تحكم لا خطي

المحاضرة السادسة (عملي)

رسم الphase plane للأنظمة اللاخطية

م. زينة أديب علي

قسم الروبوت سنة رابعة-فصل أول

الغاية من الجلسة:

1. رسم الphase plane للأنظمة اللاخطية .
2. دراسة استقرار النظام باستخدام الphase plane .

مثال1:

ارسم مخطط الphase plane للنظام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

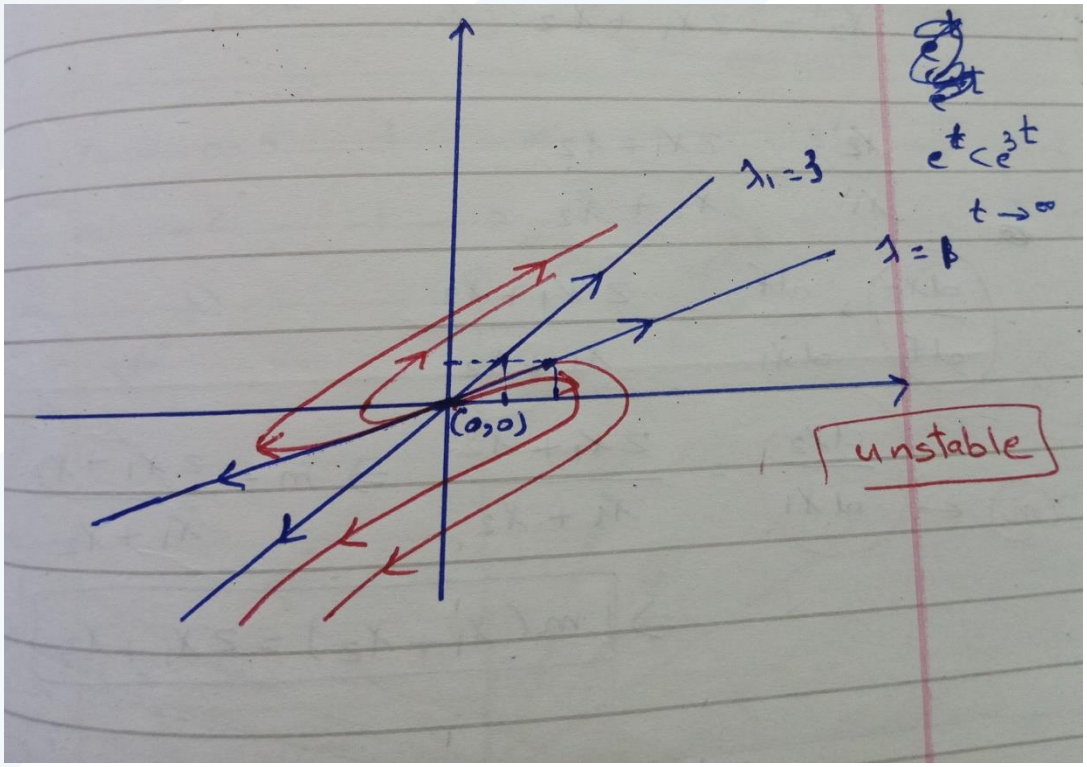
- نوجد القيم المميزة للنظام فينتج لدينا:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 3$$

- نوجد المتجهات المميزة:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- نقوم برسم المتجهات المميزة:



- كما نلاحظ أن الاتجاه على الأسهم متباعد لأن القيم المميزة موجبة .
- نحدد اتجاه المسار وذلك بأخذ نقطة عشوائية مثلاً (1,0) ونضربها بالمصفوفة A لتحديد الاتجاه:

$\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -2 & 5\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$ أي سيكون اتجاه المسار من النقطة (1,0) باتجاه النقطة (-1,-2) (باتجاه النقطة وليس بالضرورة أن يمر منها)، وبالتالي ينتج الphase plane للنظام.

