تحكم لا خطي

المحاضرة الخامسة (عملي)

رسم الphase plane للأنظمة الخطية باستخدام طريقة ال(Isocline)

م. زينة أديب علي

قسم الروبوت سنة رابعة-فصل أول

الغاية من الجلسة:

1. رسم الphase plane للأنظمة الخطية باستخدام طريقة ال(Isocline).
2. دراسة استقرار النظام باستخدام الphase plane ومعرفة الاستجابة الزمنية له.

مقدمة:

- تناسب طريقة ال(phase plane) الأنظمة الموصوفة بمعادلات تفاضلية بالصيغة التالية:

$$x'' + f(x, x') = 0$$

حيث الدالة (f) يمكن أن تكون دالة خطية او غير خطية.

- يزودنا ال phase plane بمعلومات عن استقرار النظام وكذلك الاستجابة الزمنية.
- يمكن استخدامه للأنظمة الخطية واللا خطية.
- تناسب هذه الطريقة الأنظمة ذات الدرجة الثانية مع درجة حرية واحدة.
- يمكن رسم ال phase plane بعدة طرق منها بيانية ومنها تحليلية.
- تكون الطرق البيانية مفيدة عندما يكون من الصعب أو المستحيل حل المعادلة التفاضلية تحليلياً.
- يمكن تطبيق الطرق البيانية على الأنظمة الخطية واللا خطية (معظم الأنظمة اللا خطية ذات الدرجة الثانية لا يمكن حلها تحليلياً).
- يمكن استخدام الطرق التحليلية إما بالحل المباشر للمعادلة التفاضلية أو بمكاملة المعادلة التفاضلية وهذه الطريقة مناسبة للأنظمة التي تكون معادلتها التفاضلية بسيطة.

تعريف ال(Isocline):

ال Isocline هي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر من نقطة اتزان النظام.

مثال1:

ارسم مخطط ال(phase plane) للأنظمة التالية باستخدام طريقة الIsoclines:

1. $x'' + x' + x = 0$ حيث الحالة الابتدائية: $x(0) = 2.3 \quad x'(0) = 1.2$

الحل:

نكتب النظام على الشكل :

$x_2 = n * x_1$ حيث لدينا $x = x_1 \quad x' = x_2$

حيث لدينا:

$x'' = \frac{dx2}{dx1} * \frac{dx1}{dt}$ حيث يمثل $\frac{dx_2}{dx_1}$ ميل المسار (m).

$x'' = m * x_2$ وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$mx_2 + x_2 + x_1 = 0$$

ومنه ينتج لدينا:

$$x_2 = \frac{-1}{m+1} * x_1$$

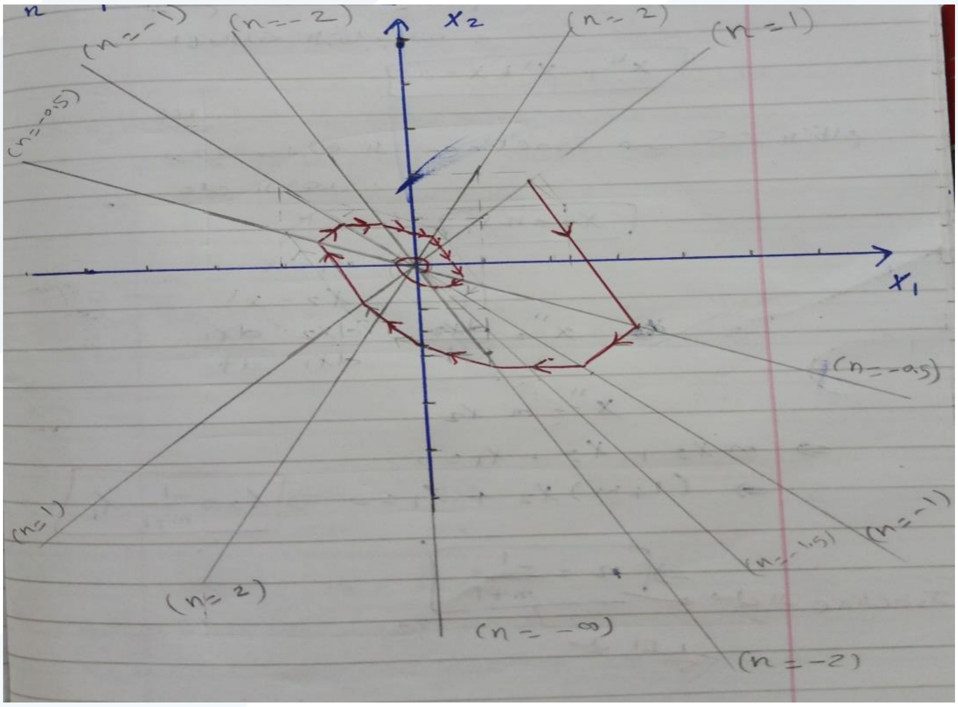
أي سيكون:

$$n = \frac{-1}{m+1}$$

نقوم بتشكيل الجدول التالي:

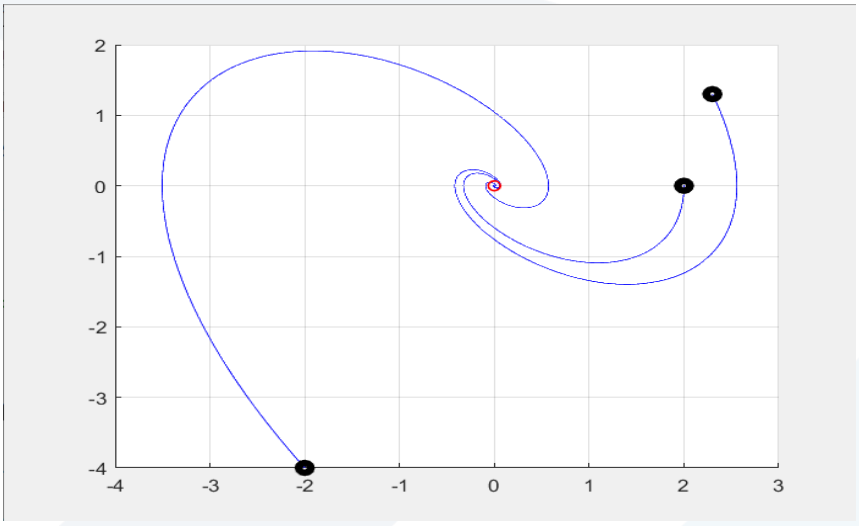
m	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
n	1	2	-∞	-2	-1	-0.5

- نقوم برسم خطوط الIsoline وهي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر بنقطة التوازن (0,0).
- نضع الشروط الابتدائية على أقرب خط Isocline لها.
- ننتقل من خط Isocline إلى خط آخر وفق الميل (m) المقابل له.



النظام مستقر ناقص التخميد

- يدل مخطط ال(phase plane) على استقرار النظام وعلى شكل الاستجابة الزمنية كونه يدل على نسبة التخميد.



رسم باستخدام ماتلاب فكما نلاحظ أن النظام يذهب إلى نقطة التوازن (0,0) أياً كانت حالته الابتدائية، وبالتالي فإن النظام مستقر ناقص التخميد.

مثال2:

.2 $x'' + 2x' + 5x = 3$ حيث الحالة الابتدائية: $x'(0) = 1.8$ $x(0) = 1.1$

الحل:

نكتب النظام على الشكل :

$x = x_1$ $x' = x_2$ حيث لدينا $x_2 = n * x_1$

حيث لدينا:

$x'' = \frac{dx2}{dx1} * \frac{dx1}{dt}$ حيث يمثل $\frac{dx_2}{dx_1}$ ميل المسار (m).

