التحليل الرياضي ١

محاضرة 4 ميكاترونيكس

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

اشتقاق تابع عددي

تمارين

1 استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتق كل من التابعين الآتيين:

$$1)\quad F(x)=2^{\sqrt{x}} \qquad 2)\ G(x)=\log_{10}(2+\cos x)$$

2 اوجد مشتق التابع الآتي $y^2 = x^2 + \sin xy$

3 أوجد ميل مماس المنحني $3(x^2+y^2)^2 = 100\,x\,y$ في النّقطة $(3,1)$

4 أثبت أن النقطة $(2,4)$ تقع على منحني التابع $x^3+y^3-9xy=0$ ، أوجد معادلة المماس لهذا المنحني في النقطة المذكورة.

5 أوجد التقريب الخطي القياسي لكل من التوابع الآتية في النقاط المعطاة بجانب كل تابع:

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\quad a=1 \qquad f(x)=\sqrt[3]{x},\quad a=-8 \qquad f(x)=\tan x,\quad a=\pi$$

6 باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية لكل مما يأتي:

$$1)\ (7.97)^{1/3} \quad 2)\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$$

جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتق كل من التابعين الآتيين:

$$1)\quad F(x) = 2^{\sqrt{x}} \qquad 2)\ G(x) = \log_{10}(2+\cos x)$$

الحل

$1)\quad F(x) = 2^{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} \\ f(x) &= 2^x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= 2^x \ln 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \left(2^{\sqrt{x}} \ln 2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\ln 2}{2}\frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$2)\quad G(x) = \log_{10}(2+\cos x)$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= 2+\cos x \\ f(x) &= \log_{10} x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \\ f'(x) &= \frac{1}{x\ln 10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \frac{-\sin x}{(2+\cos x)\ln 10}$$

تمارين

2 اوجد مشتق التابع الآتي $y^2 = x^2 + \sin xy$

الحل

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\longrightarrow 2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \longrightarrow (2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

3 أوجد ميل مماس المنحني $3(x^2+y^2)^2 = 100\,x\,y$ في النّقطة $(3,1)$

الحل

$$\frac{d}{dx}(3(x^2+y^2)^2) = \frac{d}{dx}(100\,x\,y) \longrightarrow 3(2)(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right)$$

تمارين

$$\left(12y(x^2+y^2)-100x\right)\frac{dy}{dx}=100y-12x(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{100y-12x(x^2+y^2)}{\left(-100x+12y(x^2+y^2)\right)}$$

عند النّقطة $(3,1)$ يكون ميل المماس :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,1)}=\frac{100(1)-12(3)(9+1)}{-100(3)+12(1)(9+1)}=\frac{13}{9}$$

4 أثبت أن النقطة $(2,4)$ تقع على منحني التابع $x^3+y^3-9xy=0$ ، أوجد معادلة المماس لهذا المنحني في النقطة المذكورة.

الحل

$2^3+4^3-9(2)(4)=8+64-72=0.$ النقطة تحقق معادلة التابع، الأمر الذي يعني أن النقطة تقع على منحني التابع المذكور.

$$x^3+y^3-9xy=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)-\frac{d}{dx}(9xy)=\frac{d}{dx}(0) \Rightarrow 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}. \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\right|_{(2,4)}=\frac{3(4)-2^2}{4^2-3(2)}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow y=4+\frac{4}{5}(x-2) \Rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}.$$ معادلة المماس

تمارين

5 أوجد التقريب الخطي القياسي لكل من التوابع الآتية في النقاط المعطاة بجانب كل تابع:

$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$ $\qquad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$ $\qquad f(x) = \tan x, \quad a = \pi$

الحل

$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 0(x-1) = 2$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

$$f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \Rightarrow L(x) = f'(-8)(x-(-8)) + f(-8) = \frac{1}{12}(x+8) - 2 \Rightarrow L(x) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$$

$f(x) = \tan x, \quad a = \pi$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x \Rightarrow L(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) = 0 + 1(x-\pi) = x - \pi$$

تمارين

6 باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية لكل مما يأتي:

$$1)\ (7.97)^{1/3} \quad 2)\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$$

الحل

$$1)\ (7.97)^{1/3}$$

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}}dx$$

$$f(7.97) = f(8-0.03) \simeq f(8)+dy = (8)^{1/3} + \frac{1}{3(8)^{2/3}}(-0.03) = 1.997 \Rightarrow 7.79^{1/3} = 1.997497$$

$$2)\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right) \simeq f\left(\frac{\pi}{6}\right)+dy = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times 0.01 = 0.5087 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right) = 0.508635$$

القيم القصوى

تمارين

1 أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من التوابع الآتية في المجال المعطى بجانب كل تابع:

- $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$
- $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$
- $f(x) = 4 - x^3, \quad -2 \leq x \leq 1$

