

الدارات الكهربائية 1

الدكتور المهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

5

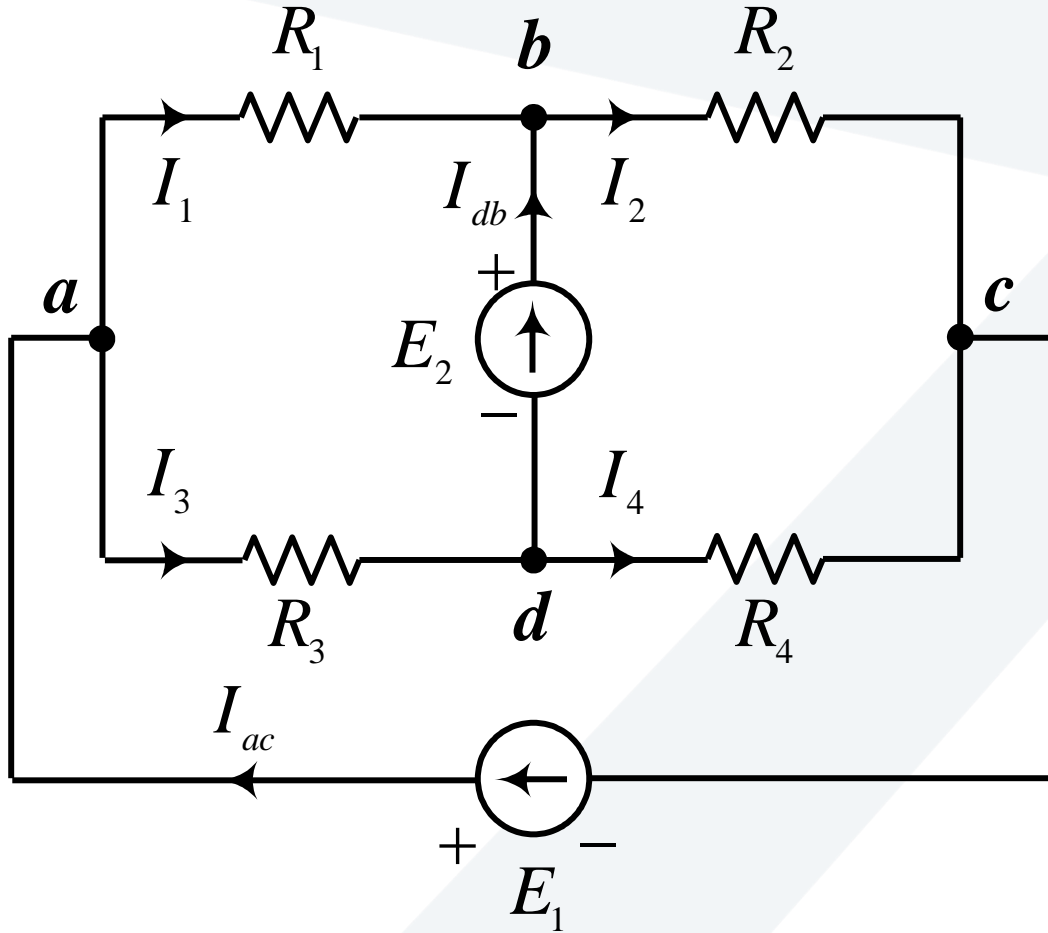
طرق تحليل الدارات الكهربائية

METHODS ANALYSIS OF ELECTRICAL CIRCUITS

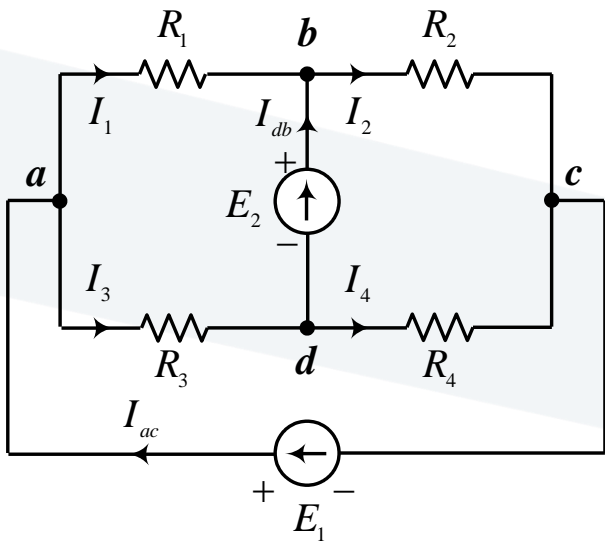
نظرية التَنضُّد (التراكب) (التراكم) Superposition Theorem:

أثناء إجراء الحساب باستخدام مبدأ التَنضُّد للدارة المدروسة ذات عدة منابع تغذية يتم استبدالها بعدة دارات حسابية كهربائية كلٍ منها تعمل بمنبع تغذية واحد من المصادر الموجودة في الدارة الأساسية. أي أن عدد الدارات التي سندرسها يساوي عدد منابع التغذية في الدارة الأساسية. في هذه الحالة يتم قصر (**Short Circuit**) منابع الجهد الموجودة وغير المدروسة في الدارة (**استبدالها بسلك عديم المقاومة**)، في حين يتم حذف منابع التيار غير المدروسة بفتح الدارة (**An Open Circuit**) في مكان وجوده (**مقاومة لا نهائية**)، ويبقى في الدارة فقط المنبع الذي نريد دراسة تأثيره فيها.

