

التحليل الرياضي ١

ميكاترونيكس

محاضرة 5

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

التقعر ونقاط الانعطاف

تمارين

1 أوجد إحداثيات القيم القصوى ونقاط الانعطاف لكل من التوابع الآتية:

• $y = x^3 - 3x + 3$

• $y = x(6 - 2x)^2$

• $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

2 أوجد قيم كل من الثوابت a, b, c حتى يكون للتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx$ قيمة عظمى محلية في $x = 3$ وقيمة صغرى محلية في $x = -1$ ونقطة انعطاف في $(1, 11)$.

تمارين

1 أوجد إحداثيات القيم القصوى ونقاط الانعطاف لكل من التوابع الآتية:

• $y = x^3 - 3x + 3$

• $y = x(6 - 2x)^2$

• $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

الحل

$y = x^3 - 3x + 3$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

النقاط الحرجة هي $x = 1$ و $x = -1$

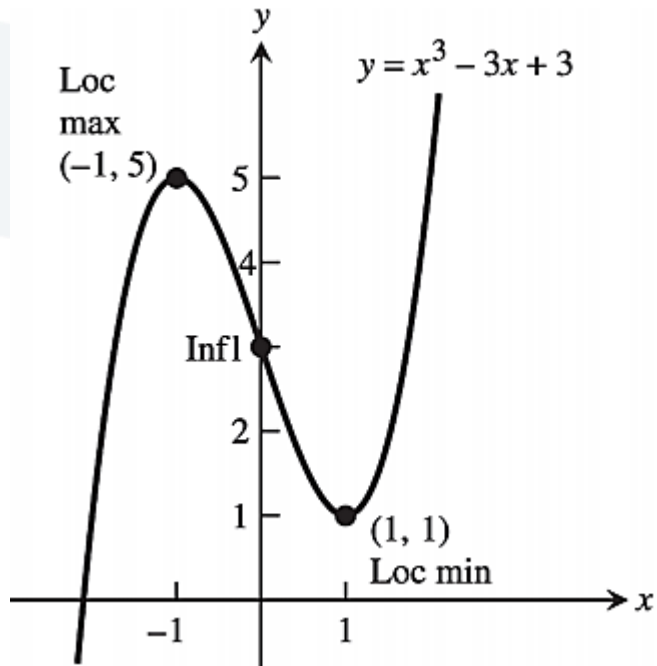
نوجد المشتق الثاني

$y'' = 6x$

$(1,1)$	$(-1,5)$	النقطة
$y''(1) > 0$	$y''(-1) < 0$	إشارة المشتق الثاني
نقطة قيمة صغرى محلياً	نقطة قيمة عظمى محلياً	النتيجة

نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 0$

تمارين



$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$	المجال
$x = -1$	$x = 1$	نقطة اختبار
$y''(-1) < 0$	$y''(1) > 0$	إشارة المشتق الثاني
مقعر نحو الأسفل	مقعر نحو الأعلى	النتيجة

نقطة الانعطاف هي $(0, 3)$

النقاط الحرجة هي $x = 3$ و $x = 1$

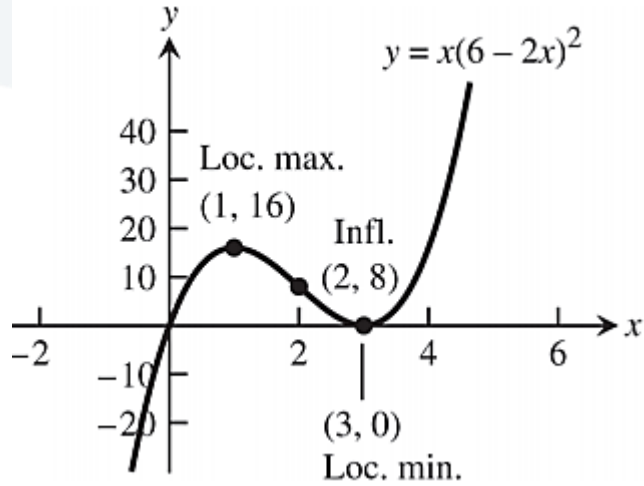
نوجد المشتق الثاني $y'' = -12(3 - x) - 12(1 - x) = 24(x - 2)$