مثال2:

ارسم مخطط الphase plane للنظام التالي:

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

الحل:

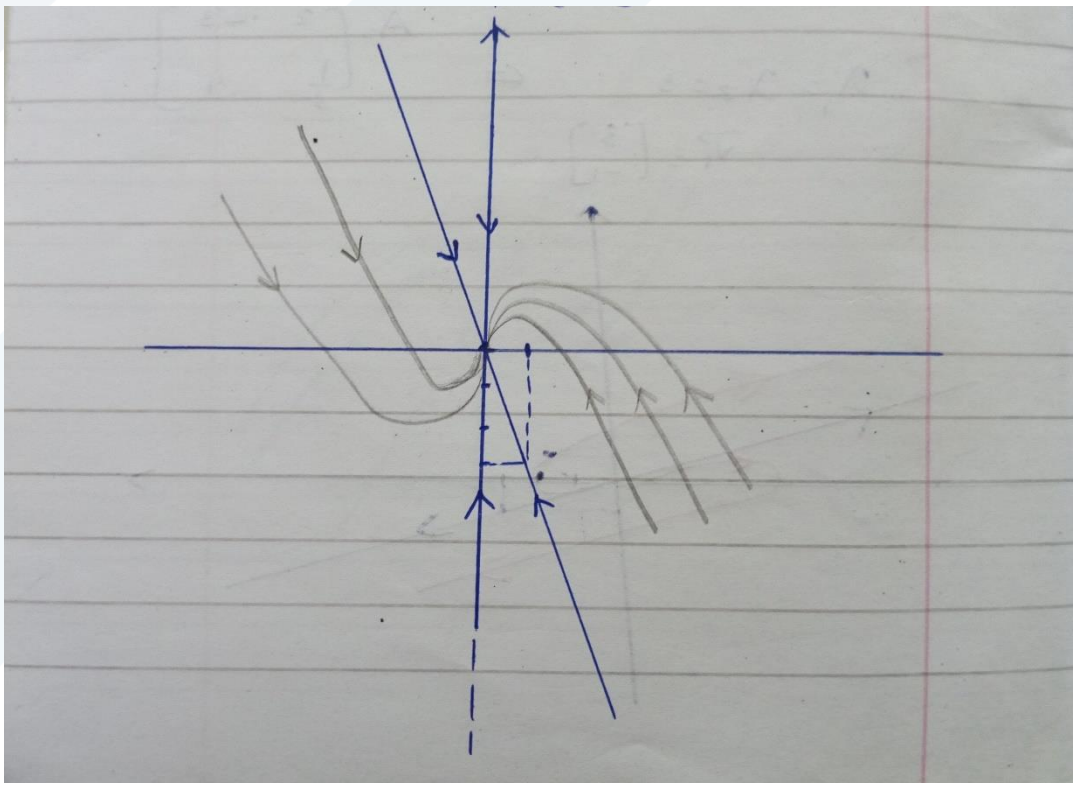
- نوجد القيم المميزة للنظام فينتج لدينا:

$$s_1 = -3 \quad s_2 = -2$$

- نوجد المتجهات المميزة:

$$p_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

- نقوم برسم المتجهات المميزة: (اتجاه الأسهم متقارب باتجاه نقطة الاتزان لأن القيم المميزة سالبة).
- نحدد اتجاه المسار بأخذ نقطة عشوائية مثل (1,0) ونضربها بالمصفوفة (A) فينتج لدينا:
- $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & -5\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$ أي سيكون اتجاه المسار من النقطة (1,0) باتجاه النقطة (-3,3) (باتجاه النقطة وليس بالضرورة أن يمر منها)، وبالتالي ينتج الphase plane للنظام:



مثال3:

ارسم مخطط الphase plane للنظام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