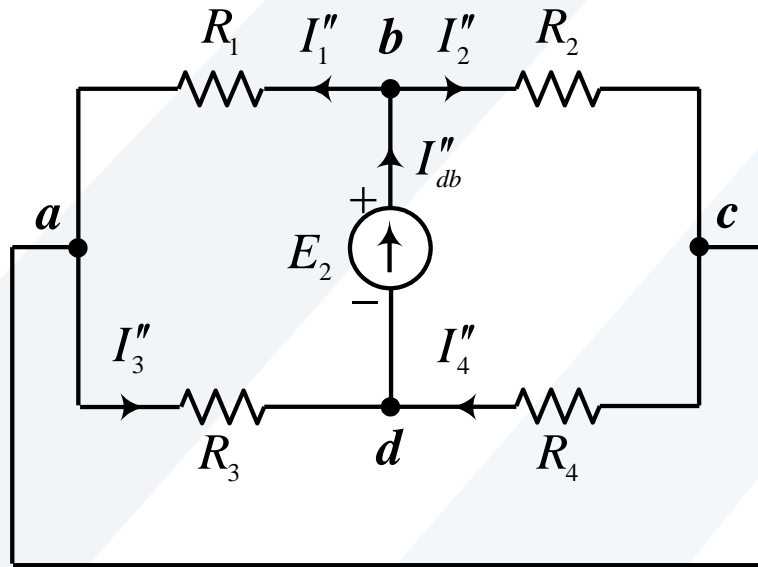
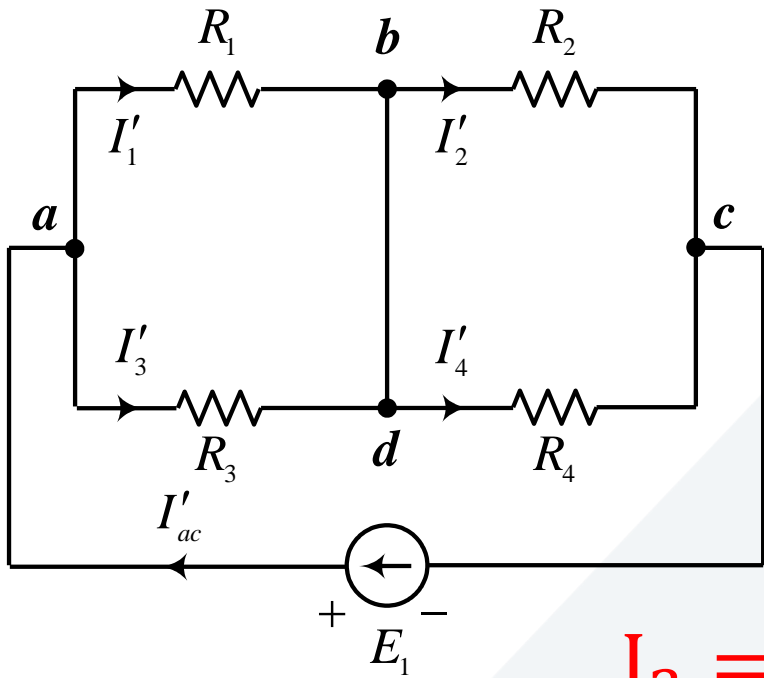
نتيجة الحساب فإن كل دارة من الدارات الحاوية على منبع واحد تعطي مركبة التيارات الناتجة عن المنبع بمفرده. وتتحدّد قيم التيارات الفعلية بالجمع الجبري لمركبات التيارات في كل فرع من الدارات الحاوية على المنابع المنفردة.



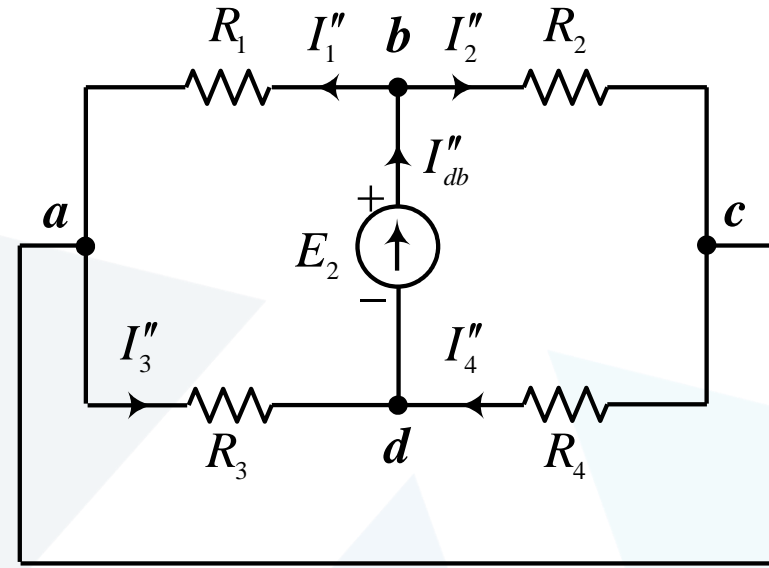
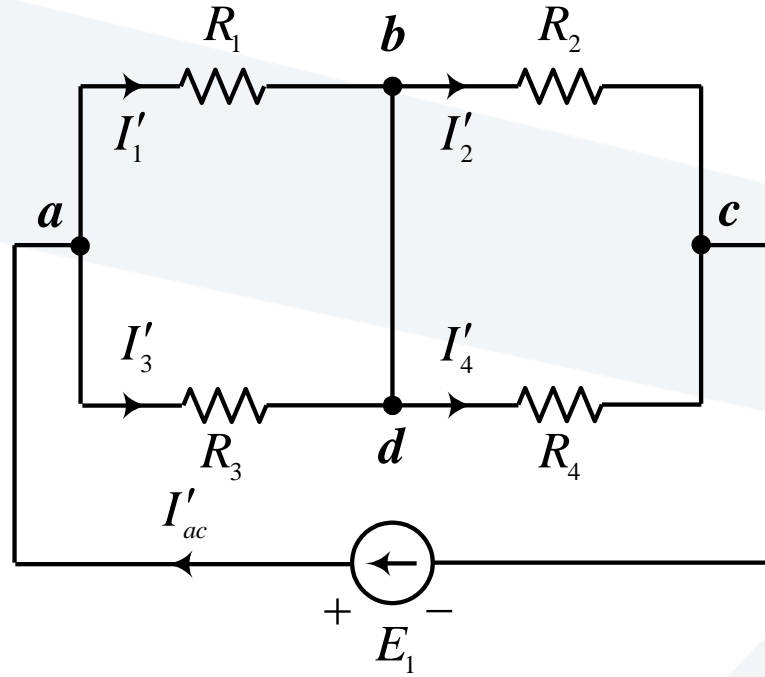
فمن أجل الدارة المبينة بالشكل
الحاوية على منبعي تغذية، فإن
الدارة تتحول إلى دارتين كلٍ
منهما تحتوي على منبع تغذية
واحد، أما الثاني فيتم قصره
واستبعاده من الدارة.