2 أوجد المجالات التي يكون عندها التابع متزايد أو متناقص وأوجد القيم القصوى المحلية لكل من التوابع الآتية :

- $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$
- $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$
- $h(x) = 2x^3 - 18x$

3 أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من التوابع الآتية :

- $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad 0 \leq x < 1$
- $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$
- $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

تمارين

1 أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من التوابع الآتية في المجال المعطى بجانب كل تابع:

- $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$
- $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$
- $f(x) = 4 - x^3, \quad -2 \le x \le 1$

الحل

$f(x) = 4 - x^3, \quad -2 \le x \le 1$

$f(x) = 4 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \longrightarrow x = 0$ النقطة الحرجة

$f(-2) = 12, f(0) = 4, f(1) = 3 \longrightarrow$ القيمة العظمى المطلقة $f(-2) = 12$ القيمة الصغرى المطلقة $f(1) = 3$

$h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

$h(x) = -3x^{2/3} \Rightarrow h'(x) = -2x^{-1/3} \longrightarrow x = 0$ النقطة الحرجة

$h(-1) = -3, h(0) = 0, h(1) = -3 \longrightarrow$ القيمة العظمى المطلقة $h(0) = 0$ القيمة الصغرى المطلقة $h(-1) = h(1) = -3$

تمارين

$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

$$g(x) = \sqrt{4-x^2} = (4-x^2)^{1/2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

النقاط الحرجة $x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2$

لكن النقطة الحرجة $x = 2$ لا تنتمي إلى المجال المعطى، بالتالي لانحسب عندها قيمة التابع.

$$g(-2) = 0, \; g(0) = 2, \; g(1) = \sqrt{3}$$

القيمة العظمى المطلقة $g(0) = 2$ القيمة الصغرى المطلقة $g(-2) = 0$

2 أوجد المجالات التي يكون عندها التابع متزايد أو متناقص وأوجد القيم القصوى المحلية لكل من التوابع الآتية :

- $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$
- $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$
- $h(x) = 2x^3 - 18x$

الحل

$$h(x) = 2x^3 - 18x \Rightarrow h'(x) = 6x^2 - 18 = 6\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

النقاط الحرجة $x = \pm\sqrt{3}$

تمارين

$$h' = +++ \;\underset{-\sqrt{3}}{|}\; --- \;\underset{\sqrt{3}}{|}\; +++$$

التابع متزايد على المجالين $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ التابع متناقص على المجال $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

القيمة العظمى المحلية $h\left(-\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$ القيمة الصغرى المحلية $h\left(\sqrt{3}\right) = -12\sqrt{3}$

$g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

$$g(x) = x^2\sqrt{5-x} = x^2(5-x)^{1/2} \Rightarrow g'(x) = 2x(5-x)^{1/2} + x^2\left(\tfrac{1}{2}\right)(5-x)^{-1/2}(-1) = \frac{5x(4-x)}{2\sqrt{5-x}}$$

$$g' = --- \;\underset{0}{|}\; +++ \;\underset{4}{|}\; --- \;\underset{5}{)}$$

النقاط الحرجة $x = 0, 4, 5$

التابع متناقص على المجالين $(-\infty, 0)$ $(4, 5)$ التابع متزايد على المجال $(0, 4)$

القيمة العظمى المحلية $g(4) = 16$ القيمة الصغرى المحلية $g(0) = g(5) = 0$ وهي قيم صغرى مطلقة أيضاً

لا يوجد قيم عظمى مطلقة

تمارين

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(3x^2+1) - x^3(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

النقطة الحرجة $x = 0$

$$f' = +++\underset{0}{|}+++$$

التابع متزايد على $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

لا يوجد نقاط قصوى لا محلية ولا مطلقة

3 أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من التوابع الآتية :

- $g(x) = \frac{x-2}{x^2-1}, \quad 0 \leq x < 1$
- $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$
- $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

الحل

$$f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$$

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x$$

النقطة الحرجة $x = 1$

تمارين

$$f' = +++|---]$$ (sign change at 1, end at 2)

$f(1)=1$ $f(2)=0$

القيمة العظمى المحلية والمطلقة $f(1)=1$ القيمة الصغرى المحلية $f(2)=0$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \le x < \infty$$

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \Rightarrow h'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

النقطة الحرجة $x=2$

$$h' = [+++|+++$$ (0, 2)

القيمة الصغرى المحلية والمطلقة $h(0)=0$ لا يوجد قيمة عظمى محلية أو مطلقة

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-1}, \quad 0 \le x < 1$$

$$g'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$$

النقاط الحرجة التي تقع ضمن المجال المعطى هي $x = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$

$$g' = [--- \quad | \quad +++)$$ (0, 0.268, 1)

$$g\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6} \approx 1.866$$

القيمة الصغرى المحلية والمطلقة

القيمة العظمى المحلية $g(0)=2$ لا يوجد قيمة عظمى مطلقة