المحاضرة الثامنة

التصميم و التصنيع بمساعدة الحاسب

جامعة المنارة

MANARA UNIVERSITY

طريقة العناصر المنتهية (FEM) Finite Element Method

هناك العديد من التطبيقات لطريقة العناصر المنتهية، وأغلبها تتعلق بالهندسة الميكانيكية حيث تستخدم هذه الطريقة ضمن عملية تصميم وتطوير المنتجات المختلفة

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الجسم المدروس الى مجموعة من العناصر المتناهية في الصغر Elements متصلة مع بعضها البعض بعقد Nodes

تقوم بعض برامج حساب العناصر المنتهية الحديثة بدراسة وحساب الاجهادات والانفعالات والتشوهات و الحرارة، المغناطيسية الكهربائية وتدفق السوائل.....، ونتبع الخطوات التالية لحل مسألة باستخدام طريقة العناصر المنتهية:

1- تعريف مقتضيات الحساب باستخدام (FEM):

وهي خطوة أساسية خلال الدراسة حيث يشكل النموذج المستخدم في الحسابات تمثيلاً مبسطاً للحقيقة الفيزيائية، ويجب أن يعبر بشكل صحيح عن الحالة الخاصة لسلوك الإنشاء المدروس حيث لا يوجد نموذج عام قادر على التعبير عن جميع قوانين السلوك الميكانيكي للمواد.

2-النمذجة Molding:

تسمح هذه الخطوة بالتحول من المسألة الحقيقية (الإنشاء في محيط العمل أو في ظروف الاستخدام) إلى النموذج الافتراضي المناسب لإجراء النمذجة العددية المستخدمة، ويجب لتوصيف النموذج العددي المستخدم القيام بالخطوتين التاليتين:

1- إنشاء النموذج الميكانيكي (mechanical model)

ويجمع هذا النموذج كل المعلومات الخاصة بالتوصيف الميكانيكي والهندسي والتقني للمسألة المدروسة، ويشمل:

- توصيف نوع التحليل Analysis type: ستاتيك، ديناميك، دراسة غير خطية .... وفيما إذا كان يمكن تمثيل سلوك الإنشاء بجائز، صفيحة، مسألة مستوية ثنائية البعد، مسألة حجمية ثلاثية البعد ...
- توصيف الشكل الهندسي للإنشاء Geometric molding: ويجب أن يتوافق ذلك مع نوع سلوك المادة المستخدم.
- توصيف علاقة الإنشاء المدروس بالوسط المحيط به، ويمثل ذلك بالشروط الحدية Boundary conditions بما فيها نقاط الاستناد والحمولات المؤثرة.
- توصيف مادة الإنشاء Material properties كتابع للخواص الميكانيكية للمادة (معامل يونغ، معامل بواسون، حد الخضوع، الكتلة الحجمية،...)، وبمعنى آخر جميع المقادير الضرورية لتوصيف السلوك الميكانيكي للمادة. وتتطلب هذه التوصيفات المختلفة استخدام العديد من الفرضيات.

2- نموذج التحليل بطريقة العناصر المنتهية FEM:

ويجب أن يتوافق النموذج الميكانيكي المستخدم مع العناصر المنتهية المستخدمة في الحساب، وكذلك البرنامج المستخدم، ويشمل هذا النموذج توصيف عدد معين من البارمترات الخاصة بالطريقة المستخدمة في الحساب FEM، وألغوريتمات الحل المستخدمة، ويشمل هذا النموذج:

- تعريف مخطط التشبيك وهذا يعني نوع العناصر المنتهية المستخدمة، وطريقة توزيعها على الإنشاء المدروس (Meshing Element type).
- ويمكن أن يشمل هذا النموذج أيضاً بارمترات آخرى تتعلق بألغوريتمات التكامل العددي (مثلاً عدد نقاط Gauss)، أو طرق حل معادلات التوازن (اختبار الطريقة العددية للحل، بارمترات القيادة، الألغوريتم المستخدم في الحساب غير الخطي،...)، ويرتبط نموذج العناصر المنتهية بشكل مباشر بمعايير الدقة، وكلفة الحساب.

3- حل المسألة (Solution):

إذا تم اختيار النموذج الميكانيكي، ونموذج التحليل بشكل دقيق فلا حاجة في هذه المرحلة للتدخل البشري كثيراً، ولكن عندما تظهر مشاكل الحل فهي ترتبط بشكل عام بعدة أخطاء منها:

- أخطاء النمذجة الميكانيكية: مثل غياب جزئي للشروط الحدية الموافقة للإزاحات، أو نسيان أحد البارمترات ....
- أخطاء النمذجة العددية: مثل استخدام عناصر منتهية ملتوية لاتحقق الشروط الهندسية المطلوبة أو اختيار سيئ لبارمترات الطريقة العددية....