لحساب الدارة وفق مبدأ التنضد يتم إنشاء دارتين من الدارة الأساسية (حسب عدد منابع التغذية) كل منهما بمنبع تغذية واحد، كما في الشكل.



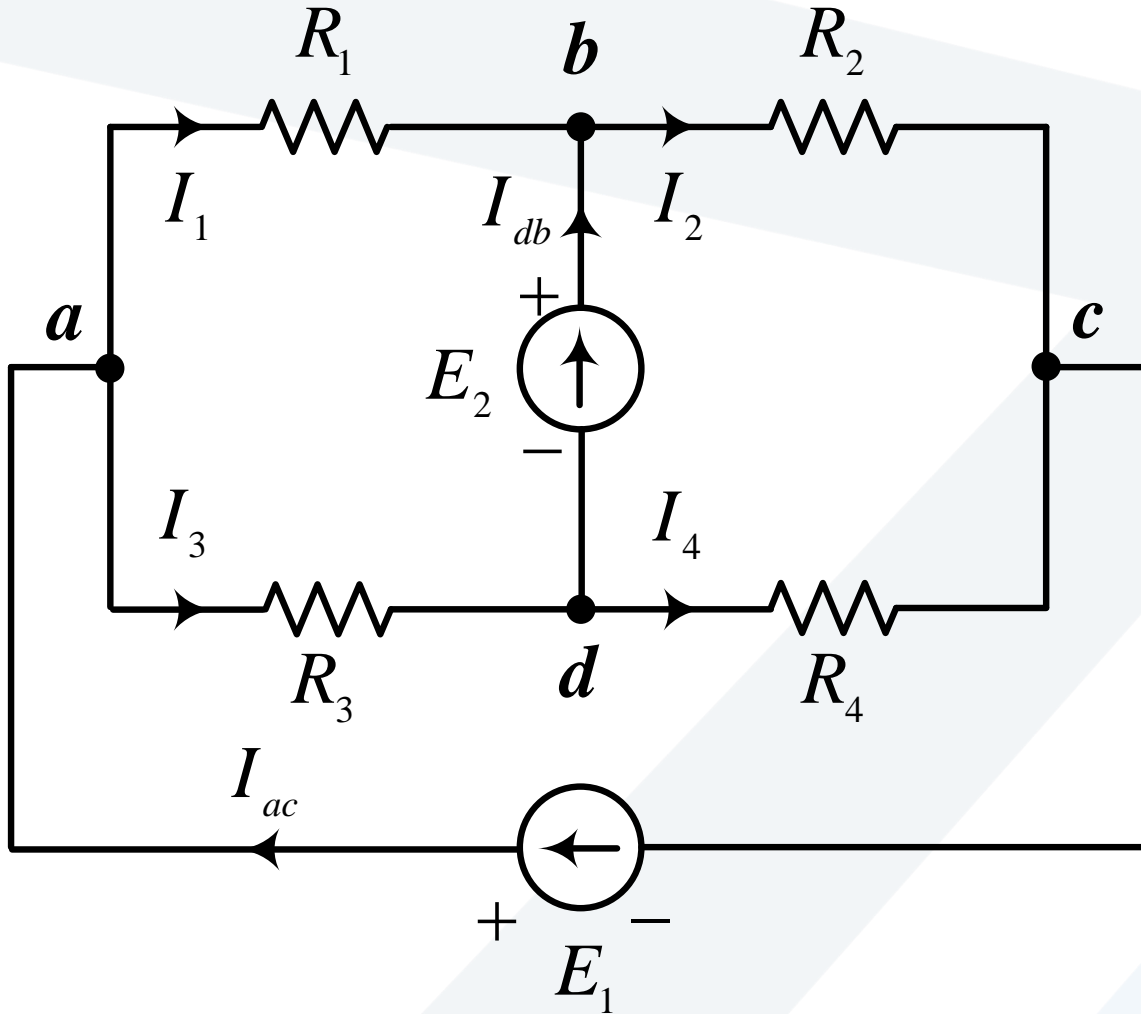
$$I_3 = I'_3 + I''_3, I_2 = I'_2 + I''_2, I_1 = I'_1 - I''_1$$



يتم حساب كل دارة من الدارات الفرعية الحاوية على منبع تغذية واحد فقط باستخدام طرق التبسيط المعروفة سابقاً. بعد ذلك تتحدّد التيارات في كل فرع من فروع الدارة الأساسية بالجمع الجبري للتيارات الجزئية للفرع نفسه، مثلاً:

$$I_3 = I'_3 + I''_3, \quad I_2 = I'_2 + I''_2, \quad I_1 = I'_1 - I''_1$$

مثال:



احسب قيمة التيارات في الدارة
المبينة بالشكل، وذلك باستخدام
نظرية التَنضُّد، علماً بأن:

$$E_1 = 120[V]$$

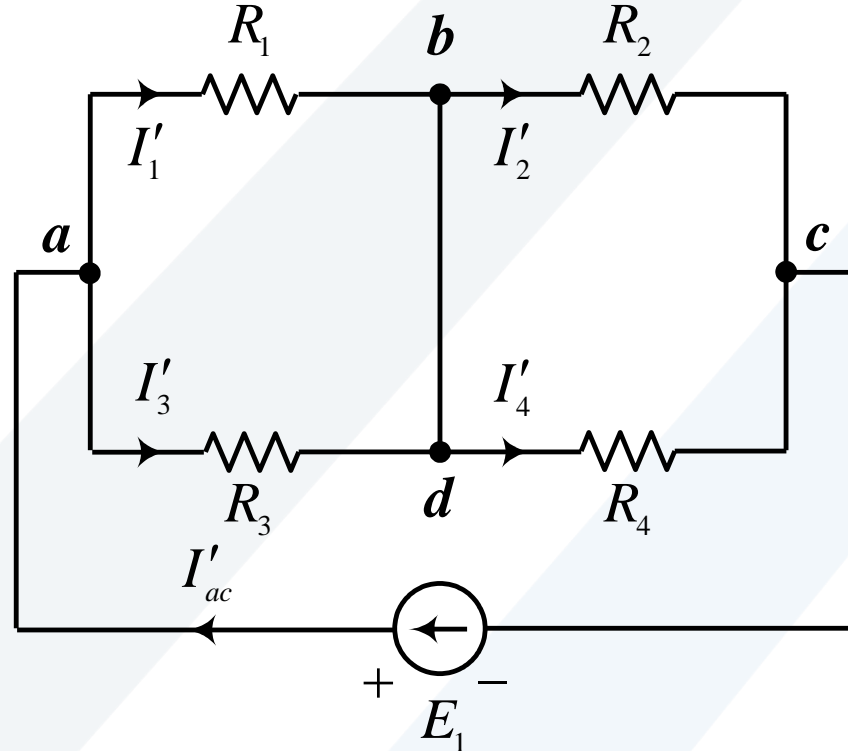
$$E_2 = 100[V]$$

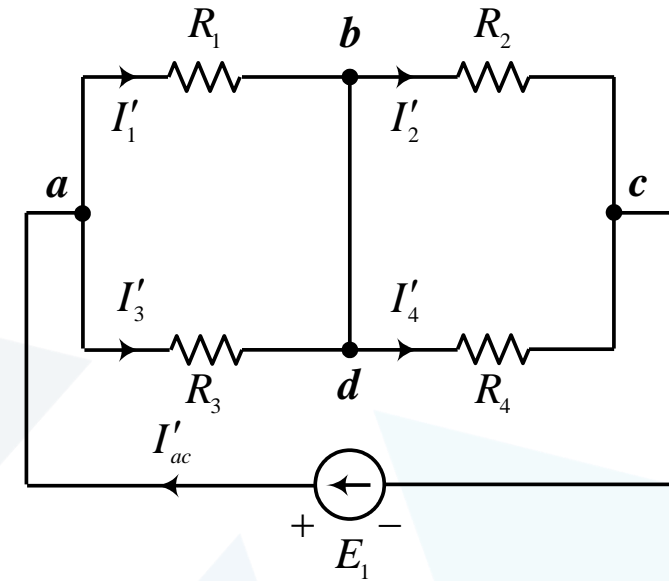
$$R_1 = R_2 = 20[\Omega]$$

$$R_3 = R_4 = 30[\Omega]$$

الحل:

كما ذكرنا سابقاً، بما أن الدارة تحوي منبعي جهد، فسنشكل منها دارتين كل منها بمنبع جهد واحد، حيث سندرس تأثير كل منبع على حده في الدارة. نجعل في الدارة الأولى $E_2=0$ وندرس تأثير المنبع E_1 ، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثير هذا المنبع:

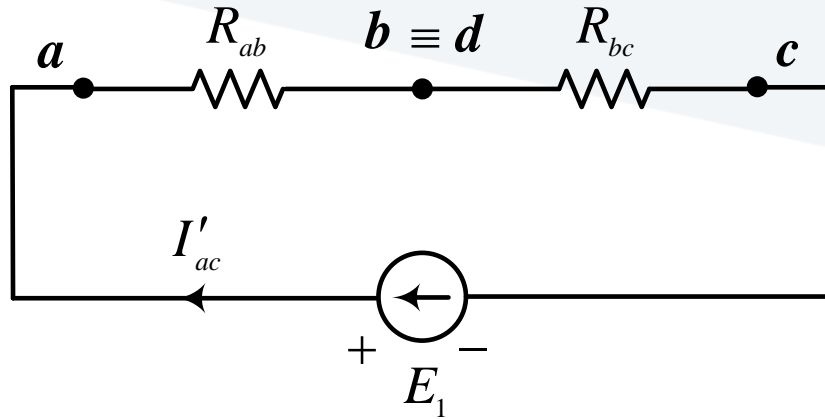




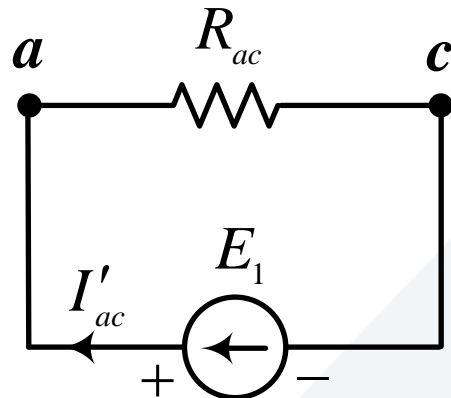
$$\left. \begin{aligned}
 R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12[\Omega] \\
 R_{bc} &= \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12[\Omega]
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{ac} = R_{ab} + R_{bc} = 12 + 12 = 24[\Omega]$$

$$\Rightarrow I'_{ac} = \frac{E_1}{R_{ac}} = \frac{120}{24} = 5[A].$$

أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة كما هو موضح في الشكل التالي:



المقاومتان بين العقدتين **a** و **b** وبين **b** و **c** متساويتان ($12 \text{ } [\Omega]$)، ولذلك يكون الجهد بين العقدتين **a** و **b** وبين **b** و **c** متساويان أيضاً، أي:



$$V'_{ab} = V'_{bc} = I'_{ac} \cdot R_{ab} = I'_{ac} \cdot R_{bc} = 5 \times 12 = 60[V]$$

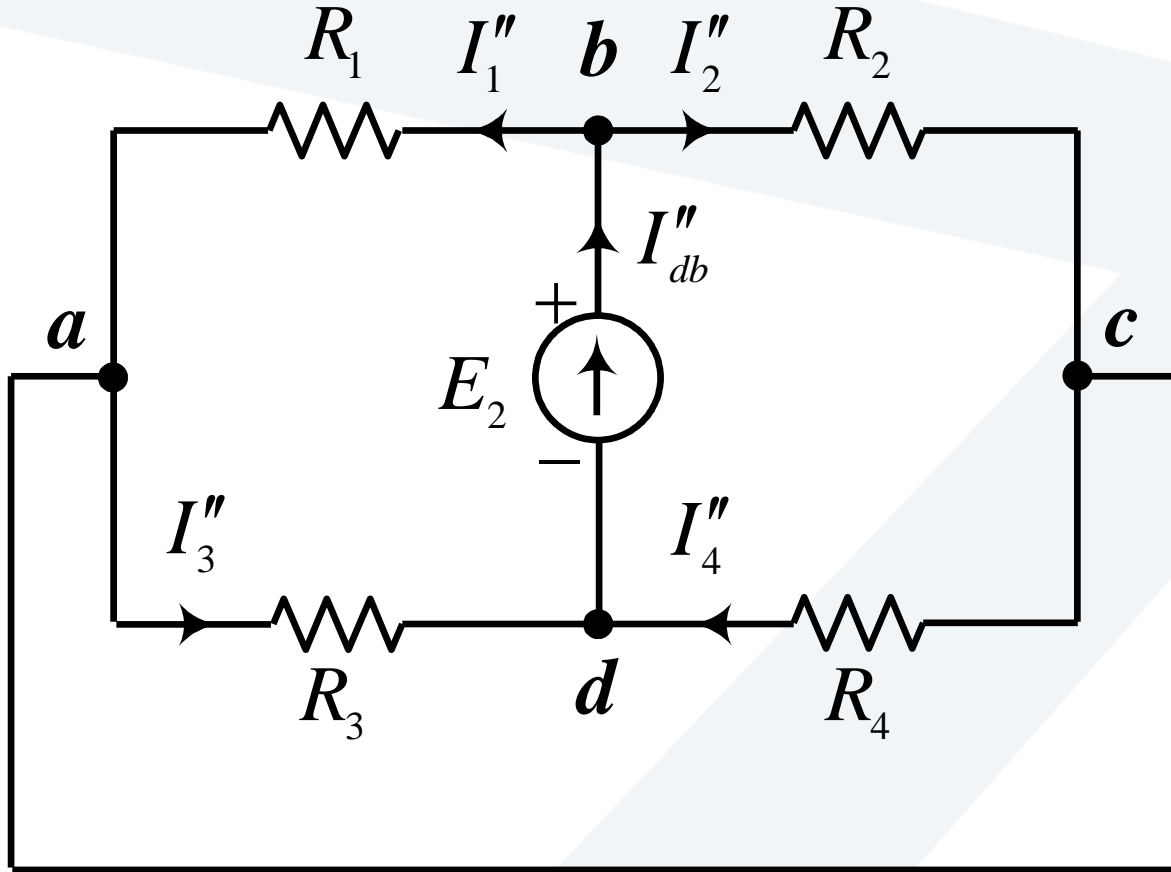
بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

$$I'_1 = \frac{V'_{ab}}{R_1} = \frac{60}{20} = 3[A]$$

$$I'_2 = \frac{V'_{bc}}{R_2} = \frac{60}{20} = 3[A]$$

$$I'_3 = \frac{V'_{ab}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2[A]$$

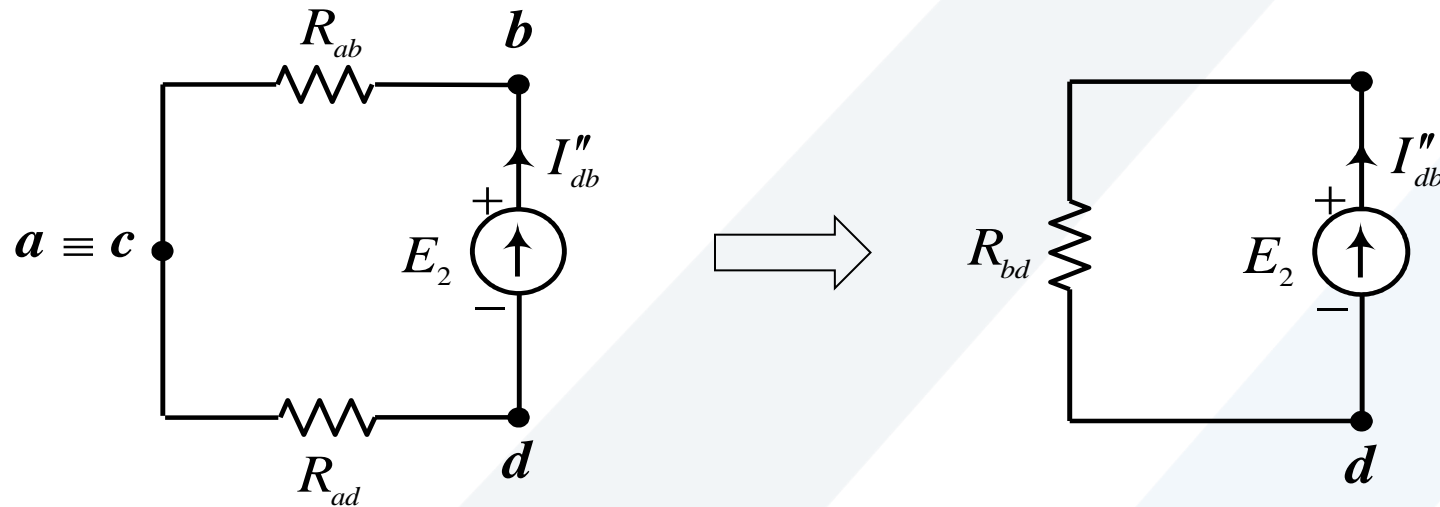
$$I'_4 = \frac{V'_{bc}}{R_4} = \frac{60}{30} = 2[A]$$



