تحليل رياضي 2

المحاضرة 2

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

التكاملات المعتلة بانقطاعات لانهائية

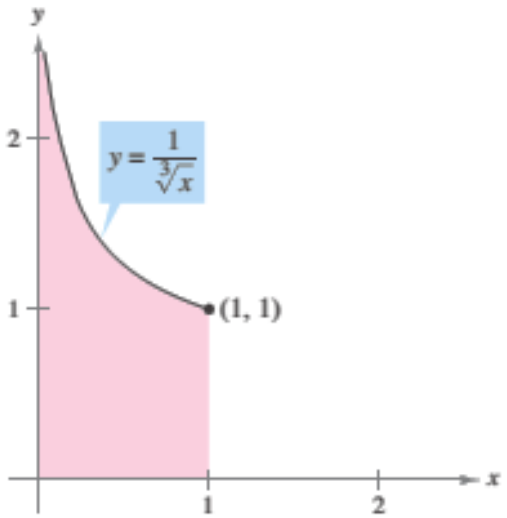
Improper Integrals with Infinite Discontinuities

1) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$ التابع f منقطع عند $x = b$

2) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$ التابع f منقطع عند $x = a$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ التابع f منقطع عند $x = c$ داخل مجال المكاملة.

في الحالتين الأولى والثانية نقول عن التكامل أنه متقارب (convergent) إذا كانت النهاية موجودة، ويكون متباعد (divergent) فيما عدا ذلك. أما في الحالة الثالثة فيكون متباعد إذا كان أحد التكاملين متباعد.



مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

الحل

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^1 x^{-1/3}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/3}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{3}{2}(1-a^{2/3})\right] = \frac{3}{2}$$

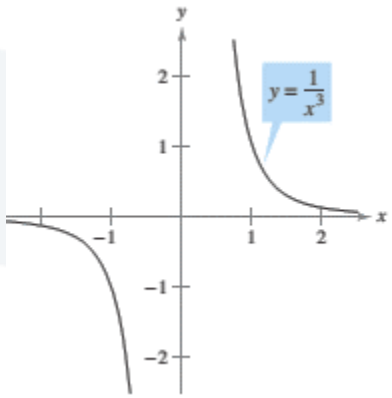
التكامل المعطى متقارب

مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_0^2 \frac{1}{x^3}dx$

الحل

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3}dx = \int_0^2 x^{-3}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 x^{-3}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_a^2 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{-1}{2}(1-a^{-2})\right] = \infty$$

التكامل المعطى متباعد



مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}dx$

الحل

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{x^3}dx$$

التكامل المعطى متباعد

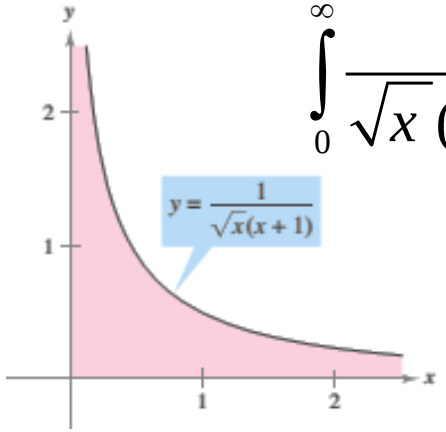
التكامل المعطى متباعد

مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx$

الحل

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_a^1+\lim_{b\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^b=2\left(\frac{\pi}{4}\right)-0+2\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi$$



تمارين

1 أوجد قيم p التي يكون من أجلها التكامل الآتي متقارب والقيم التي يكون من أجلها التكامل متباعد

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

الحل:

- If $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

- If $p = 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big]_1^b = \infty.$$

التكامل المعطى متقارب من أجل $p > 1$
ومتباعد من أجل $p \leq 1$

تمارين

2 أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}} \qquad \int_{0}^{1} x\ln x\,dx$$

الحل:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$$

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4} = \lim_{b\to-\infty}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_b^2 = \lim_{b\to-\infty}\left(\tan^{-1}1-\tan^{-1}\frac{b}{2}\right) = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$\int_{\infty}^{1} \frac{du}{u^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_b^1 + \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^c = \lim_{b\to\infty}\left(-1+\frac{1}{b}\right) + \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{c}-(-1)\right] = (-1+0)+(0+1) = 0$$

تمارين

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)^{3/2}} + \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)^{3/2}}$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2+4 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\infty}^{4} \frac{du}{2u^{3/2}} + \int_{4}^{\infty} \frac{du}{2u^{3/2}} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_b^4 + \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_4^c$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) + \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+0\right)+\left(0+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\int_0^1 x\ln x\,dx$$

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_b^1 = \lim_{b\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{b^2}{2}\ln b - \frac{b^2}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4} - \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln b}{\left(\frac{2}{b^2}\right)} + 0$$

$$= -\frac{1}{4} - \lim_{b\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(-\frac{4}{b^3}\right)} = -\frac{1}{4} + \lim_{b\to 0^+}\left(\frac{b^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}+0 = -\frac{1}{4}$$