$x'' = m * x_2$ وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$mx_2 + 2x_2 + 3x_1 = 5$$

ومنه ينتج لدينا:

$$x_2 = \frac{-5}{m+2} * x_1 + \frac{3}{m+2}$$

أي سيكون:

$$n = \frac{-5}{m+2}$$

نقطة التوازن لن تكون عند النقطة (0,0). سنوجد نقطة التوازن حيث يحدث التوازن عندما يذهب المشتق إلى الصفر

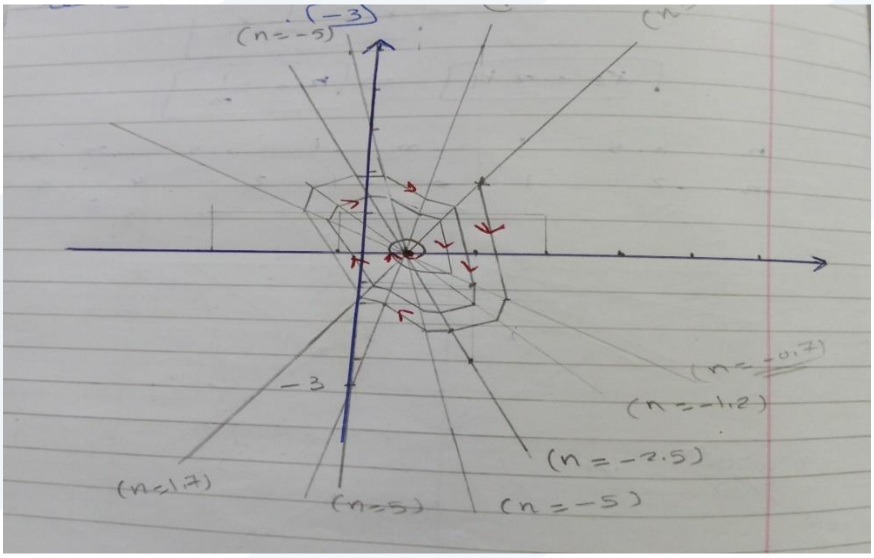
أي سيكون $x_2 = 0$ وبالتعويض في المعادلة ينتج لدينا:

$0 = \frac{-5}{m+2} * x_1 + \frac{3}{m+2}$ ومنه ينتج لدينا $x_1 = 0.6$ أي ستكون نقطة الاتزان عند النقطة (0.6,0) لذلك ستمر خطوط ال Isocline منها.

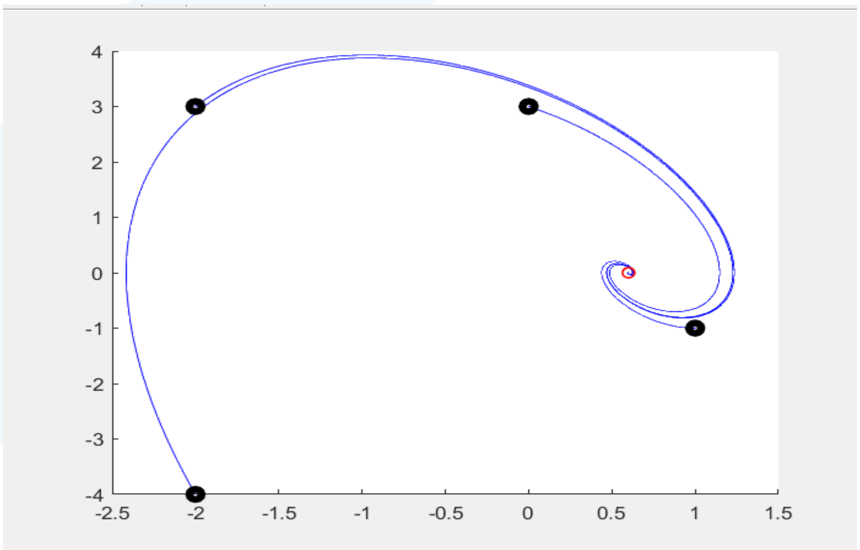
نقوم بتشكيل الجدول التالي:

m	-5	-3	-1	0	2	5
X_2	$1.7x_1-1$	$5x_1-3$	$-5x_1+3$	$-2.5x_1+1.5$	$-1.2x_1+0.75$	$-0.7x_1+0.4$

- نقوم برسم خطوط الIsoline وهي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر بنقطة التوازن (0.6,0).
- نضع الشروط الابتدائية على أقرب خط Isocline لها (2.3,1.3)
- ننتقل من خط Isocline إلى خط آخر وفق الميل (m) المقابل له.



