تحكم آلي

المحاضرة السادسة(عملي)

دالة راوث للاستقرار

م. زينة أديب علي

قسم الروبوت -فصل أول

الغاية من الجلسة:

استخدام دالة راوث للاستقرار لدراسة استقرار الأنظمة.

أمثلة:

تفيد دالة راوث في تحديد استقرار الأنظمة (تحدد إذا كان النظام مستقر أم لا) ولاتعطي أية معلومات عن الاستقرار النسبي.

مثال1:

لدينا نظام له معادلة المميزات التالية:

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

والمطلوب: دراسة استقرار النظام باستخدام قاعدة راوث.

الحل:

نلاحظ أن جميع المعاملات موجبة وهو شرط لازم ولكن غير كافي لذلك نطبق دالة راوث:

s^4	1	18	5
s^3	8	16	0
s^2	$16 = \frac{(8)(18)-(1)(16)}{8}$	$5 = \frac{(8)(5)-(1)(0)}{8}$	0
s^1	$\frac{27}{2} = \frac{(16)(16)-(8)(5)}{16}$	0	0
s^0	5	0	0

كما نلاحظ أن جميع حدود العمود الأول موجبة وبالتالي فإن النظام مستقر وجميع حلول معادلة المميزات في الجهة اليسارية من المستوي.

مثال2:

ادرس استقرار النظام التالي:

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$$

s^4	3	5	2	
s^3	$1\cancel{0}$	$\cancel{5}$	0	*divided by* 5
	2	1	0	
s^2	$\frac{7}{2}=\frac{(2)(5)-(3)(1)}{2}$	$2=\frac{(2)(2)-(3)(0)}{2}$	0	
s^1	$-\frac{1}{7}=\frac{(7/2)(1)-(1)(1)}{7/2}$	0	0	
s^0	2	0	0	

نلاحظ وجود إشارة سالبة في العمود الأول، وبالتالي فإن النظام غير مستقر، ويوجد لدينا تغيران في الإشارة أي يوجد لدينا حلان من حلول المعادلة في الجهة اليمينية من المستوي.

مثال3:

ادرس استقرار النظام التالي:

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9 = 0$$

الحل:

s^5	1	2	6	
s^4	$\cancel{3}$	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	*divide by* 3
	1	2	3	
s^3	$\cancel{0}$	3	0	*replace* 0 *by* ε
	ε	3	0	
s^2	$\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$	3	0	
s^1	$3-\frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon-3}$	0	0	
s^0	3	0	0	

عند ظهور عنصر يساوي الصفر نستبدله بعنصر صغير جداً موجب ونكمل الدالة.

نلاحظ أن الحد $\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$ هو حد سالب وبالتالي فإن النظام غير مستقر، ويوجد لدينا تغيران في الإشارة في العمود الأول وبالتالي يوجد لدنيا قطبان في الجهة اليمينة من المستوي. أما باقي الأقطاب لا توجد جميعها في الجهة اليسارية، حيث إنه بمجرد ظهور عنصر يساوي الصفر في العمود الأول فهذا يعني وجود قطبين مترافقين على المحور التخيلي. وبالتالي أصبح لدينا قطبان على المحور التخيلي وقطبان في الجهة اليمينية من المستوي والقطب المتبقي يكون في الجهة اليسارية.

مثال4:

ادرس استقرار النظام التالي:

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

الحل:

نطبق دالة راوث:

s^6	1	8	20	16	
s^5	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	$\cancel{0}$	*divide by* 2
	1	6	8	0	
s^4	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	0	*divide by* 2
	1	6	8	0	
s^3	0	0	0	0	

نلاحظ ظهور سطر صفري، لذلك نقوم بتشكيل المعادلة المساعدة من السطر الذي يسبق السطر الصفري:

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

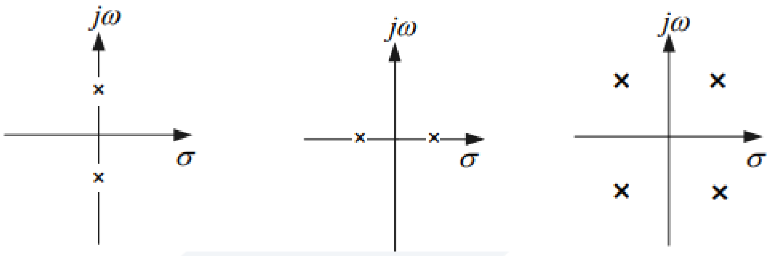
ثم نشتق:

$$4s^3 + 12s = 0$$

توضع أمثال المعادلة أماكن الأصفار ونكمل الدالة:

s^6	1	8	20	16	
s^5	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	$\cancel{0}$	*divide by* 2
	1	6	8	0	
s^4	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	0	*divide by* 2
	1	6	8	0	
s^3	0	0	0	0	
	$\cancel{4}$	$1\cancel{2}$	0	0	$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$
	1	3	0	0	*divide by* 4
s^2	3	8	0	0	
s^1	1/3	0	0	0	
s^0	8	0	0	0	