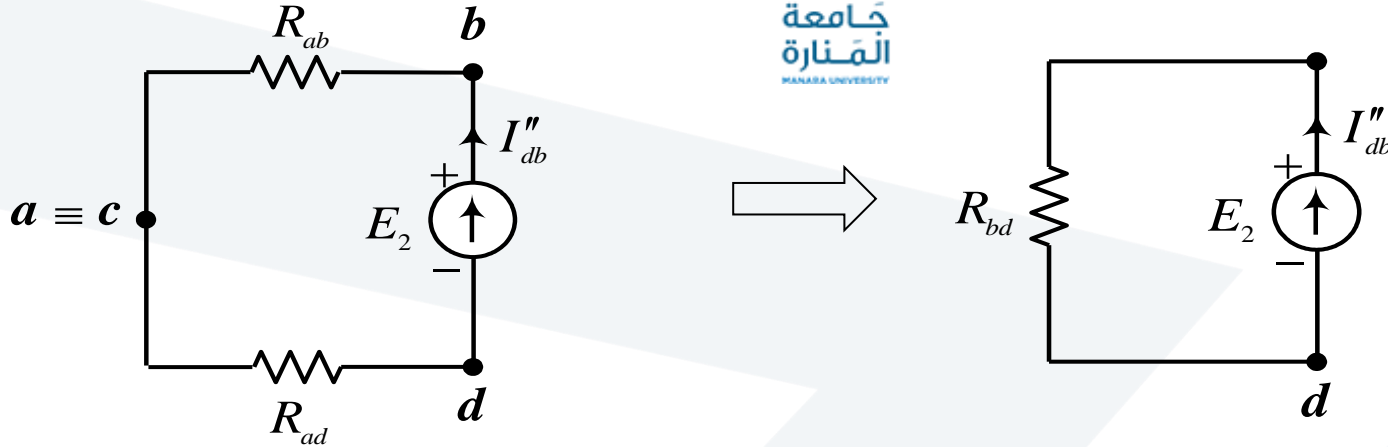
في الدارة الثانية نجعل $E_1=0$ وندرس تأثير المنبع E_2 ، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثير هذا المنبع:

$$\left. \begin{aligned}
 R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 10[\Omega] \\
 R_{ad} &= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 \times 30}{30 + 30} = 15[\Omega]
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{db} = R_{ab} + R_{ad} = 10 + 15 = 25[\Omega]$$

$$\Rightarrow I''_{db} = \frac{E_2}{R_{db}} = \frac{100}{25} = 4[A].$$



أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة
كما هو موضح في الشكل التالي:



$$V''_{ab} = I''_{db} \cdot R_{ab} = 4 \times 10 = 40[V]$$

$$V''_{ad} = I''_{db} \cdot R_{ad} = 4 \times 15 = 60[V]$$

الجهد بين العقدتين **a** و **b**:

الجهد بين العقدتين **a** و **d**:

$$I''_1 = \frac{V''_{ab}}{R_1} = \frac{40}{20} = 2[A], I''_2 = \frac{V''_{ab}}{R_2} = \frac{40}{20} = 2[A]$$

$$I''_3 = \frac{V''_{ad}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2[A], I''_4 = \frac{V''_{ad}}{R_4} = \frac{60}{30} = 2[A]$$

بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

وفقاً لذلك تكون قيم التيارات في الدارة الأساسية كما يأتي:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 3 - 2 = 1[A]$$

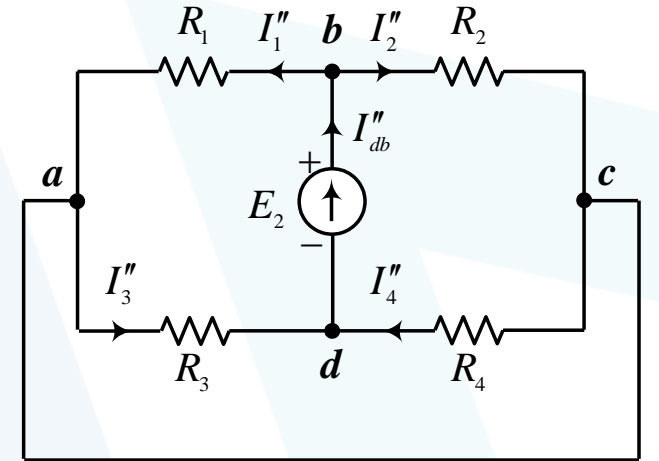
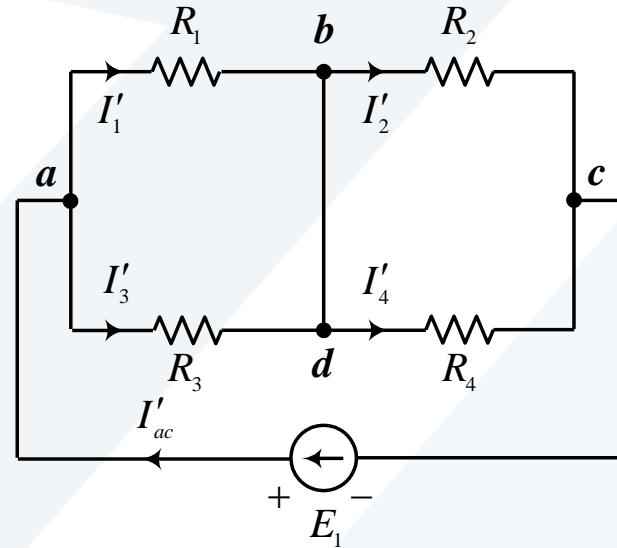
$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 3 + 2 = 5[A]$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4[A]$$

