تحكم لا خطي

المحاضرة الرابعة (عملي)

نظرية توقيع الأقطاب والتغذية العكسية بمتغيرات الحالة

م. زينة أديب علي

قسم الروبوت سنة رابعة-فصل أول

الغاية من الجلسة:

1. التعريف بنظرية توقيع الأقطاب عن طريق التغذية العكسية بمتغيرات الحالة.
2. تصميم نظام تحكم لتحقيق المواصفات المرغوبة للاستجابة الزمنية عن طريق التغذية العكسية بمتغيرات الحالة.

مقدمة:

يهدف التحكم بالتغذية العكسية لمتغيرات الحالة لتحقيق خرج معين بمواصفات مقبولة دون تجاوز متغيرات الحالة لحدود معينة تضمن تشغيل متزن وآمن للنظام.

إذا كان النظام قابلاً للتحكم وجميع متغيرات الحالة متوفرة للتغذية العكسية يمكن عندها اختيار كسب التغذية العكسية لوضع أقطاب المسار المغلق (القيم المميزة) في مكان مختار في المستوي المركب مما يعطي للمصمم حرية في تحديد مواصفات الاستجابة العابرة للنظام.

يتم تمثيل أي نظام في فراغ الحالة، كما هو موضح في الشكل (12)، وذلك بكتابته على الشكل

$$x' = A * x + B * u$$

$$y = C * x + D * u$$

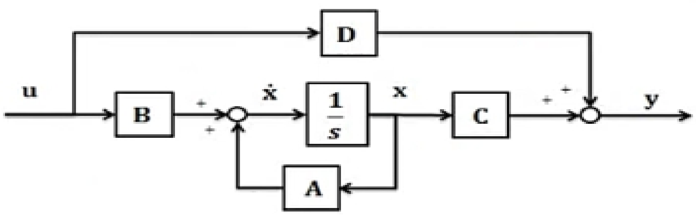
حيث:

x متغيرات الحالة

x' مشتق متغيرات الحالة

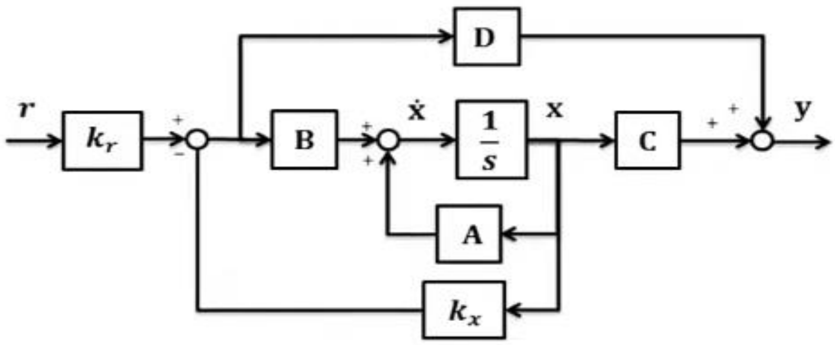
u الدخل.

y الخرج.



تدل مواقع أقطاب النظام على استقرار النظام وتحدد مواصفات الاستجابة الزمنية له، وباستخدام نظرية توقيع الأقطاب نستطيع تغيير مواقع أقطاب النظام إلى أي موقع نريده لتحقيق المواصفات المرغوبة للاستجابة الزمنية وذلك

عن طريق التغذية العكسية بمتغيرات الحالة، وذلك بشرط أن يكون النظام قابلاً للتحكم بالحالة حيث يصبح النظام بعد التغذية العكسية بمتغيرات الحالة كما هو موضح في الشكل.