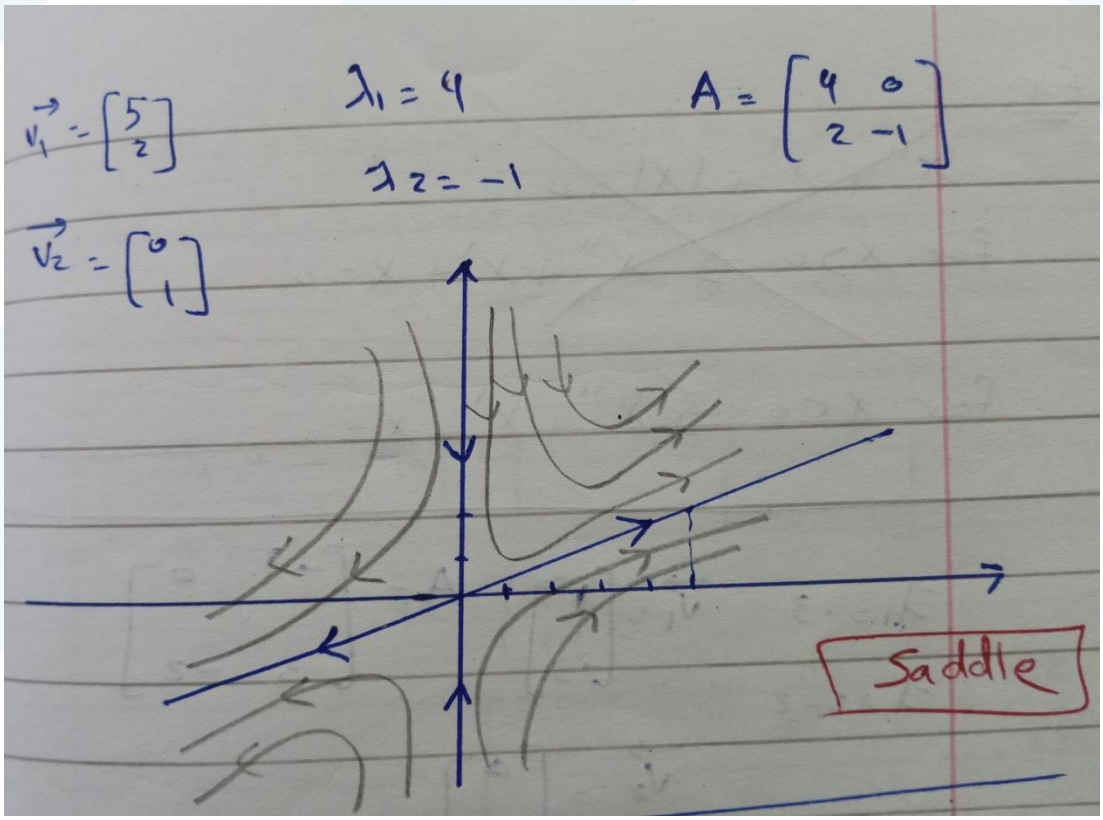
- نوجد القيم المميزة للنظام فينتج لدينا:

$$s_1 = 4 \quad s_2 = -1$$

- نوجد المتجهات المميزة:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- نقوم برسم المتجهات المميزة: (اتجاه الأسهم متقارب باتجاه نقطة الاتزان على الشعاع p_2 لأنه يقابل القيمة المميزة السالبة ويكون اتجاه الأسهم متباعد على الشعاع$p1$ المقابل للقيمة المميزة الموجبة
- نحدد اتجاه المسار بأخذ نقطة عشوائية مثل (1,0) ونضربها بالمصفوفة (A) فينتج لدينا:
- $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ أي سيكون اتجاه المسار من النقطة (1,0) باتجاه النقطة (4,2) (باتجاه النقطة وليس بالضرورة أن يمر منها)، وبالتالي ينتج الphase plane للنظام:



مثال3:

ارسم مخطط الphase plane للنظام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