$$I_4 = I'_4 - I''_4 = 2 - 2 = 0[A]$$

$$I_{ac} = I'_{ac} = 5[A], I''_{ac} = 0[A]$$

$$I_{db} = I''_{db} = 4[A], I'_{db} = 0[A]$$



طريقة كمون العقدة Node Voltage Method:

لتطبيق هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية:

1. نحدد اتجاه التيارات الموجبة (افتراضياً) في مختلف فروع الدارة.
2. نوصل إحدى عقد الدارة إلى الأرض (نؤرضها، أي أن كمونها أصبح مساوٍ للصفر).
3. نطبق علاقة فرق الكمون في العقدة، وهي:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i} + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{R_i} + \sum_{i=1}^n I_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \cdot g_i + \sum_{i=1}^n V_i \cdot g_i + \sum_{i=1}^n I_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$$

المجموع الجبري لجداء القوى المحركة الكهربائية بناقليات فروع الدارة. $\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i} = \sum_{i=1}^n E_i \cdot g_i$

المجموع الجبري لجداء الجهود بناقليات فروع الدارة. $\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{R_i} = \sum_{i=1}^n V_i \cdot g_i$

المجموع الجبري لتيارات منابع التيار في الدارة إن وجدت. $\sum_{i=1}^n I_i$

المجموع الجبري لناقليات فروع الدارة. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^n g_i$

4. نحل هذه المعادلة فنحصل على قيمة كمون العقدة المدروسة، وبالتالي نستطيع تحديد الجهد بين أي من عقد الدارة وهذه العقدة.

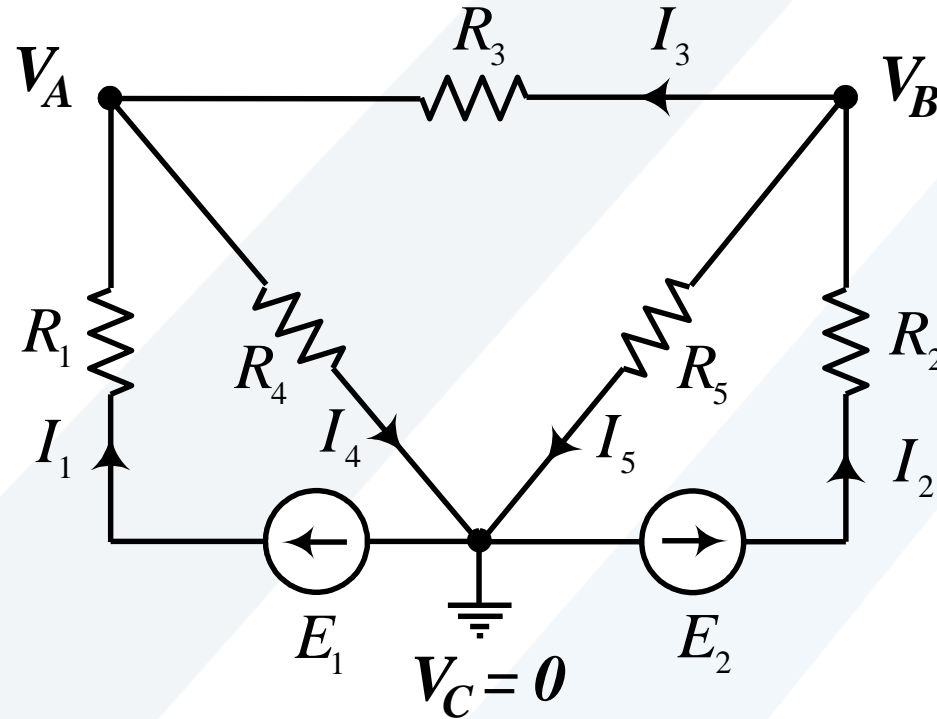
5. نحدّد قيم التيارات في مختلف فروع الدارة حسب قانون كيرشوف الثاني، وذلك بمعرفة الجهد وفق العلاقة السابقة، وبمعرفة القوى المحركة الكهربائية العاملة في الدارة.

ملاحظة 1: عند حساب الدارات الكهربائية حسب طريقة كمون العقدة يتم اعتماد اتجاه موجب للجهد المدروس، والمحسوب بالعلاقة السابقة، وعندها يتم تحديد ناقلات جميع الفروع باختيارات اتجاه افتراضي موجب للتيار في الفروع.

ملاحظة 2: لتحديد قيم التيارات في الفروع، نشكل حلقة مغلقة بين الفرع المراد حساب التيار فيه، وشعاع الجهد بين طرفيه. يتم بعدها اختيار اتجاه دوران الحلقة ومن ثم تطبيق قانون كيرشوف الثاني. في هذه الحالة تُعدّ القوى المحركة الكهربائية والجهود والتيارات منابع التيار موجبة إذا كان اتجاهها موافقاً لاتجاه دوران الحلقة، وسالبة إذا كان معاكساً له.