ويصبح تمثيل النظام في فراغ الحالة كما هو موضح في المعادلتين.

$$x' = (A - B * k_x) * x + B * k_r * r$$
$$y = C * x + D * u$$

حيث:

k_x ربح التغذية العكسية لمتغيرات الحالة، ويتم اختيار قيمها بالاعتماد على قيم الأقطاب المرغوبة.

k_r ربح التغذية الأمامية ويستخدم من أجل القضاء على الخطأ عند الاستقرار أو التقليل منه قدر الإمكان

- حيث كما نلاحظ أن المصفوفة (A) قد تغيرت بعد التغذية العكسية بالحالة (في المصفوفة (A) توجد ديناميكيات النظام) وبالتالي فإنه بالاختيار المناسب لقيم (k) نستطيع اختيار المواصفات المرغوبة للاستجابة الزمنية.
- إن طريقة توقيع الأقطاب تفيد في الوصول إلى المواصفات المطلوبة للاستجابة الزمنية العابرة ولكن من سيئاتها هي وجود الخطأ عند الاستقرار، ويتم تصحيح الخطأ باتباع إحدى الطريقتين:

1. ضرب الإشارة المرجعية بثابت k_r ويعطى بالعلاقة:

$$k_r = \frac{1}{k_{dc}}$$

حيث:

k_{dc} القيمة النهائية للاستجابة الزمنية.

2. استخدام الفعل التكاملي (يشبه استخدام المتحكم التكاملي في المتحكم pid).

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال1:

لدينا نظام ممثل في فراغ الحالة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

صمم تغذية عكسية بالحالة بحيث نحصل على مواصفات الاستجابة الزمنية التالية:

$$M_p = 20\% \qquad t_s = 2\ sec$$

1. نتأكد ان النظام قابل للتحكم:

$$N = [B:AB]$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون لدينا:

Rank(N)=2 وهو يساوي رتبة النظام وبالتالي فغن النظام قابل للتحكم بالحالة.

2. نوجد الأقطاب المرغوبة:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\varepsilon}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}} = 0.2$$

ومنه يكون لدينا نسبة التخميد $\varepsilon = 0.45$

ومن زمن الاستقرار نقوم بحساب التردد الطبيعي غير المخمد:

$t_s = \frac{4}{\varepsilon * w_n} = 2$ ومنه يكون لدينا:

$$w_n = 4\ rad/sec$$

$$s_{1,2} = -\varepsilon * w_n \pm j w_n \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = -1 \pm j2\sqrt{3}$$

3. نوجد المصفوفة (A) بعد التغذية العكسية بالحالة:

$$A^{\sim} = A - B * k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k_1 & -3-k_2 \end{bmatrix}$$

4. نوجد معادلة المميزات:

$$|\mathrm{sI}-\mathrm{A}| = 0$$

ومنه يكون المحدد: $sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2+k_1 & s+3+k_2 \end{bmatrix}$

ثم نوجد معادلة المميزات من الأقطاب المرغوبة: $s^2 + (3+k_2)s + 2 + k_1 = 0$

$$\left(s+2+j2\sqrt{3}\right) * \left(s+2-j2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$(s+2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$s^2 + 4s + 16 = 0$$

بالمقارنة بين المعادلتين:

$$3 + k_2 = 4$$

$$2 + k_1 = 16$$

ومنه ينتج لدينا:

$k_2 = 1 \quad k_1 = 14$ وهي قيم ربح التغذية العكسية اللازمة لتحقيق المواصفات المرغوبة للاستجابة الزمنية.

بقي لدينا حساب الخطأ عند الاستقرار حيث يمكن حسابه من العلاقة التالية:

$$e(\infty) = 1 + C(A - B * k)^{-1}B$$

$$e(\infty) = 1 + [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -4 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e(\infty) = 1 - \frac{1}{4}$$

حيث يمثل الحد $C(A - B * k)^{-1}B$ القيمة النهائية للاستجابة الزمنية

ومنه ينتج لدينا قيمة الخطأ:

$$e(\infty) = 0.75$$

ولتصحيح الخطأ عند الاستقرار يجب ضرب المصفوفة (B) بثابت هو مقلوب القيمة النهائية للاستجابة الزمنية :

$$k_r = \frac{1}{k_{dc}} = 4$$

بعد الضرب بالثابت تصبح قيمة الخطأ عند الاستقرار:

$$e(\infty) = 1 + C(A - B * k)^{-1}B * k_r$$

$$e(\infty) = 1 + [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -4 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * 4 = 0$$