الفصل الثاني: السلاسل اللانهائية

Infinite Series

١. المتتاليات Sequences

٢. السلاسل والتقارب Series and Convergence

٣. مقارنة السلاسل Comparisons of Series

٤. السلاسل المتناوبة Alternating Series

Sequences المتتاليات

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

terms حدود

general terms الحد العام

- **Listing the Terms of a Sequence سرد عناصر المتتالية**

$$\{a_n\} = \{3+(-1)^n\} \quad \begin{cases} a_1 = 3+(-1)^1 = 2 \\ a_2 = 3+(-1)^2 = 4 \\ a_3 = 3+(-1)^3 = 2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{n}{1-2n}\right\} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{1-2(1)} = -1 \\ b_2 = \dfrac{2}{1-2(2)} = \dfrac{-2}{3} \\ b_3 = \dfrac{3}{1-2(3)} = \dfrac{-3}{5} \\ \vdots \end{cases}$$

• Limit of a Sequence نهاية متتالية

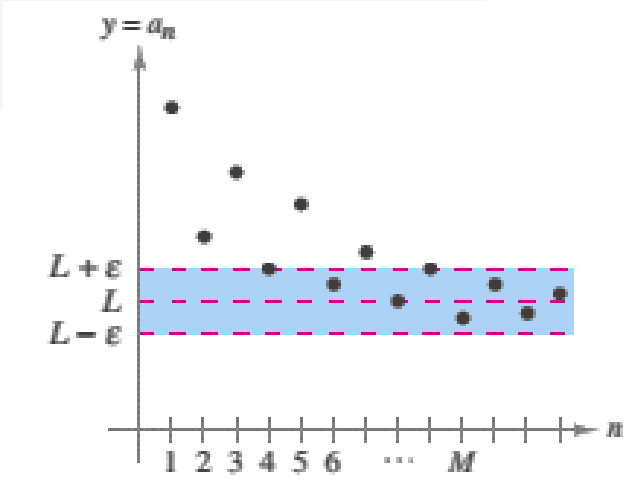
$\{a_n\}$ *converge to* L

المتتالية $\{a_n\}$ تتقارب إلى L

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ ; \ |a_n - L| < \varepsilon \ , \ \forall n > M$$



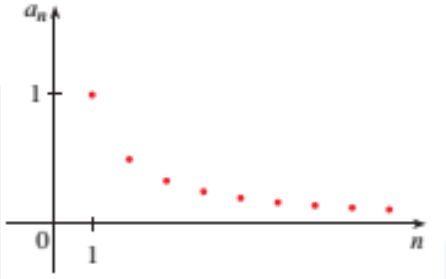
$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

$$\Rightarrow \ a_{1000} = 0.001 \ , \ a_{1000000} = 0.000001$$

$$\Rightarrow \ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

a_n is convergent

المتتالية متقاربة



(a) $a_n = \frac{1}{n}$

$$b_n = (-1)^n$$

$$\Rightarrow \ -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$$\Rightarrow \ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & ; n = 1, 3, 5, \ldots \\ -1; & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

b_n is divergent

المتتالية متباعدة

(b) $b_n = (-1)^n$

• Properties of Limits of a Sequences خواص نهايات المتتاليات

- $f \;;\; \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad f(n) = a_n \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = L \;,\; \lim_{n\to\infty} b_n = K$

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$
2. $\lim_{n\to\infty} c a_n = cL \;,\; \forall c \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{K} \;;\; b_n \neq 0 \,,\, K \neq 0$
5. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \;,\; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ABSOLUTE VALUE THEOREM

Examples

أمثلة

1. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = f(n)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e$ المتتالية متقاربة

2. $a_n = 3+(-1)^n = \begin{cases} 2\ ;\ n \text{ is odd} \\ 4\ ;\ n \text{ is even} \end{cases}$ المتتالية متباعدة **النهاية غير موجودة**

3. $a_n = \frac{n}{1-2n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)-2} = \frac{-1}{2}$$

المتتالية متقاربة

هل المتتالية الآتية متقاربة ؟

Is the following sequence convergent?

$$a_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(\ln 2)2^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0$$

المتتالية متقاربة

- **Finding the nth Term of a Sequence التعرف على الحد العام للمتتالية**

أوجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي

$$\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{8}{5},\frac{16}{7},\frac{32}{9},\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{1} \Rightarrow a_1 = \frac{2^1}{2(1)-1}\\
a_2 &= \frac{4}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{2^2}{2(2)-1}\\
a_3 &= \frac{8}{5}, \Rightarrow a_3 = \frac{2^3}{2(3)-1}\\
a_4 &= \frac{16}{7} \Rightarrow a_4 = \frac{2^4}{2(4)-1}\\
a_5 &= \frac{32}{9} \Rightarrow a_5 = \frac{2^5}{2(5)-1}
\end{aligned}\right\} a_n = \frac{2^n}{2n-1}$$