وتشمل خطوات الحل مايلي:

- إنشاء المصفوفات والمتجهات العنصرية: مصفوفة الصلابة، مصفوفة الكتلة، مصفوفة التخامد، متجه القوى العقدية المكافئ للحمولات الخارجية المطبقة ....
- تجميع المصفوفات والمتجهات العنصرية للحصول على المصفوفات والمتجهات الإجمالية ليتم حساب الإزاحات العقدية.
- حساب الانفعالات والاجهادات.

4- إظهار وتحليل النتائج:

يحسب البرنامج الإزاحة في جميع عقد نموذج التحليل (حقل الإزاحة هو حقل عقدي)، وكذلك يحسب مركبات الانفعالات والاجهادات في جميع عناصر نموذج التحليل (حقول الاجهادات والانفعالات هي حقول عنصرية)، كما يمكن وبشكل عام الحصول على معلومات أخرى مثل الإجهادات والانفعالات الرئيسية والاتجاهات الموافقة لها، والاجهادات المكافئة Von Mises Stress و Deformation و Displacement و Stress Principal

ويمكن أيضاً حساب مقادير أخرى مثل ردود أفعال المساند والانفعالات اللدنة ونماذج التحنيب أو نماذج الاهتراء .... ويتم الاختيار من بين جميع هذه المقادير تلك التي تسمح بالإجابة وبشكل أفضل عن المسألة المطروحة.