النظام مستقر ناقص التخميد



رسم باستخدام ماتلاب فكما نلاحظ أن النظام يذهب إلى نقطة التوازن (0.6,0) أياً كانت حالته الابتدائية، والنظام هنا مستقر ناقص التخميد.

مثال:

$$x'' + x = 0$$

الحل:

نكتب النظام على الشكل :

$$x_2 = n * x_1$$

$$x = x_1 \quad x' = x_2$$

حيث لدينا:

$x'' = \frac{dx1}{dt} * \frac{dx2}{dx1}$ حيث يمثل $\frac{dx_2}{dx_1}$ ميل المسار (m).

$x'' = m * x_2$ وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$mx_2 + x_1 = 0$$

ومنه ينتج لدينا:

$$x_2 = \frac{-1}{m} * x_1$$

أي سيكون:

$$n = \frac{-1}{m}$$

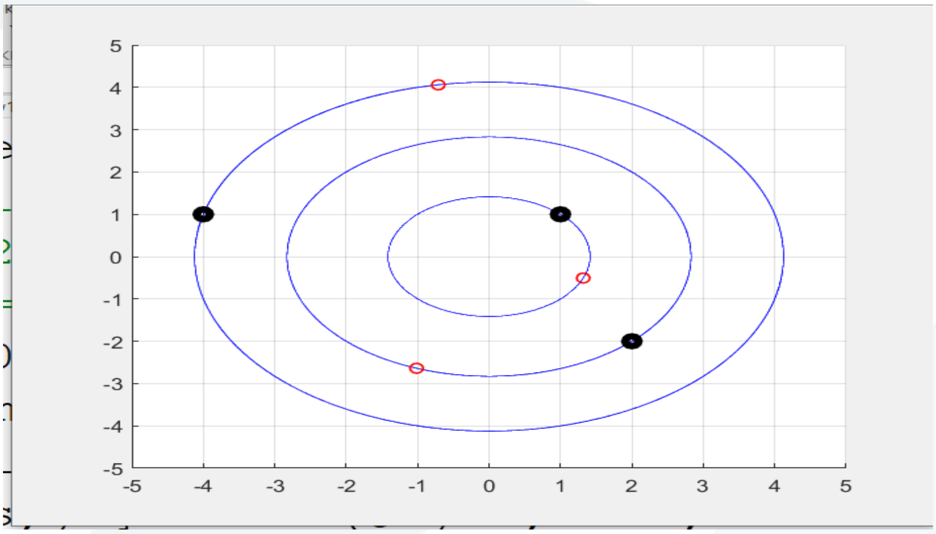
نقطة التوازن هي النقطة (0,0).

تمر خطوط ال Isocline من النقطة (0,0).

نقوم بتشكيل الجدول التالي:

n	0.5	1	-∞	-1	-0.5	-0.25	-0.2
m	-2	-1	0	1	2	4	5

- نقوم برسم خطوط الIsoline وهي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر بنقطة التوازن (0,0).
- نضع الشروط الابتدائية على أقرب خط Isocline لها.
- ننتقل من خط Isocline إلى خط آخر وفق الميل (m) المقابل له فينتج لدينا المخطط التالي:



تم الرسم باستخدام ماتلاب حيث كما نلاحظ أن النظام بقي يدور حول نقطة التوازن (يهتز) أياً كانت حالته الابتدائية وبالتالي النظام على حد الاستقرار (غير مخمد).

مثال:

$$-x'' + x' = 0$$

لا يمكن استخدام طريقة الIsocline لأننا لا يوجد لدينا (x_1) في المعادلة، لذلك لا نستطيع كتابة المعادلة على الشكل :

$$x_2 = nx_1$$

مثال:

$$x_1' = x_1 + x_2$$
$$x_2' = 2x_1 + x_2$$

الحل:

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{2x_1+x_2}{x_1+x_2}$$

$$\frac{dx2}{dt} * \frac{dt}{dx1} = \frac{2x_1+x_2}{x_1+x_2}$$

$$m = \frac{2x_1+x_2}{x_1+x_2}$$

$$m(x_1 + x_2) = (2x_1 + x_2)$$

$$mx_1 + mx_2 = 2x_1 + x_2$$

$$(m - 2)x_1 = (1 - m)x_2$$

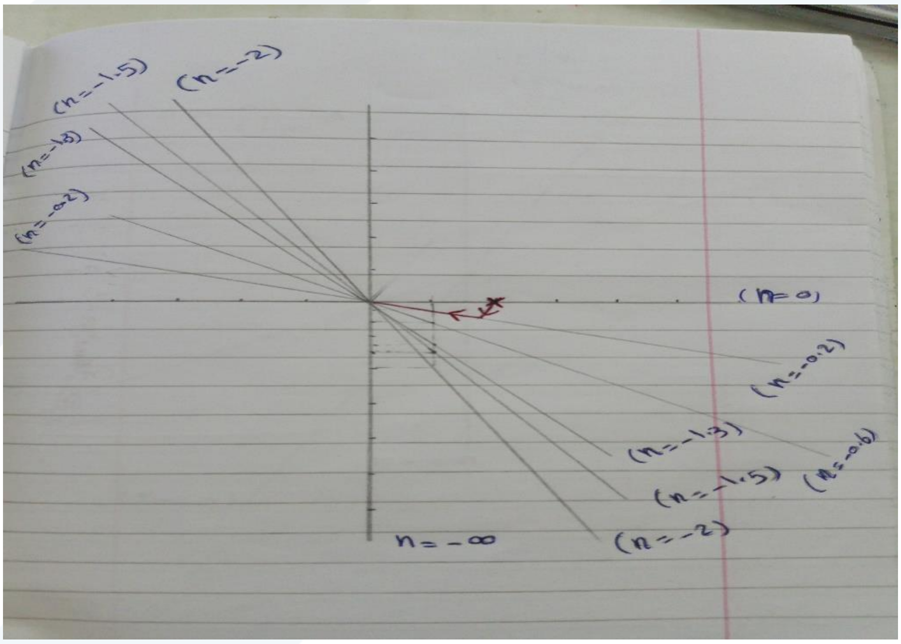
$$x_2 = \frac{m-2}{1-m} x_1$$

$$n = \frac{m-2}{1-m}$$

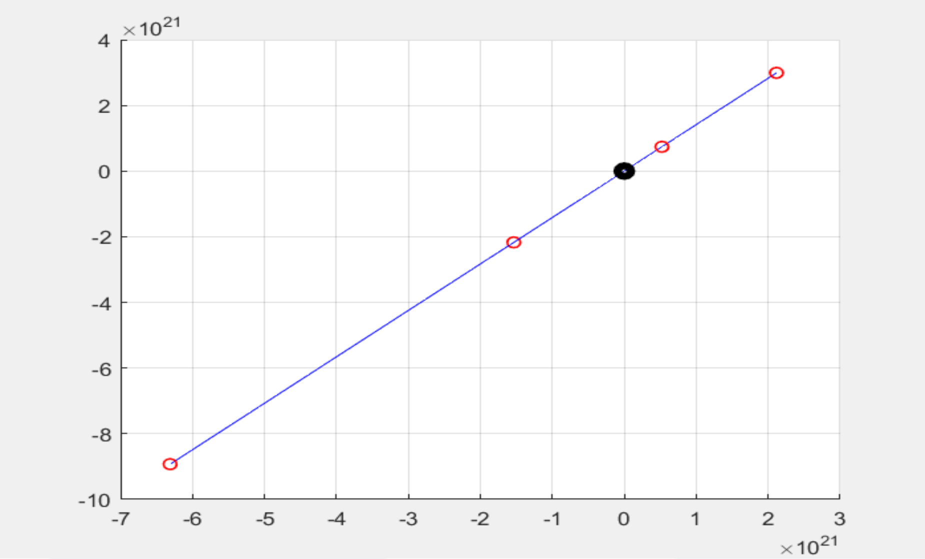
نقوم بتشكيل الجدول التالي:

n	-1.3	-1.5	-2	-∞	0	-0.66	-0.2
m	-2	-1	0	1	2	4	-0.5

- نقوم برسم خطوط الIsoline وهي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر بنقطة التوازن (0,0).
- نضع الشروط الابتدائية على أقرب خط Isocline لها(الشروط الابتدائية هي ((2,0)).
- ننتقل من خط Isocline إلى خط آخر وفق الميل (m) المقابل له فينتج لدينا المخطط التالي:



النظام مستقر زائد التخميد.



