

التحليل الرياضي ١

ميكاترونيكس

محاضرة 10

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

المعادلات التفاضلية

تمارين

1 أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

• $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

• $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

• $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$

الحل

$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$



$e^{-2y} dy = e^{3x} dx$



$3e^{-2y} + 2e^{3x} = c.$

$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$



$ye^y dy = (e^{-x} + e^{-3x}) dx$



$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = c$

$(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$



$\frac{e^y}{(e^y + 1)^2} dy = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^3} dx$



$-(e^y + 1)^{-1} = \frac{1}{2} (e^x + 1)^{-2} + c.$

تمارين

2 أوجد حل كل من المسائل الابتدائية الآتية:

• $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$ • $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$ • $\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$

الحل

$$\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1 \longrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} dx = 4 dt \longrightarrow \tan^{-1} x = 4t + c.$$

بتعويض $x(\pi/4) = 1$ نحصل على $c = -3\pi/4$ بالتالي يكون الحل $\tan^{-1} x = 4t - \frac{3\pi}{4}$ $\longleftarrow x = \tan\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1 \longrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1-x}{x^2} dx = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx \longrightarrow \ln |y| = -\frac{1}{x} - \ln |x| = c$$

$$\longrightarrow xy = c_1 e^{-1/x}$$

بتعويض $y(-1) = -1$ نحصل على $c_1 = e^{-1}$ بالتالي يكون الحل $y = e^{-(1+1/x)}/x$.

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{1-2y} dy = dt \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2} \ln |1-2y| = t + c \quad \longrightarrow \quad 1-2y = c_1 e^{-2t}$$

بتعويض $y(0) = 5/2$ نحصل على $c_1 = -4$ بالتالي يكون الحل $y = 2e^{-2t} + \frac{1}{2}$

تمارين

3 أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

• $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

• $y' + 3x^2y = x^2$

• $y' = 2y + x^2 + 5$

الحل

$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

عامل التكميل $e^{\int dx} = e^x$ \rightarrow $\frac{d}{dx} [e^x y] = e^{4x}$ \rightarrow $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$

$y' + 3x^2y = x^2$

عامل التكميل $e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$ \rightarrow $\frac{d}{dx} [e^{x^3} y] = x^2 e^{x^3}$ \rightarrow $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$

$y' = 2y + x^2 + 5$

عامل التكميل $e^{-\int 2 dx} = e^{-2x}$ \rightarrow $\frac{d}{dx} [e^{-2x} y] = x^2 e^{-2x} + 5e^{-2x}$



$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} + ce^{2x}$

4 أوجد حل كل من المسائل الابتدائية الآتية:

• $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

• $y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

• $(x + 1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

الحل

$xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^x$

$e^{\int (1/x)dx} = x$ عامل التكميل

$\frac{d}{dx} [xy] = e^x$

$y = \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x}$

$y = \frac{1}{x}e^x + \frac{2-e}{x}$ بالتالي يكون الحل

نحصل على $c = 2 - e$

بتعويض $y(1) = 2$

$y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 2y$

$e^{-\int (1/y)dy} = \frac{1}{y}$ عامل التكميل

$\frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y}x \right] = 2$

$x = 2y^2 + cy$

$x = 2y^2 - \frac{49}{5}y$ بالتالي يكون الحل

نحصل على $c = -49/5$

بتعويض $y(1) = 5$

$$(x + 1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$$

$$y' + \frac{1}{x+1} y = \frac{\ln x}{x+1}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx} [(x + 1)y] = \ln x$$



$$y = \frac{x}{x+1} \ln x - \frac{x}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$e^{\int [1/(x+1)] dx} = x + 1 \quad \text{عامل التكميل}$$

$$y = \frac{x}{x+1} \ln x - \frac{x}{x+1} + \frac{21}{x+1}$$

بالتالي يكون الحل

نحصل على $c = 21$

بتعويض $y(1) = 10$

تمارين

5) تطبق قوة محرضة كهربائية 30 فولت على دائرة متسلسلة LR بحيث لدينا ملف كهربي 0.1 هنري ومقاومة 50 أوم. أوجد شدة التيار $i(t)$. إذا علمت أن $i(0) = 0$. حدد شدة التيار عندما $t \rightarrow \infty$

الحل

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t), L = 0.1, R = 50, E(t) = 50 \quad \longrightarrow \quad i = \frac{3}{5} + ce^{-500t}$$

$$i(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad c = -3/5 \quad \longrightarrow \quad i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 3/5$$

تمارين

- 6 تطبيق قوة محرّضة كهربائية 200 فولت على دائرة متسلسلة RC بحيث لدينا مكثفة 5×10^{-6} فاراد ومقاومة 1000 أوم. أوجد شحنة المكثفة $q(t)$ إذا علمت أن $i(0) = 0.4$. أوجد الشحنة وشدة التيار في اللحظة $t = 0.005s$ وحدد الشحنة عندما $t \rightarrow \infty$.

الحل

$$R dq/dt + (1/C)q = E(t), R = 1000, C = 5 \times 10^{-6}, E(t) = 200.$$

$$\longrightarrow q = \frac{1}{1000} + ce^{-200t} \quad \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} \quad i = -200ce^{-200t}$$

$$i(0) = 0.4 \quad \longrightarrow \quad c = -\frac{1}{500}, q(0.005) = 0.003 \text{ coulombs}$$

$$i(0.005) = 0.1472 \text{ amps.}$$

$$q \rightarrow \frac{1}{1000} \text{ as } t \rightarrow \infty.$$