المعادلة العامة لنظرية العناصر المنتهية

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

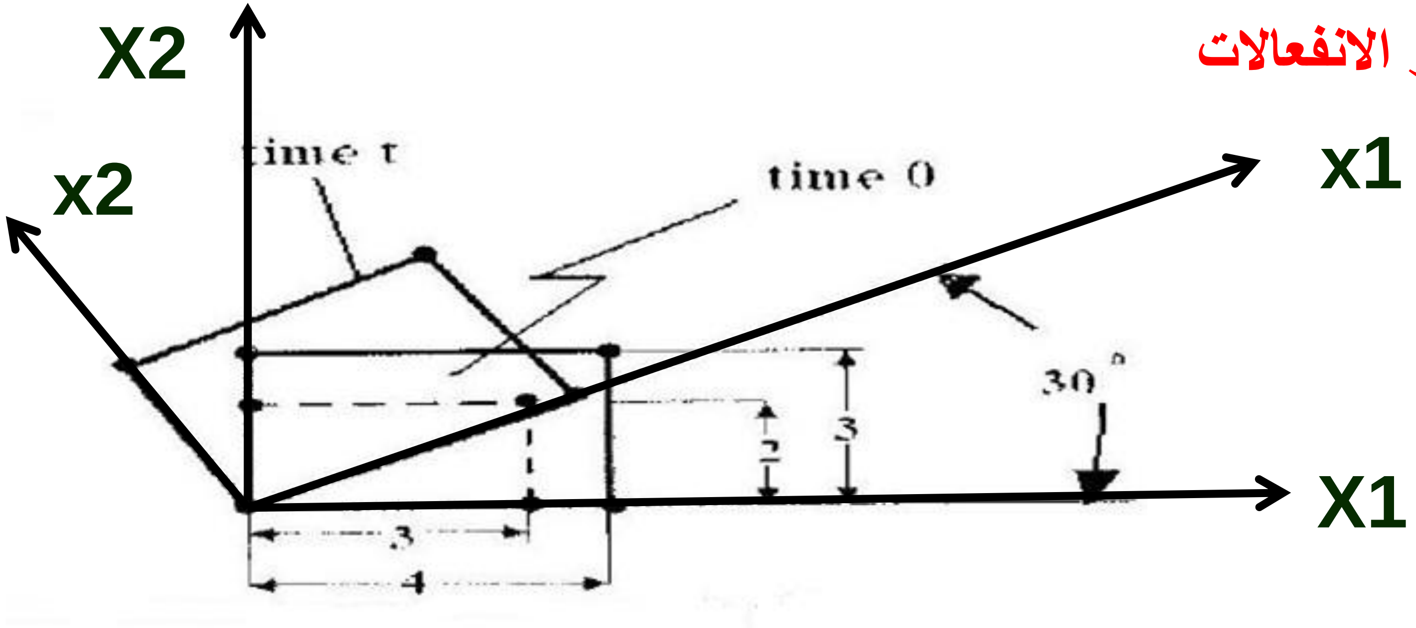
حيث F مصفوفة القوى في العقد

حيث k مصفوفة الصلابة

حيث U مصفوفة الإزاحة في العقد

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F1X \\ F1Y \\ F1Z \\ \cdot \\ \cdot \\ FnX \\ FnY \\ FnZ \end{Bmatrix} \qquad \{U\} = \begin{Bmatrix} U1X \\ U1Y \\ U1Z \\ \cdot \\ \cdot \\ UnX \\ UnY \\ UnZ \end{Bmatrix}$$

وصف التشوهات و الانفعالات



تحديد موتر الدوران R

$$R = \begin{bmatrix} \cos_{x1}^{X1} & \cos_{x2}^{X1} \\ \cos_{x1}^{X2} & \cos_{x2}^{X2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

موتر الإزاحة الناشئ عن التشوه في الزمن t

$$U=\begin{bmatrix}\frac{\partial x1}{\partial X1} & \frac{\partial x1}{\partial X2}\\ \frac{\partial x2}{\partial X1} & \frac{\partial x2}{\partial X2}\end{bmatrix}=$$

في مثالنا السابق

$$\left.\begin{aligned}x1&=X1+u1=X1+\frac{1}{3}X1=1.333X1\\ x2&=X2+u2=X2+\frac{1}{2}X2=1.5X2\\ x3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x1}{\partial X1}&=\frac{\partial(1.333X1)}{\partial X1}=1.333\\ \frac{\partial x1}{\partial X2}&=0.0\\ \frac{\partial x2}{\partial X1}&=0.0\\ \frac{\partial x2}{\partial X2}&=\frac{\partial(1.5X2)}{\partial X2}=1.500\end{aligned}\right.$$

موتر التحويل F:

$$F = RU$$

موتر كوشي – غرين B : C:

اليميني

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = F^T F$$

اليساري

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = F F^T$$

موتر الانفعال غرين – لاغرانج

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(C - I)$$

ملاحظة

الجسم يسلك سلوك الجسم الجاسئ اذا كان موتور موشي غرين C متجانس وقطري
او اذا اكان C= B= I و موتور غرين لاغرانج 0 = ε

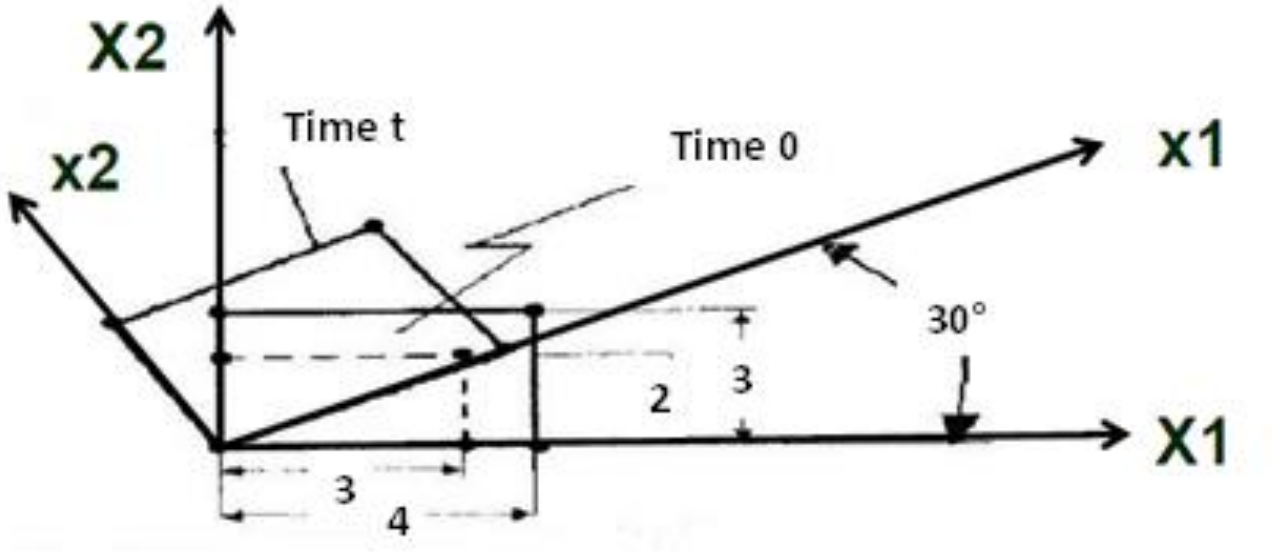
بفرض أن ρ_t, ρ_0 الكتلة الحجمية للجسم في الحالة الابتدائية غير المشوهه و الحالة المشوه على الترتيب. وبالتالي يمكن كتابة:

$$J = \frac{\rho_0}{\rho_t} = \det F$$

اذا لكتلة الحجمية في الحالة المشوهه للجسم أصغر بكثير منها في الحالة غير المشوهه $(\rho_0 \succ \rho_t)$ وبالتالي فأن هناك تغير كبير في الخصائص الميكانيكة للجسم نتيجة للتشوه و التحليل الواجب إتباعه يجب أن يكون تحليل غير خطي ديناميكي حصراً.

يتعرض الجسم المبين في الشكل إلى تشوه حقيقي مسببا في دورانه بزاوية ٣٠ درجة خلال الزمن t (الوضع المشوه) و المطلوب :

- حساب موتر غرين - لاغرانج (Green-Lagrange Tensor) الذي يصف تشوه هذا الجسم.
- هل يسلك هذا الجسم سلوك الجسم الجاسئ (Rigide Body) مع التعليل؟
- مانوع التحليل العددي الواجب اتباعه في دراسة تشوه هذا الجسم مع التعليل؟



الطلب الاول:

تحديد موتر الدوران R :

$$R = \begin{bmatrix} \cos_{x1}^{X1} & \cos_{x2}^{X1} \\ \cos_{x1}^{X2} & \cos_{x2}^{X2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 \\ 0.500 & 0.866 \end{bmatrix}$$

تحديد موتر الإزاحة U :

$$\left.\begin{aligned} x1 &= X1 + u1 = X1 + \frac{1}{3}X1 = 1.333X1 \\ x2 &= X2 + u2 = X2 + \frac{1}{2}X2 = 1.5X2 \\ x3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x1}{\partial X1} &= \frac{\partial(1.333X1)}{\partial X1} = 1.333 \\ \frac{\partial x1}{\partial X2} &= 0.0 \\ \frac{\partial x2}{\partial X1} &= 0.0 \\ \frac{\partial x2}{\partial X2} &= \frac{\partial(1.5X2)}{\partial X2} = 1.500 \end{aligned}\right.$$

وبالتالي موتر الإزاحة الناشئ عن التشوه في الزمن t :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial x1}{\partial X1} & \frac{\partial x1}{\partial X2} \\ \frac{\partial x2}{\partial X1} & \frac{\partial x2}{\partial X2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33 & \\ 0.0 & 1.500 \end{bmatrix}$$

حساب موتر التحويل F:

$$F = RU = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 \\ 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.333 & 0.0 \\ 0.0 & 1.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}$$

حساب موتر كوشي – غرين C ; B:

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=F^TF=\begin{bmatrix} 1.154 & 0.667 \\ -0.750 & 1.299 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.7766 & 0.000933 \\ 0.000933 & 2.249910 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=FF^T=\begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.154 & 0.667 \\ -0.750 & 1.299 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.894216 & -0.20453 \\ -0.204532 & 2.13229 \end{bmatrix}$$

تحديد موتر – لاغرانج:

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}(C-I)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1.7766 & 0.000933 \\ 0.000933 & 2.249910 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \frac{0.7766}{2} & 0.000933 \\ 0.000933 & \frac{1.249910}{2} \end{bmatrix}$$

الطلب الثاني:

الجسم لا يسلك سلوك الجسم الجاسئ لأن موتر كوشي غرين C غير متجانس وليس قطري.