$$y = x(6 - 2x)^2$$

$$y' = -4x(6 - 2x) + (6 - 2x)^2 = 12(3 - x)(1 - x)$$

$(3, 0)$	$(1, 16)$	النقطة
$y''(3) > 0$	$y''(1) < 0$	إشارة المشتق الثاني
نقطة قيمة صغرى محلياً	نقطة قيمة عظمى محلياً	النتيجة

تمارين



نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 2$

$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$	المجال
$x = -1$	$x = 3$	نقطة اختبار
$y''(-1) < 0$	$y''(3) > 0$	إشارة المشتق الثاني
مقعر نحو الأسفل	مقعر نحو الأعلى	النتيجة

نقطة الانعطاف هي $(2, 8)$

النقاط الحرجة هي $x = 2$ و $x = 0$

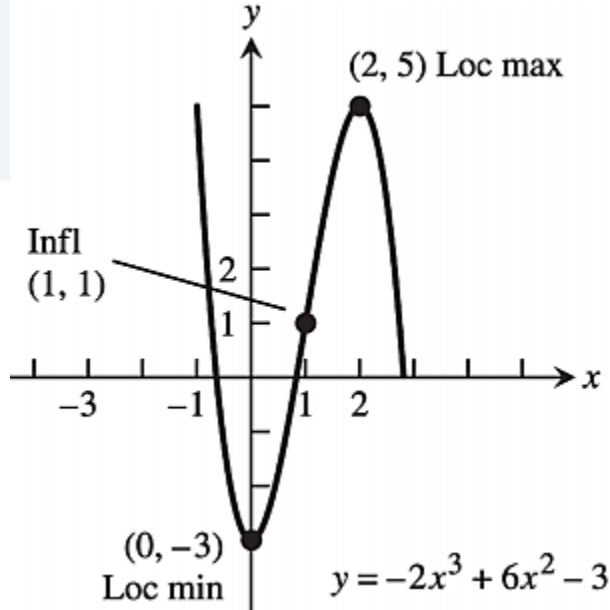
نوجد المشتق الثاني $y'' = -12x + 12 = -12(x - 1)$

$$y = -2x^3 + 6x^2 - 3$$

$$y' = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$$

$(2, 5)$	$(0, -3)$	النقطة
$y''(2) < 0$	$y''(0) > 0$	إشارة المشتق الثاني
نقطة قيمة عظمى محلياً	نقطة قيمة صغرى محلياً	النتيجة

تمارين



نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 1$

المجال	$-\infty < x < 1$	$1 < x < \infty$
نقطة اختبار	$x = 0$	$x = 3$
إشارة المشتق الثاني	$y''(0) > 0$	$y''(3) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

نقطة الانعطاف هي $(1, 1)$

2 أوجد قيم كل من الثوابت a, b, c حتى يكون للتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx$ قيمة عظمى محلية في $x = 3$ وقيمة صغرى محلية في $x = -1$ ونقطة انعطاف في $(1, 11)$.

الحل

$$y = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad y'' = 6ax + 2b$$

تمارين

للتابع قيمة عظمى محلية في $x = 3$

$$\Rightarrow 3a(3)^2 + 2b(3) + c = 0 \Rightarrow 27a + 6b + c = 0$$

للتابع قيمة صغرى محلية في $x = -1$

$$\Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

للتابع نقطة انعطاف في $(1, 11)$

$$\Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = 11 \Rightarrow a + b + c = 11 \quad 6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0.$$

بحل جملة المعادلات الجبرية الخطية الآتية

$$27a + 6b + c = 0$$

$$3a - 2b + c = 0$$

$$a + b + c = 11$$

$$6a + 2b = 0$$

نحصل على $a = -1, b = 3, c = 9$ ، وبالتالي يكون التابع $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$