$$f(x) = \frac{2^x}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2x-1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)2^x}{2} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2n-1} = \infty$$

divergent

المتتالية متباعدة

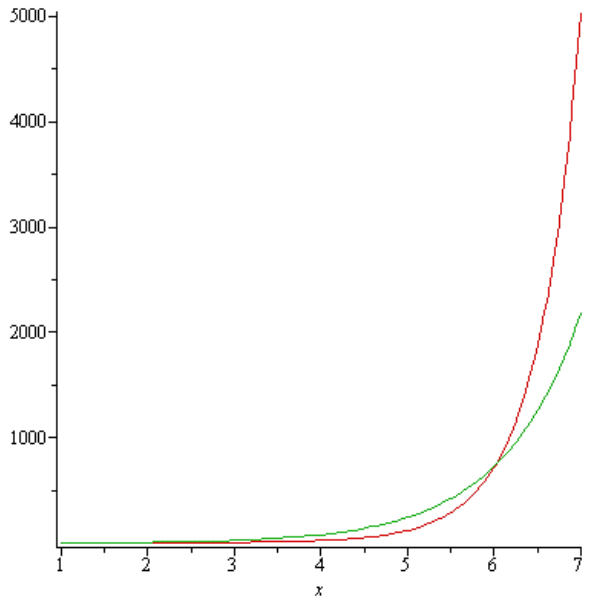
$$\frac{-2}{1},\frac{8}{2},\frac{-26}{6},\frac{80}{24},\frac{-242}{120},\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-2}{1} & \Rightarrow a_1 &= \frac{(-1)^1(3^1-1)}{1!}\\
a_2 &= \frac{8}{2} & \Rightarrow a_2 &= \frac{(-1)^2(3^2-1)}{2!}\\
a_3 &= \frac{-26}{6} & \Rightarrow a_3 &= \frac{(-1)^3(3^3-1)}{3!}\\
a_4 &= \frac{80}{24} & \Rightarrow a_4 &= \frac{(-1)^4(3^4-1)}{4!}\\
a_5 &\frac{-242}{120} & \Rightarrow a_5 &= \frac{(-1)^5(3^5-1)}{5!}
\end{aligned}\right\} a_n = \frac{(-1)^n(3^n-1)}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(3^n-1)}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3^n-1)}{n!} = 0$$

convergent

المتتالية متقاربة



تمارين

1 أوجد صيغة للحد العام لكل من المتتاليات الآتية:

- $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$
- $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}, \ldots$
- $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$

الحل:

$-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$

$a_n = n - 4, \quad n = 1, 2, \ldots$

$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}, \ldots$

$a_n = \frac{2n-5}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$

$1, -4, 9, -16, 25, \ldots$

$a_n = (-1)^{n+1} n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

2 أي من المتتاليات الآتية متقاربة وأي منها متباعدة، وأوجد النهاية في حال كانت المتتالية متقاربة.

- $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$
- $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$
- $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
- $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

تمارين

الحل:

$$a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-3\right)} = -\infty$$

المتتالية متباعدة

$$a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{1+\left(\frac{1}{n}\right)} = 0$$

المتتالية متقاربة

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln 1-\ln n}{\ln n}\right) = e^{-1}$$

المتتالية متقاربة

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\ln\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln(3n+1)-\ln(3n-1)}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\frac{3}{3n+1}-\frac{3}{3n-1}}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{6n^2}{(3n+1)(3n-1)}\right) = \exp\left(\frac{6}{9}\right) = e^{2/3}$$

المتتالية متقاربة

تمارين

3 إذا فرضنا أن كل متتالية من المتتاليات الآتية متقاربة، أوجد نهايتها.

- $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{72}{1 + a_n}$
- $a_1 = -4, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$
- $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 12 - \sqrt{a_n}$

الحل:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{72}{1 + a_n}$$

بما أن المتتالية متقاربة، بالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{72}{1+a_n} \Rightarrow L = \frac{72}{1+L} \Rightarrow L(1+L) = 72 \Rightarrow L^2 + L - 72 = 0 \Rightarrow L = -9 \text{ or } L = 8$$

$$\xrightarrow{a_n > 0 \text{ for } n \geq 1} L = 8$$

$$a_1 = -4, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$$

بما أن المتتالية متقاربة، بالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{8+2a_n} \Rightarrow L = \sqrt{8+2L} \Rightarrow L^2 - 2L - 8 = 0 \Rightarrow L = -2 \text{ or } L = 4 \xrightarrow{a_n > 0 \text{ for } n \geq 3} L = 4$$

تمارين

$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 12 - \sqrt{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(12-\sqrt{a_n}\right) \Rightarrow L = \left(12-\sqrt{L}\right) \Rightarrow L^2 - 25L + 144 = 0$$

$$12-\sqrt{a_n} < 12 \text{ for } n \geq 1$$

$$\Rightarrow L = 9 \text{ or } L = 16 \longrightarrow L = 9$$