مثال: احسب قيم التيارات في جميع فروع الدارة المبينة بالشكل باستخدام طريقة كمون العقدة، علماً بأن:

$$R_1 = R_2 = 1[\Omega], R_3 = R_4 = R_5 = 2[\Omega], E_1 = E_2 = 12[V]$$



الحل: نحسب ناقلات الفروع:

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1[S], g_3 = g_4 = g_5 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} = 0.5[S]$$

لتطبيق طريقة كمون العقدة نوصل العقدة C مع الأرض (نؤرضها) ونكتب المعادلات كما يأتي:

$$V_A = \frac{E_1 \cdot g_1 + V_B \cdot g_3}{g_1 + g_3 + g_4} = \frac{12 \times 1 + 0.5 \cdot V_B}{1 + 0.5 + 0.5} = \frac{12 + 0.5 \cdot V_B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot V_A - 0.5 \cdot V_B = 12 \quad (1)$$

$$V_B = \frac{E_2 \cdot g_2 + V_A \cdot g_3}{g_2 + g_3 + g_5} = \frac{12 \times 1 + 0.5 \cdot V_A}{1 + 0.5 + 0.5} = \frac{12 + 0.5 \cdot V_A}{2}$$

$$\Rightarrow -0.5 \cdot V_A + 2 \cdot V_B = 12 \quad (2)$$

تحتوي المعادلتان (1) و (2) على مجهولين V_A و V_B ، ونحصل على قيمتهما بحل هاتين المعادلتين بأية طريقة رياضية ولتكن بطريقة المصفوفات:

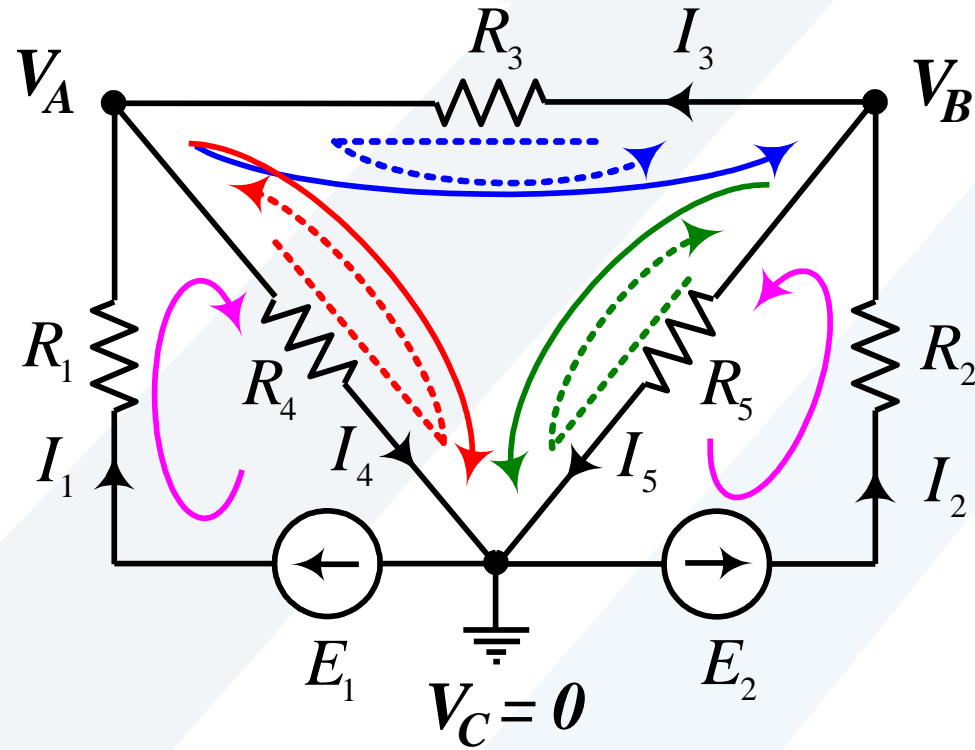
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-0.5 \times -0.5) = 4 - 0.25 = 3.75$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -0.5 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12 \times 2 - (-0.5 \times 12) = 24 + 6 = 30$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -0.5 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times 12 - (-0.5 \times 12) = 24 + 6 = 30$$

$$V_A = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{3.75} = 8[V], V_B = \frac{D_2}{D} = \frac{30}{3.75} = 8[V], V_C = 0[V]$$

يتم حساب قيم التيارات في الفروع وفقاً لقانون كيرشوف الثاني، حيث يتم تشكيل حلقات، كلٍ منها مكونة من الفرع الذي نريد حساب التيار الذي يسري فيه، ومن شعاع الجهد بين طرفي هذا الفرع بعد اعتماد اتجاه دوران للحلقة، كما هو مبين في الشكل.



وفقاً لذلك يتم كتابة معادلات الحلقات وحساب التيارات كما يأتي:

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 + (V_A - V_C) \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - (V_A - V_C)}{R_1} = \frac{12 - 8}{1} = 4[A]$$

$$E_2 = I_2 \cdot R_2 + (V_B - V_C) \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - (V_B - V_C)}{R_2} = \frac{12 - 8}{1} = 4[A]$$

$$0 = I_3 \cdot R_3 + (V_A - V_B) \Rightarrow I_3 = \frac{V_B - V_A}{R_3} = \frac{8 - 8}{2} = 0[A]$$

$$0 = I_4 \cdot R_4 - (V_A - V_C) \Rightarrow I_4 = \frac{V_A - V_C}{R_4} = \frac{8}{2} = 4[A]$$

$$0 = I_5 \cdot R_5 - (V_B - V_C) \Rightarrow I_5 = \frac{V_B - V_C}{R_5} = \frac{8}{2} = 4[A]$$