رسم باستخدام ماتلاب فكما نلاحظ أن النظام يذهب إلى نقطة التوازن (0,0) أياً كانت حالته الابتدائية بشكلٍ مباشر وبالتالي فإن النظام مستقر زائد التخميد.

مثال:

$$x'' + 2.4x' + x = 0$$

الحل:

نكتب النظام على الشكل :

$$x_2 = n * x_1$$

$$x = x_1 \quad x' = x_2$$

حيث لدينا:

$x'' = \frac{dx2}{dx1} * \frac{dx1}{dt}$ حيث يمثل $\frac{dx_2}{dx_1}$ ميل المسار (m).

$x'' = m * x_2$ وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$mx_2 + 2.4x_2 + x_1 = 0$$

ومنه ينتج لدينا:

$$x_2 = \frac{-1}{m+2.4} * x_1$$

أي سيكون:

$$n = \frac{-1}{m+2.4}$$

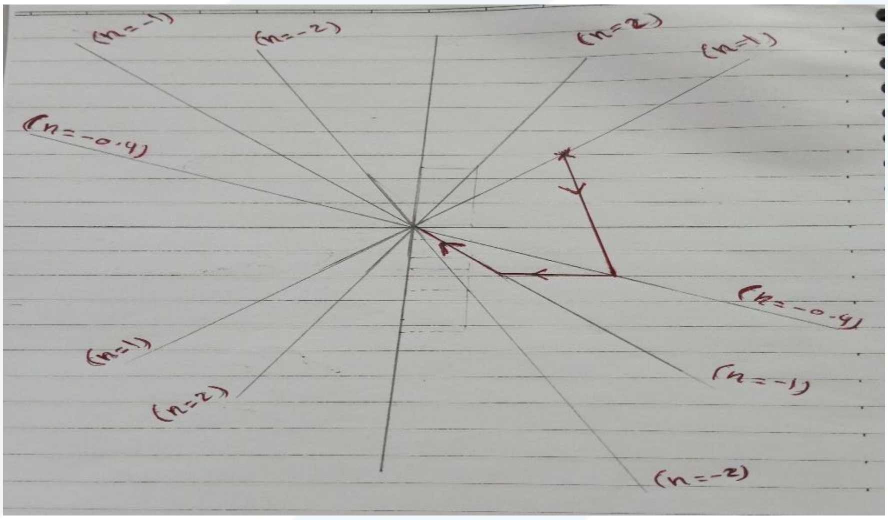
نقطة التوازن هي النقطة (0,0).

تمر خطوط ال Isocline من النقطة (0,0).

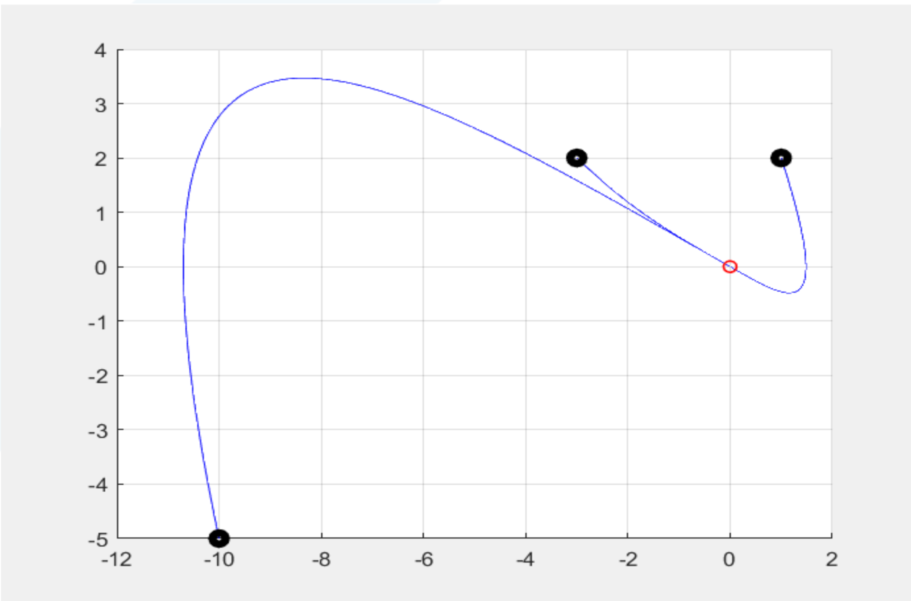
نقوم بتشكيل الجدول التالي:

m	0	-1.9	-1.4	-2.9	-3.4
n	-0.4	-2	-1	2	1

- نقوم برسم خطوط الIsoline وهي عبارة عن خطوط ميلها (n) تمر بنقطة التوازن (0,0).
- نضع الشروط الابتدائية على أقرب خط Isocline لها (وضعنا شروط ابتدائية عشوائية)
- ننتقل من خط Isocline إلى خط آخر وفق الميل (m) المقابل له فينتج لدينا المخطط التالي:



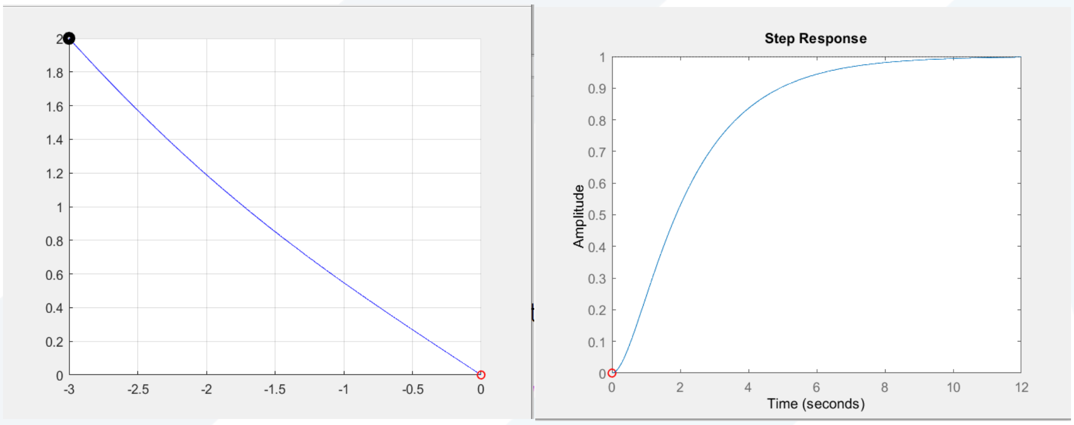
النظام مستقر زائد التخميد .



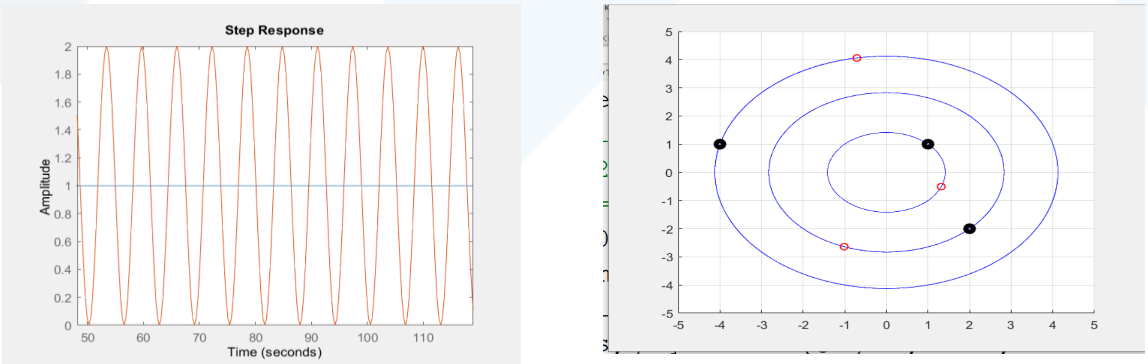
رسم باستخدام ماتلاب فكما نلاحظ أن النظام يذهب إلى نقطة التوازن (0,0) أياً كانت حالته الابتدائية بشكلٍ مباشر وبالتالي فإن النظام مستقر زائد التخميد.