نلاحظ ان عناصر العمود الأول موجبة وبالتالي لا يوجد لدينا جذر للمعادلة في الجهة اليمينية ولكن لم نحدد بعد استقرار النظام لأن ظهور سطر صفري يعني وجود زوجين مترافقين من الأقطاب:



أي أن الأقطاب الأربعة تكون متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي والتخيلي، لإيجاد هذه الحلول نقوم بحل المعادلة المساعدة:

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

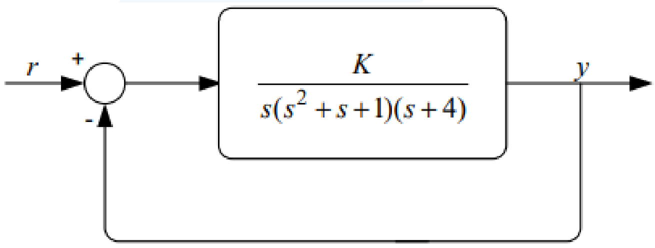
ينتج لدينا الحلول التالية:

$$s_{1,2} = \pm \mathrm{j} \quad s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$$

أي لدينا أربع حلول مترافقة على المحور الشاقولي وبالتالي فإن النظام على حد الاستقرار.

مثال:

لدينا النظام الموضح في الشكل التالي:



والمطلوب:

1. حدد قيمة (k) حتى يكون النظام مستقراً.
2. حدد قيمة (k) حتى يكون النظام على حد الاستقرار وحدد تردد الاهتزاز.

الحل:

نوجد معادلة المميزات للنظام وهي مقام دالة التحويل الشاملة:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + k = 0$$

نطبق دالة راوث:

s^4	1	5	K
s^3	5	4	
s^2	$21/5$	K	
s^1	$(84/5-5K)/(21/5)$		
s^0	K		

حتى يكون النظام مستقراً يجب أن تكون حدود العمود الأول موجبة:

$\frac{84}{5} - 5k > 0$ $k > 0$ وبالتالي:

$0 < k < \frac{84}{25}$ يكون النظام مستقراً.

$k = \frac{84}{25}$ النظام على حد الاستقرار.

$k > \frac{84}{25}$ النظام غير مستقر.

الطلب الثاني:

لإيجاد تردد الاهتزاز نشكل المعادلة المساعدة:

$$\frac{21}{5}s^2 + \frac{84}{5} = 0$$

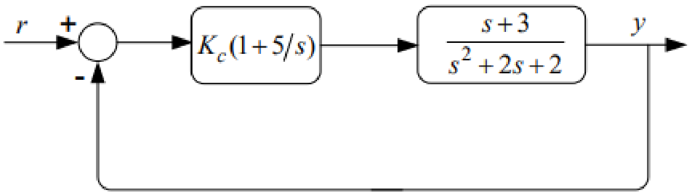
بحل المعادلة ينتج لدينا:

$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{4}{5}}$ وبالتالي يكون تردد الاهتزاز:

$$w_0 = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad rad/sec$$

مثال2:

لدينا النظام الموضح في الشكل التالي:



والمطلوب:

حدد قيمة (k) حتى تقع جميع أقطاب النظام (حلول معادلة المميزات) على يسار المحور المار بالنقطة (-2).

الحل:

نوجد معادلة المميزات للنظام وهي مقام دالة التحويل الشاملة:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$s^3 + (2 + k_c)s^2 + (2 + 8k_c)s + 15k_c = 0$$

نقوم بتعويض:

$$s = s - 2$$

$$(s-2)^3 + (2 + k_c)(s-2)^2 + (2 + 8k)(s-2) + 15k = 0$$

$$s^3 + (k - 4)s^2 + (4k_c + 6)s + (3k_c - 4) = 0$$

بتطبيق دالة راوث للاستقرار:

$\hat{s}^3$	1	$4K_c + 6$
$\hat{s}^2$	$K_c - 4$	$3K_c - 4$
$\hat{s}^1$	$\dfrac{4K_c^2 - 13K_c - 20}{K_c - 4}$	
$\hat{s}^0$	$3K_c - 4$	

يجب ان تكون عناصر العمود الأول موجبة:

$$k_c - 4 > 0 \quad 3k_c - 4 > 0$$

وبالتالي يجب ان يكون: $k_c > 4$ حتى يكون كلا العنصرين موجباً.

بقي فقط التحقق من إشارة الحد:

$$4k_c^2 - 13k_c - 20 > 0$$

حلول المعادلة هي :

$$k_1 = -1.1392 \quad k_2 = 4.3892$$

الحل السالب مرفوض لأن (k) موجبة وهنا تحديداً أكبر من (4):

k_c	4	4.389	∞
$4k_c^2 - 13k_c - 20$	-8	0	∞

كما نلاحظ من دراسة تغيرات الإشارة أن الحد المدروس سيكون موجباً إذا كانت $k_c > 4.389$

وهذا هو شرط وقوع جميع حلول المعادلة على يسار المحور المار بالنقطة (2-) لضمان اتزان نسبي مقبول،

حيث إنه كلما ابتعدت حلول المعادلة عن المحور التخيلي يزداد استقرار النظام.