ويمكن إنجاز ذلك باستخدام (Matlab) كما يلي:

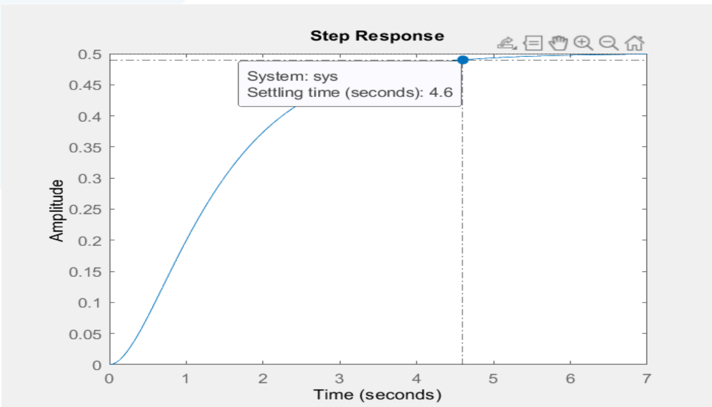
```
A=[0 1;-2 -3];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=[0];
sys=ss(A,B,C,D);
p=[-2+j*2*1.73 -2-j*2*1.73];
n=ctrb(A,B) %controllability matrix
k=place(A,B,p)
```

ومنه ينتج لدينا قيم ربح التغذية العكسية في ماتلاب:

```
K=

1.0000    13.9716
```

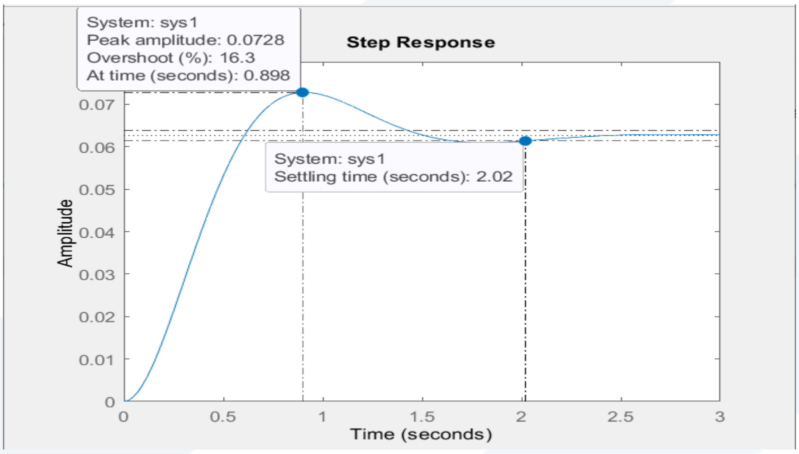
وهي النتيجة التي حصلنا عليها بالحساب الرياضي.



يمثل الشكل أعلاه الاستجابة الزمنية للنظام قبل التغذية العكسية بالحالة.

نقوم بإنجاز التغذية العكسية كما يلي:

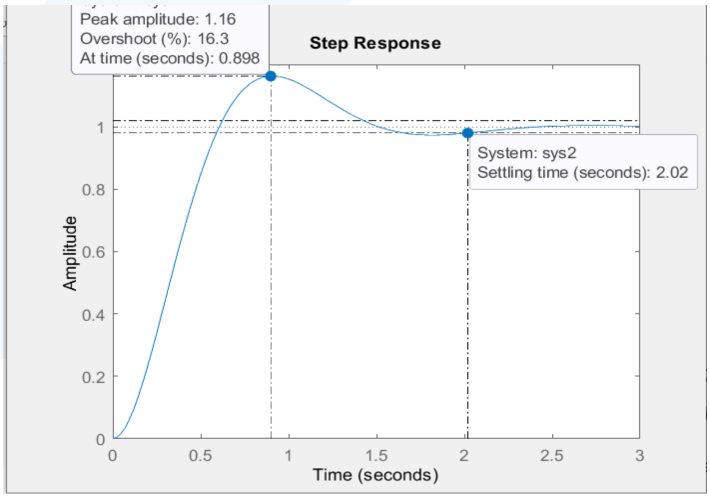
```
Acl=A-B*k;
sys1=ss(Acl,B,C,D);
step(sys1)
```



