جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

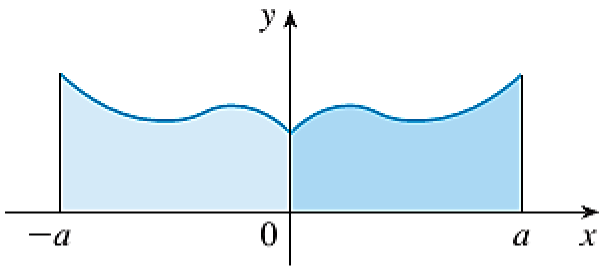
المحاضرة 7 ميكاترونيكس

نظري

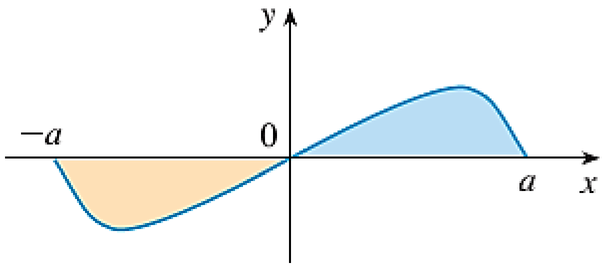
Prepared by
Dr. Sami INJROU

تكامل التوابع الفردية والزوجية

ليكن التابع f قابل للمكاملة على المجال $[-a, a]$



1. إذا كان التابع زوجي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



2. إذا كان التابع فردي عندئذ: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx$

الحل

التابع المكامل زوجي

$$f(-x)=(-x)^6+1=x^6+1=f(x)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx=2\int_{0}^{2}(x^6+1)dx=2\left[\frac{1}{7}x^7+x\right]_0^2=\frac{284}{7}$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$

الحل

التابع المكامل فردي

$$f(-x)=\frac{\tan(-x)}{1+(-x)^2+(-x)^4}=\frac{-\tan(x)}{1+x^2+x^4}=-f(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx=0$$

التكامل بالتجزئة

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

الحالة ١: حالة تكامل ذو حد واحد

نختار دوماً $f(x)$ التابع المكامل، و $g'(x)=1$.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \ln x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= x \end{aligned}\right\}$$

$$\int \ln x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \tan^{-1} x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tan^{-1} x \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ g(x) &= x \end{aligned}\right.$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

الحالة ٢: حالة تكامل جداء كثيرة حدود بتابع أوسي أو مثلثي

نختار دوماً $f(x)$ كثيرة الحدود بينما نختار $g'(x)$ التابع المثلثي أو الأسي.

$$1\text{- } I=\int P(x)e^{\alpha x}dx \Rightarrow \begin{cases} f(x)=P(x) \\ g'(x)=e^{\alpha x} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}$$

$$2\text{- } I=\int P(x)\cos\alpha x dx \text{ or } I=\int P(x)\sin\alpha x dx \Rightarrow \begin{cases} f(x)=P(x) \\ g'(x)=\cos\alpha x \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x \\ \quad or \\ g'(x)=\sin\alpha x \Rightarrow g(x)=\frac{-1}{\alpha}\cos\alpha x \end{cases}$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (x^2-4x)e^{2x}dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-4x \\ g'(x)=e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-4 \\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$\int (x^2-4x)e^{2x}dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-4x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int (2x-4)e^{2x}dx$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x-4 \\ g'(x)=e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=2 \\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$\int (2x-4)e^{2x}dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(2x-4)e^{2x}-\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(2x-4)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$\int (x^2-4x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2-4x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x-4)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int x \sin 2x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \\ g'(x) &= \sin 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ g(x) &= \frac{-1}{2}\cos 2x \end{aligned}\right.$$

$$\int x \sin 2x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$= \frac{-1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (x+1)e^{2x}\,dx$

الحل

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x+1 \\ g'(x)=e^{2x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(x)=1 \\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\}$$

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int (3x+2)\cos 3x \, dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x+2 \\ g'(x) = \cos 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x) = 3 \\ g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right\}$$

$$\int (3x+2)\cos 3x \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$= \frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x - \frac{1}{3}\int 3.\sin 3x dx = \frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x - \int \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$$

الحالة ٣: حالة تكامل جداء تابع أوسي بتابع مثلثي

لا يوجد مشكلة في من نختاره $f(x)$ ومن نختاره $g'(x)$، لكن يجد المحافظة على الاختيار ذاته في المكاملة مرة ثانية باستخدام المكاملة التجزئة.

$$3\text{-}\ I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx \quad \text{or} \quad I=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int e^{x}\sin x dx$

الحل

$$I=\int e^{x}\sin x dx \underset{f(x)=\sin x\ ,\ g'(x)=e^{x}}{=} e^{x}\sin x-\int e^{x}\cos x dx \underset{f(x)=\cos x\ ,\ g'(x)=e^{x}}{=}$$

$$e^{x}\sin x-\Big(e^{x}\cos x+\underbrace{\int e^{x}\sin x dx}_{I}\Big)=e^{x}\sin x-e^{x}\cos x-I$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x-e^{x}\cos x\right)+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx$

الحل

$$I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx \underset{\substack{f(x)=\cos 4x\ ,\ g'(x)=e^{2x}\\ f'(x)=-4\sin 4x\ ,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}}{=} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+\frac{4}{2}\int e^{2x}\sin 4x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+2\int e^{2x}\sin 4x\,dx$$

$$\underset{\substack{f(x)=\sin 4x\ ,\ g'(x)=e^{2x}\\ f'(x)=4\cos 4x\ ,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}}{=} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 4x-\frac{4}{2}\int e^{2x}\cos 4x\,dx\right)$$

$$I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4\underbrace{\int e^{2x}\cos 4x\,dx}_{I}=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4I$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{10}e^{2x}\cos 4x+\frac{1}{5}e^{2x}\sin 4x+C$$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الحالة ٤: حالة تكامل جداء كثيرة حدود بتابع لوغاريتمي أو مثلثي عكسي ....

نختار $f(x)$ التابع اللوغاريتمي أو المثلثي العكس أو ...، ونختار $g'(x)$ كثيرة الحدود.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int(3x^2+1)\ln x\,dx$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \\ g'(x)=3x^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=1/x \\ g(x)=x^3+x \end{array}\right\}$$

$$I=\int(3x^2+1)\ln x\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$=(x^3+x)\ln x-\int(x^3+x).\frac{1}{x}dx=(x^3+x)\ln x-\int(x^2+1).dx$$

$$=(x^3+x)\ln x-\frac{1}{3}x^3-x+C$$

التكامل بالتجزئة للتكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي

$$I = \int_1^2 x \ln x dx$$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(x) &= 1/x \\ g(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int_1^2 x \ln x dx = \int_1^2 f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \frac{1}{x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2)^2 \ln 2 - \frac{1}{2}(1)^2 \ln 1\right] - \frac{1}{4}\left[(2)^2 - (1)^2\right] = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

الحل

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=x\\ g'(x)&=\cos x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} f'(x)&=1\\ g(x)&=\sin x\end{aligned}\right\}$$

$$I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=\int_0^{\pi} f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)g(x)dx$$

$$=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\pi\sin\pi-0\sin 0\right]+\left[\cos\pi-\cos 0\right]=-2$$