أو

لأن: $\varepsilon \neq 0$. $C \neq B \neq 1$

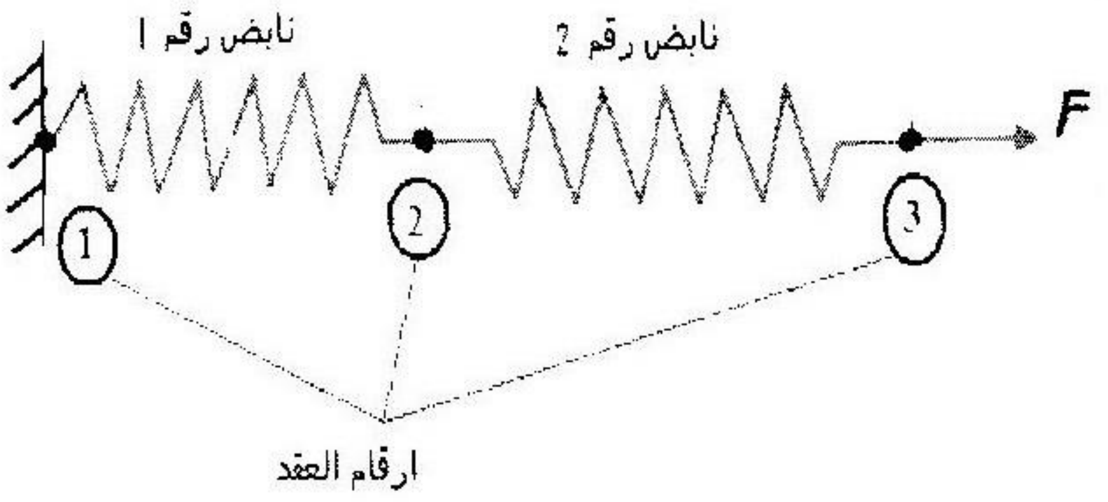
الطلب الثالث:

بفرض أن $\rho_t \cdot \rho_0$ الكتلة الحجمية للجسم في الحالة الابتدائية غير المشوهه والحالة المشوه على الترتيب. وبالتالي يمكن كتابة:

$$J = \quad \rho_t \qquad F=\det\begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix} \quad 1.5$$

إن الكتلة الحجمية في الحالة المشوهه للجسم أصغر بكثير منها في الحالة غير المشوهه $(\rho_0 \succ \rho_t)$ وبالتالي فأن هناك تغير كبير في الخصائص الميكانيكة للجسم نتيجة للتشوه والتحليل الواجب إتباعه يجب أن يكون تحليل غير خطي ديناميكي حصراً.

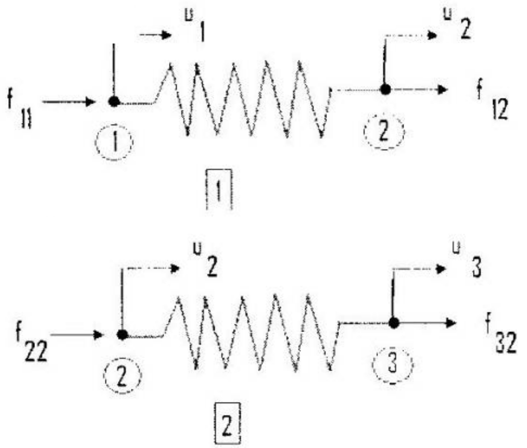
يبين الشكل مخطط الجسم الحر لنابضين متصلين مع بعض. حيث ان النابض رقم ١ مثبت في العقدة رقم ١ و النابض رقم ٢ يتعرض لتأثير قوة خارجية مقدارها F في العقدة رقم ٣ . بالاعتماد على طريقة العناصر المنتهية (Finite Elements Method) أثبت أن المعادلة العامة لهذا النظام الميكانيكي تعطى وفق الصيغة التالية : [K]{U}={F} حيث أن {U} مصفوفة الإزاحات في العقد



يمكن تحديد مجموع القوى الداخلية في كل عقدة على النحو التالي:

للعنصر الأول (النابض رقم 1):

$$k_1u_1 - k_1u_2 = f_{11}$$
$$-k_1u_1 + k_1u_2 = f_{21}$$



للعنصر الثاني (النابض رقم 2):

$$k_2u_2 - k_2u_3 = f_{22}$$
$$-k_2u_2 + k_2u_3 = f_{32}$$

وبالتالي على شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix}$$

*

أن القوى في المعادلة السابقة هي قوى داخلية عاملة على العقد. وبالتالي من أجل تحقيق شرط التوازن فان مجموع القوى الداخلية يجب أن تساوي للقوى الخارجية المطبقة على العقد. بفرض أن F_i تمثل القوة الخارجية عند كل عقدة (i : رقم العقدة) وبالتالي:

at node 1: $f_{11} = F_1$

at node 2: $f_{21} + f_{22} = F_2$

at node 3: $f_{32} = F_3$

وبالتالي فأن المصفوفة * تكتب على الشكل:

$$k_1u_1 - k_1u_2 = F_1$$
$$-k_1u_1 + (k_1 + k_2)u_2 - k_2u_3 = F_2$$
$$-k_2u_2 + k_2u_3 = F_3$$

أو على شكل مصفوفة يمكن أن تكتب العلاقة السابقة على الشكل :

$$[K]\{U\} = \{F\} \Leftarrow \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$