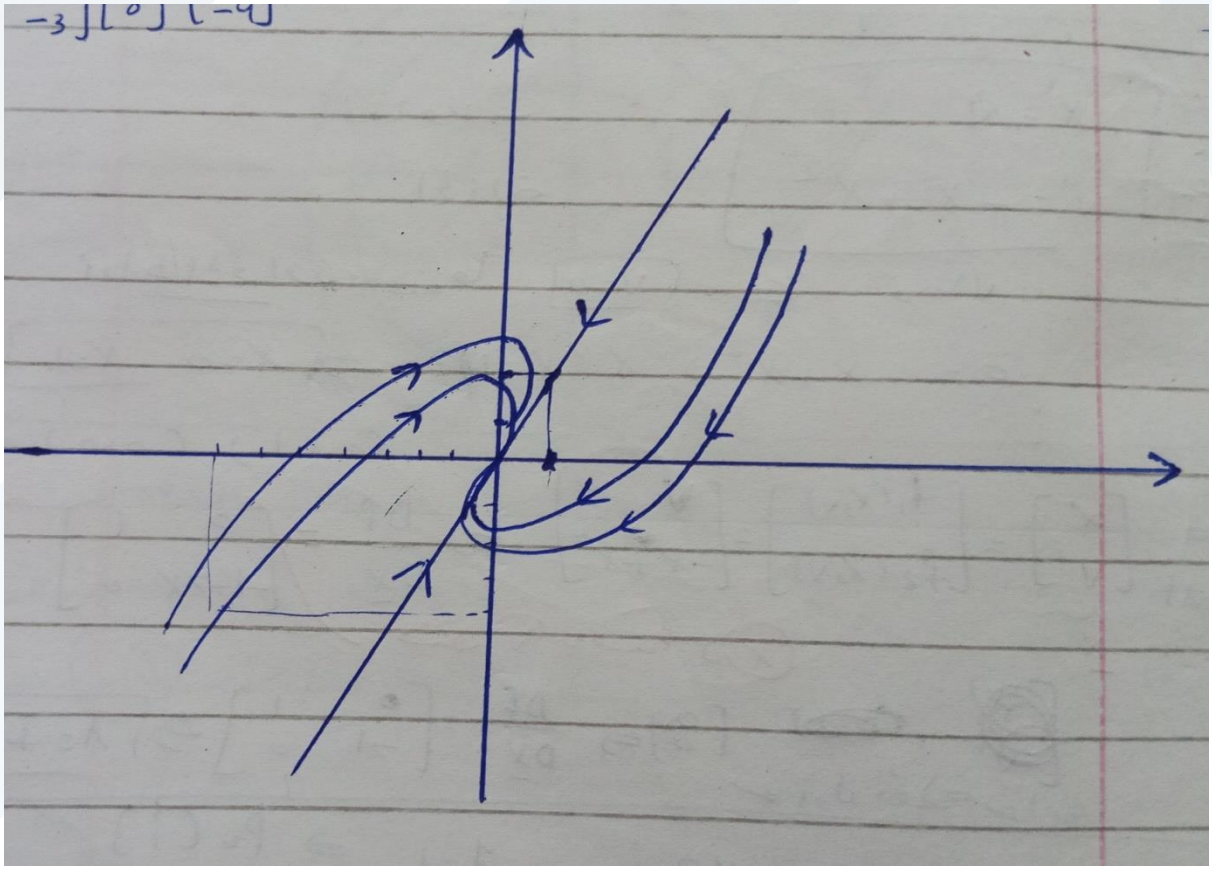
- نوجد القيم المميزة للنظام فينتج لدينا:

$$s_1 = -5 \quad s_2 = -5$$

- نوجد المتجهات المميزة:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- نقوم برسم المتجهات المميزة: (اتجاه الأسهم متقارب باتجاه نقطة الاتزان لأن القيمة المميزة سالبة.
- نحدد اتجاه المسار بأخذ نقطة عشوائية مثل (1,0) ونضربها بالمصفوفة (A) فينتج لدينا:
- $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$ أي سيكون اتجاه المسار من النقطة (1,0) باتجاه النقطة (-7,-4) (باتجاه النقطة وليس بالضرورة أن يمر منها)، وبالتالي ينتج الphase plane للنظام:



مثال3:

ارسم مخطط الphase plane للنظام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1/3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

- نوجد القيم المميزة للنظام فينتج لدينا:

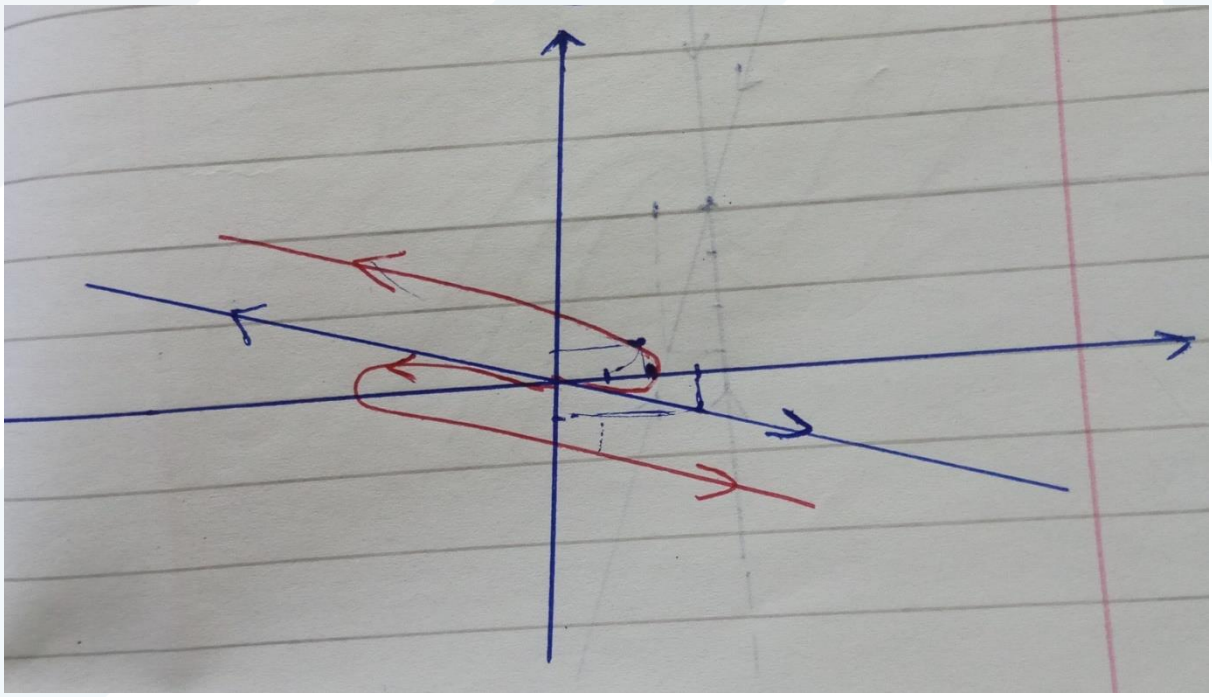
$$s_1 = 3 \quad s_2 = 3$$

- نوجد المتجهات المميزة:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- نقوم برسم المتجهات المميزة: (اتجاه الأسهم متباعد من نقطة الاتزان باتجاه اللانهاية لأن القيمة المميزة موجبة.
- نحدد اتجاه المسار بأخذ نقطة عشوائية مثل (1,0) ونضربها بالمصفوفة (A) فينتج لدينا:
- $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1/3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ أي سيكون اتجاه المسار من النقطة (1,0) باتجاه النقطة (2,1/3)

(باتجاه النقطة وليس بالضرورة أن يمر منها)، وبالتالي ينتج الphase plane للنظام:



رسم مخطط الphase plane للأنظمة اللاخطية:

مثال1:

ارسم مخطط الphase plane للنظام:

$$x'' = -x + x^2$$

الحل:

- سأقوم بإيجاد مخطط الطاقة الكامنة لسهولة الفهم فيزيائياً لرسم مخطط الphaseplane حيث لدينا حسب قانون نيوتن الثاني:

$v = -\frac{\partial p}{\partial x}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$p = -\int v\partial x$$

$$p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

- نقوم بوضع معادلات الحالة:

$$x' = v \quad v' = -x + x^2$$

- نوجد نقاط التوازن (يحدث التوازن عندما يذهب المشتق إلى الصفر).

$$x' = v = 0 \quad v' = 0$$
$$-x + x^2 = 0$$
$x(x-1) = 0$ وبالتالي نحصل على نقطتي اتزان:

وهما (0,0) (1,0).

ويمكن توضيح نقطتي الاتزان برسم مخطط الطاقة الكامنة:

يتضح لدينا من المخطط وجود نقطتي اتزان سنوجد القيم المميزة المقابلة لها لمعرفة اتجاه مسار الphase plane.

لإيجاد القيم المميزة نوجد مصفوفة الجاكوبيان:

$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial x} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{bmatrix}$ وبالتالي تصبح لدينا مصفوفة الجاكوبيان على الشكل التالي:

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+2x & 0 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم المميزة من أجل أول نقطة اتزان حيث نعوض (0,0) في المصفوفة فتصبح على الشكل التالي:

$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ وبإيجاد القيم المميزة عند هذه النقطة ينتج لدينا $s_{1,2} = \pm j$ أي أن النظام عند نقطة الاتزان (0,0) مهتز غير متخامد (على حافة الاستقرار، مستقر بشكل هامشي) أي أنه يهتز بمطالات ثابتة إلى اللانهاية، أي أن مخطط الphase plane عند هذه النقطة عبارة عن دوائر كما رأينا سابقاً (يدور حول نقطة الاتزان).

نوجد القيم المميزة من أجل ثاني نقطة اتزان حيث نعوض (1,0) في المصفوفة فتصبح على الشكل التالي:

$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ وبإيجاد القيم المميزة عند هذه النقطة ينتج لدينا $s_1 = 1 \;\; s_2 = -1$ أي أن النظام عند نقطة الاتزان (1,0) يمتلك قيمتين مميزيتين أحدهما سالبة والأخرى موجبة أي لدينا متجهان مميزان أحدهما الاتجاه عليه متباعد والآخر متقارب .

برسم الphase plane عند النقطتين والوصل بين مخططات الphase plane *ينتج لدينا*.