كما نلاحظ من الشكل تحقق مواصفات الاستجابة الزمنية من زمن استقرار وتجاوز للهدف ولكن يوجد لدينا خطأ عند الاستقرار

نقوم بإزالة الخطأ باستخدام الضرب بثابت:

```
kdc=dcgain(sys1);
kr=1/kdc;
sys2=ss(Acl,kr*B,C,D);
step(sys2)
```



نلاحظ من الشكل أعلاه تحقق مواصفات الاستجابة الزمنية العابرة مع الوصول إلى القيمة المرجعية المرغوبة.

مثال :

لدينا نظام ممثل في فراغ الحالة على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. تصميم تغذية عكسية بالحالة للحصول على الأقطاب المرغوبة عند:

$$s_{1,2} = -\varepsilon * w_n \pm j w_n \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = -1 \pm j2$$

2. قم بتشغيل النظام كمنظم (Regulator) أي لا يوجد لدينا إشارة دخل.

نتأكد ان النظام قابل للتحكم:

$$N = [B\!:AB\!:A^2B]$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$rank(N) = 3$$

رانك المصفوفة يساوي رتبة النظام وبالتالي فإن النظام قابل للتحكم.

1. نوجد المصفوفة (A) بعد التغذية العكسية بالحالة:

$$A^{\sim} = A - B * k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$A^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -4-k_2 & -5-k_3 \end{bmatrix}$$

2. نوجد معادلة المميزات:

$$|\mathrm{sI} - \mathrm{A}| = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & 4+k_2 & s+5+k_3 \end{bmatrix}$$ ومنه يكون المحدد:

ثم نوجد معادلة المميزات من الأقطاب المرغوبة $s^3+(5+k_3)s^2+(4+k_2)s+(k_1)=0$

ونأخذ القطب الثالث عند النقطة (10-) (يؤخذ القطب الثالث بحيث يساوي على الأقل 10 أضعاف القسم الحقيقي للأقطاب العقدية حتى لا يؤثر على المواصفات المرغوبة).

$$(s+1+j2)*(s+1-j2)*(s+10)=0$$

$$((s+1)^2+(2)^2)*(s+10)=0$$

$$s^3+12s^2+25s+50=0$$

بالمقارنة بين المعادلتين:

$$4+k_2=25$$

$$k_1=50$$

$$5+k_3=12$$

$k_2=21 \quad k_1=50 \quad k_3=7$ وهي قيم ربح التغذية العكسية اللازمة لتحقيق المواصفات المرغوبة للاستجابة الزمنية.

بقي لدينا حساب الخطأ عند الاستقرار حيث يمكن حسابه من العلاقة التالية:

$$e(\infty)=1+C(A-B*k)^{-1}B$$

$$e(\infty)=1+[1\quad 0\quad 0]*\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -50 & -25 & -7.4\end{bmatrix}^{-1}*\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$e(\infty)=1-0.02=0.98$$

حيث يمثل الحد $C(A-B*k)^{-1}B$ القيمة النهائية للاستجابة الزمنية

وبالتالي للحصول على خطأ يساوي الصفر نضرب المصفوفة (B) بثابت (1/0.02). عندئذ يصبح الخطأ عند الاستقرار:

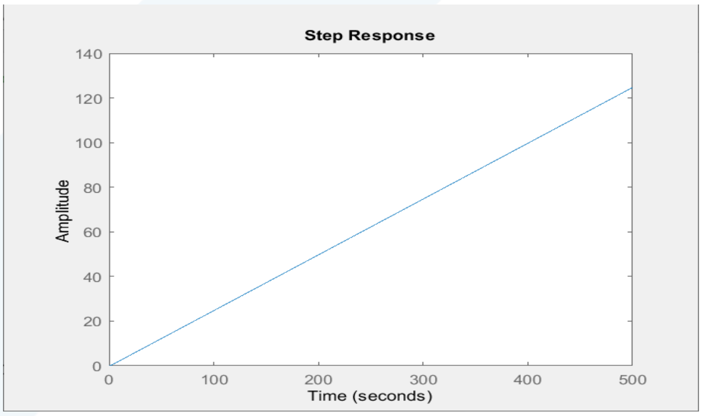
$$e(\infty)=1-0.02*\frac{1}{0.02}=0$$

الحل باستخدام ماتلاب:

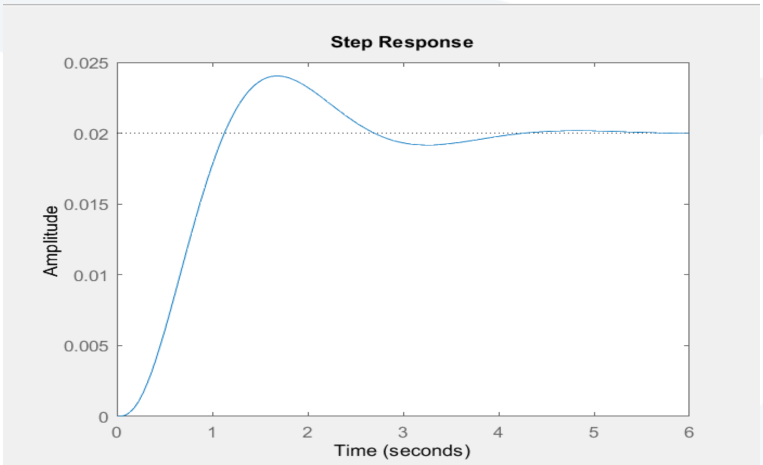
```
A=[0  1 0;0 0 1;0 -4 -5];
B=[0;0;1];
```

```
C=[1 0 0];
D=[0];
sys=ss(A,B,C,D);
p=[-1+j*2 -1-j*2 -10];
n=ctrb(A,B) %controllability matrix
k=place(A,B,p)
figure(1)
step(sys)
Acl=A-B*k;
sys1=ss(Acl,B,C,D);
figure(2)
step(sys1)
kdc=dcgain(sys1);
kr=1/kdc;
sys2=ss(Acl,kr*B,C,D);
figure(3)
step(sys2)
```

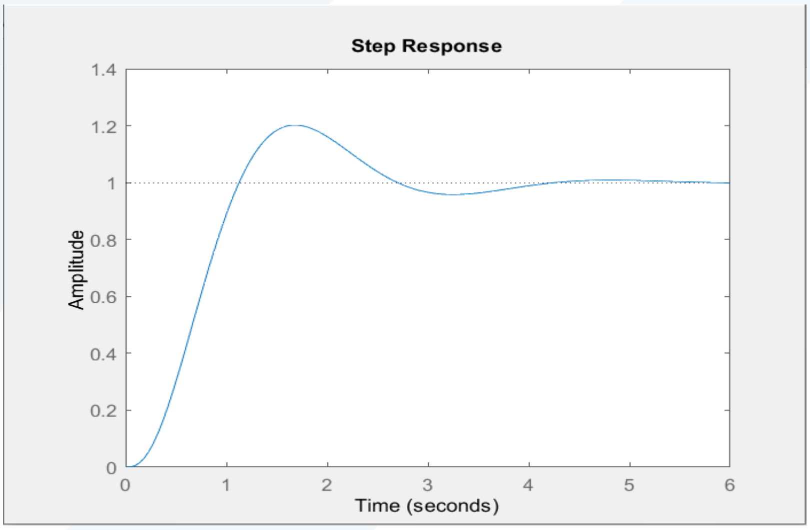
ويكون لدينا الاستجابات الزمنية التالية:



الاستجابة الزمنية للنظام قبل التغذية العكسية بالحالة وهو نظام غير مستقر



الاستجابة الزمنية للنظام بعد التغذية العكسية بالحالة



الاستجابة الزمنية للنظام بعد الضرب بثابت و إلغاء الخطأ عند الاستقرار

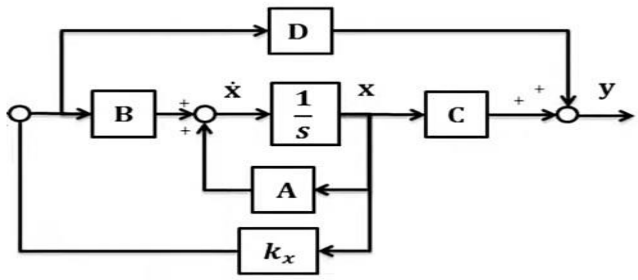
تشغيل النظام كمنظم:

أحياناً يعمل النظام كمنظم فقط (النواس المقلوب أو النواس البسيط)، حيث يكون المطلوب هو الحفاظ على زاوية النواس عند قيمة معينة(المعادلات اللاخطية التي يتم تقريبها إلى خطية حول نقطة توازن معينة تعمل كمنظم).

- عند العمل كمنظم لا يكون لدينا إشارة دخل (u=0).

ويصبح تمثيل النظام في فراغ الحالة على الشكل التالي:

$$x' = (A - B * k_x) * x$$



أي إشارة التحكم هي $u = -k * x$

عند العمل كمنظم تبقى قيم ثوابت التغذية العكسية كماهي (كما نتجت في الحل الرياضي السابق).

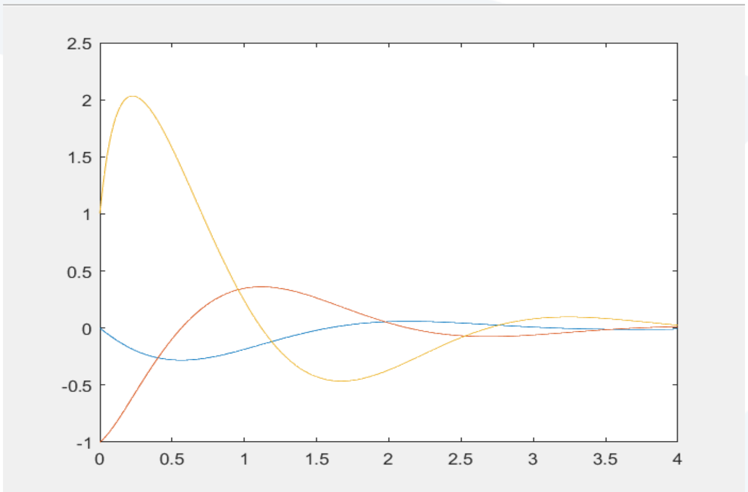
الإنجاز باستخدام ماتلاب:

ننشئ تابع يحتوي على النظام المدروس:

```
function ax=sfcc(t,x)
A=[0 1 0 ;0 0 1;0 -4 -5];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0];
D=[0];
p=[-1+i*2 -1-i*2 -10];
k=place(A,B,p);
u=-k*x;
ax=A*x+B*u;
end
```

ثم نقوم باستدعائه (استدعاء الملف)باستخدام تابع ال (ode45):

```
clc
clear all
close all
x0=[0;-1;1];
t=0:0.01:4;
[t,x]=ode45(@sfcf,t,x0);
plot(t,x)
```



كما نلاحظ أن متغيرات الحالة استقرت على القيمة (0) مهما كانت قيمتها الابتدائية. حتى لو كانت قيمتها الابتدائية صفر وتعرضت لاضطراب ستعود إلى القيمة (0).

k =

   50.0000   21.0000   7.0000

مع قيم ثوابت التغذية العكسية نفسها.