmonic ويرمزله $\bar{H}$

يعرف الوسط التوافقي لسلسلة بيانات x_i:x_1 x_2 x_3.....x_i بأنه مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات تلك القيم ويعبر عنه رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\bar{H} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_i}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1} \frac{1}{x_i}}$$

مثال

اشترى مزارع بذور قمح بـ 100 ليرة من كل من الشركات التالية.

الشركة الأول كان سعر الكغ من بذور القمح=20 ليرة

الشركة الثانية كان سعر الكغ من بذور القمح=25 ليرة

الشركة الثالثة كان سعر الكغ من بذور القمح =50 ليرة

فما هو متوسط سعر الكغ من بذور القمح؟

الحل:

يحسب متوسط سعر الكغ بطريقة الوسط التواثقي:

$$\bar{H} = \frac{\Sigma ni}{\Sigma ni \frac{1}{xi}} = \frac{3}{\frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50}} = \frac{3}{0.11} = 27.27$$

حالة بيانات مبوبة:

إذا كانت x'_1 x'_2 $x'i$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكرارتها n_3 n_2 n_1 على التوالي. فالوسط التوافقي يساوي.

$$\bar{H} = \frac{\Sigma ni}{\Sigma ni \frac{1}{xi}} = \frac{\Sigma ni}{\Sigma \frac{ni}{xi}}$$

مثال

أوجد الوسط التوافقي للبيانات التالية:

الفئات	ni	x'_i	$\frac{1}{x'_i}$	$ni\frac{1}{x'_i}$
60-65	5	62.5	0.016	0.08
65-70	18	67.5	0.01481	0.2667
70-75	42	72.5	0.01379	0.57931
75-80	27	77.5	0.01290	0.34839
80-85	8	82.5	0.01212	0.09697
Σ	100			$\bar{H}=\frac{\sum n}{\sum n*\frac{1}{X'}}=1.37134$

ومنه نجد أن الوسط التوافقي يساوي:

$$\bar{H}=\frac{\sum n_i}{\sum x'\frac{1}{n}}=\frac{100}{1.37134}=72.92137$$

مثال

مؤسسة للنقل الخارجي تملك 25 باص مخصصة لخط دمشق . اللاذقية وخلال إحدى الرحلات كان متوسط السرعة كما يلي:

عدد الحافلات	4	10	6	5
السرعة كم/ ساعة	90	80	70	60

المطلوب حساب متوسط السرعات لهذه الباصات

الحل:

إن عدد الباصات يمثل عدد التكرارات، لذلك تستخدم صيغة الوسط التوافقي المثقل بالتكرارات وفق التالي:

$$\bar{H}=\frac{\Sigma ni}{\Sigma ni\frac{1}{xi}}=\frac{25}{\frac{4}{90}+\frac{10}{80}+\frac{6}{70}+\frac{5}{60}}$$

$$\bar{H}=\frac{\sum n_i}{\sum x'\frac{1}{n}}=\frac{25}{0.33849}=73.857km/h$$

من أهم مجالات تطبيق الوسط التوافقي هي قيم متوسطة السرعة لعدة حافلات . قيم إنتاجية العامل . قيم إنتاجية العمل بالنسبة إلى الزمن . قيم أسعار الجملة لسلعة ما . نصيب الفرد من المساحة السكنية في إقليم ما....إلخ.

مثال

احسب متوسط أجرة العامل اليومية للمجموعات الخمسة المبينة في الجدول الآتي.

المجموعة	إجمالي أجور المجموعة في اليوم ki ل. س	الأجرة اليومية xi/ ل. س عامل
A	840	80
B	5600	140
C	3800	125
D	2500	130
E	1600	90
Σ	14340	-

الحل: لحساب متوسط الأجر نجد أن:

اجمالي الأجور

الاجر اليومي =---

العدد الكلي للعمال

$$xi=\frac{ki}{ni}$$

وبما أن عدد العمال مجهول في كل مجموعة (المقام ni مجهول) إذن تطبق الوسط التوافق المتشكل بـ ki وبذلك نجد أن:

$$\bar{H}=\frac{\Sigma ni}{\Sigma ni\,\frac{1}{xi}}=\frac{14340}{\frac{840}{80}+\frac{5600}{140}+\frac{3800}{125}+\frac{2500}{130}+\frac{1600}{90}}$$

$$\bar{H}=\frac{\sum n_i}{\sum x'\frac{1}{n}}=\frac{14340}{117.9086}=121.62\approx 122Ls$$

مثال : نفترض إن إنتاجية العمل في ستة شركات متخصصة في إنتاج سلعة ما مع كميات الإنتاج فيها كما هو موضح في الجدول الآتي:

إنتاجية العمل xi/قطعة/ ساعة	كمية المنتجات خلال شهر/ قطعة/Qi	الشركة
25	4500	A
12	3800	B
10	5100	C
8	2300	D
15	1800	E
9	1400	F
	$\sum Q=18900$	المجموع Σ

المطلوب:

حساب متوسط إنتاجية العمل ثم متوسط الزمن اللازم لإنتاج القطعة الواحدة من هذه المنتجات.

الحل:

نلاحظ أن إنتاجية العمل بالنسبة للزمن: $=\frac{\text{كمية المنتجات الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$

$$xi = \frac{Q_i}{t_i} =$$

وبما أن الزمن t_i مجهول إذن علينا أن نطبق الوسط التوافقي بالكميات Q_i لحساب متوسط إنتاجية العمل لهذه الشركات، وبذلك نجد أن:

قطعة/ساعة

$$\overline{H} = \frac{\Sigma Q_i}{\Sigma Q_i(\frac{1}{xi})} = \frac{18900}{\frac{4500}{25}+\frac{3800}{12}+\frac{5100}{10}+\frac{2500}{8}+\frac{1800}{15}+\frac{1400}{4}} = \frac{18900}{1569,722} = 12,04053$$

.حساب متوسط الزمن اللازم لإنتاج القطعة الواحدة. فإننا نلاحظ أن هذا الزمن في الشركات Y_i تساوي:

$$Y_i = \frac{t_i}{Q_i}$$

وبما أن t_i مجهول إذن وأن Q_i معروفة،إذن لحساب الزمن Y_i تطبيق العلاقة التالية:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma t_i x_i}{\Sigma t_i} = \overline{Y} = \frac{\Sigma Q_i y_i}{\Sigma Q_i}$$

حيث استبدل t_i بـ Q_i. وهي عبارة عن الوسط الحسابي المثقل لـ Y_i بالكميات Q_i. وبما أن $Y_i = \frac{t_i}{Q_i} = \frac{1}{x_i}$ فإن العلاقة السابقة صحيحة.

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{I=1}^{n} Q_i \frac{1}{X_i}}{\Sigma Q_i} = \frac{1}{\overline{H}} = \frac{1}{12,04035} = 0,08305$$

وهو متوسط الزمن اللازم لإنتاج قطعة واحدة من المنتجات وهو يعادل (4.98) دقيقة أي $0.08305 \times 60 = 4.98$ ويمكن التحقق من صحة الحسابات. وذلك بحساب الأزمنة المستغلة في كل من الشركات الست وهي تساوي: 180 ، 316.67، 510، 287.5، 120، 155.56 ومجموعها يساوي 1564.70 ساعة.

.وبحساب جداء متوسط الإنتاجية في الساعة بعدد الساعات نحصل على الكميات الإجمالية:

$$1569,72 \times 12,04035 = 18900$$

نهاية المحاضرة