نستنتج مايلي:

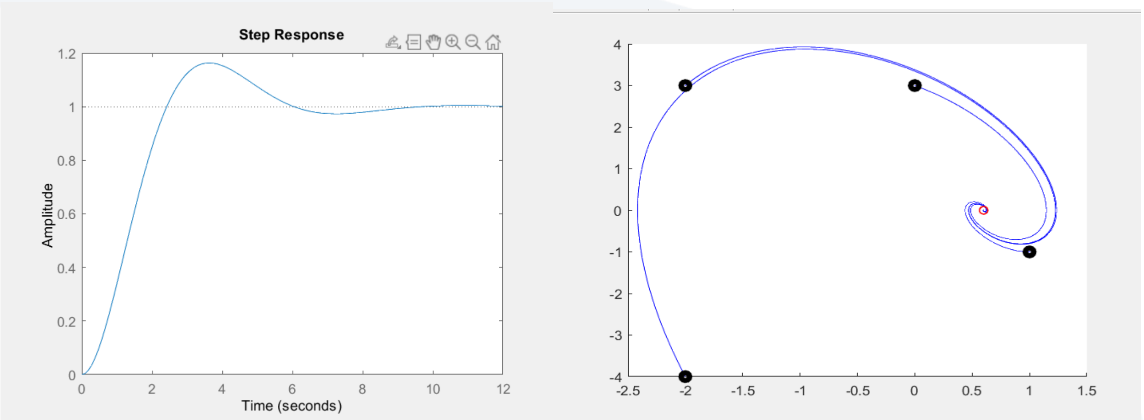
- يدل مخطط ال phase plane على استقرار النظام وشكل الاستجابة الزمنية للنظام.
- من شكل ال phase plane نستطيع معرفة شكل الاستجابة الزمنية للنظام، في مايلي ربط لشكل مخطط الphase plane مع الاستجابة الزمنية للنظام.



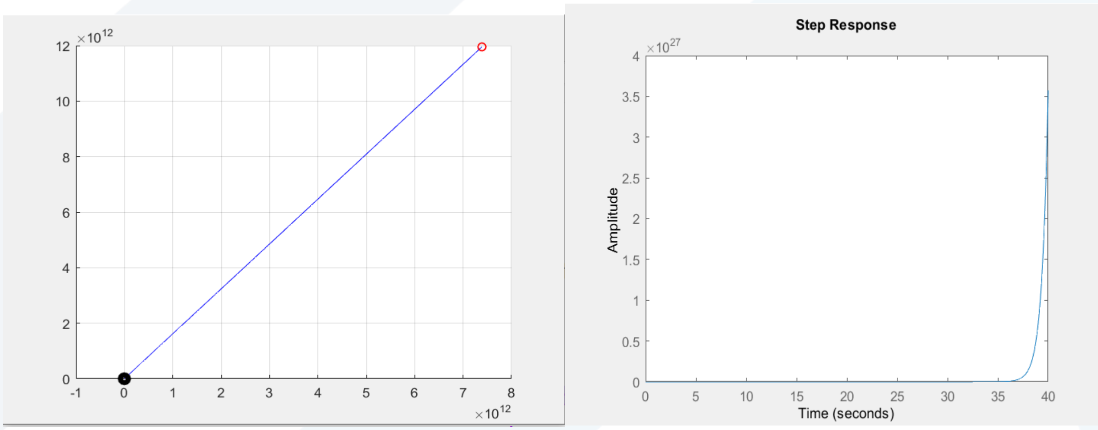
النظام مستقر زائد التخميد



النظام مهتز غير متخامد



النظام مستقر ناقص التخميد



النظام غير مستقر حيث نلاحظ من الphase plane ذهابه إلى اللانهاية (النقطة الحمراء هس نهاية المخطط والنقطة السوداء هي بداية المخطط)