د. مازن الجلاد

مقرر الكهرطيسية

الطلاب الأعزاء:

يتضمّن مقرر الكهرطيسية لهذا العام ثلاث أجزاء:

الجزء الأول: تتمات في الكهرباء الساكنة: حيث نتعرّف على خواص الناقل المتوازن كهربائياً، والسعة الكهربائية لناقل، والمكثفة. وبعدها ندرس الطاقة الكامنة لجملة شحنات، وننتقل بعد ذلك إلى دراسة المعادلات الموضعية للكهرباء الساكنة والمغناطيسية الساكنة. ونستنتج علاقات العبور لكل من الحقلين الكهربائي والمغناطيسي.

الجزء الثاني: عمل قوة لابلاس والتحريض الكهرطيسي: حيث نستذكر قوة لابلاس و نصل إلى نظرية مكسويل المعبرة عن عمل قوة لابلاس، لنستنتج الطاقة الكامنة لدارة وعدة دارات. بعدها ننتقل إلى ظاهرة التحريض الكهرطيسي، وهي ظاهرة كنتم قد تعرّفتم عليها في المرحلة الثانوية، ولكن هنا نتناولها بتفصيل أكثر. ونصل بعد ذلك إلى حساب الطاقة المغناطيسية لدارة منعزلة ولدارتين في تأثير متبادل وبعد ذلك نستنتج الطاقة المغناطيسية بدلالة الحقل المغناطيسي.

الجزء الثالث: انتشار الأمواج الكهرطيسية: حيث نقدم معادلات مكسويل ، ونستنتج معادلة انتشار الموجة، ونكتب حل هذه المعادلة في حالة الموجة المستوية ، وندرس بشكل خاص الموجة المستوية الجيبية المتقدّمة. واستقطاب الموجة كما ندرس الأوساط ثنائية الانكسار والتي تتغيّر فيها قرينة الانكسار حسب استقطاب الموجة) أي حسب اتجاه الحقل الكهربائي للموجة(كما ندرس الموجة في وسط مشتت) مبدّد(وهو وسط تتغيّر فيه سرعة انتشار الموجة حسب تواتر الموجة. لنصل أخيراً إلى انعكاس موجة كهرطيسية عن سطح ناقل مثالي وعن سطح نا قل حقيقي.

الناقل في حالة التوازن الكهربائي

تنويه: نستخدم في هذا الدرس الحرف العريض في المعادلات للدلالة على أنّ المقدار الذي يدل عليه الحرف هو شعاع.
مثال: الحرف $\mathbf{E}$ يمثّل شعاع الحقل الكهربائي، بينما الحرف E يمثّل القيمة السلمية للحقل. كما أننا نستخدم أحياناً الرمز المألوف لديكم وهو $\vec{E}$ المعبّر عن شعاع الحقل الكهربائي.

تحوي بعض الفقرات على تمارين تطبيقية مباشرة نهيب بالطلاب حلها أثناء دراسة الدرس فهي تساعد في استيعاب المفاهيم الواردة.

1. خصائص عامة

1.1 تعاريف

الناقل: هو جسم يحوي شِحَناً يمكنها التحرك بحرية بتأثير حقل كهربائي ساكن. مثال: قطعة من النحاس.

الدراسة المكروسكوبية والدراسة الماكروسكوبية: نذكّر بأنّه نقول إننا نقوم بدراسة مكروسكوبية عند دراسة المادة بأخذ أبعاد من مرتبة أبعاد العناصر الأولية للمادة (ذرات وجزيئات، $d \sim 1\mathring{A}$). وعند دراستنا للمادة ضمن أبعاد كبيرة بالنسبة إلى أبعاد العناصر الأولية $\left(d >> 1\mathring{A}\right)$ نقول عن الدراسة إنها ماكروسكوبية.

ضمن هذا التعريف يكون الجسم الصلب مادة مستمرة (متصلة) من وجهة نظر ماكروسكوبية ومتقطعة من وجهة النظر المكروسكوبية. الأمر نفسه ينطبق على الشحنة ضمن ناقل، فالشحن الحرة ضمن معدن هي إلكترونات منفصلة، أما شحنة حجم ماكروسكوبي فهي شحنة متصلة.

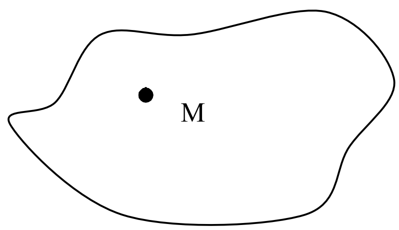
الناقل في حالة التوازن الكهربائي: في درجة الحرارة العادية تتحرك الشحن داخل الناقل في جميع الاتجاهات، فإذا كان الناقل في حالة توازن فإن هذه الحركة لا تغيّر من توزع الشحن ضمن الناقل، أي تبقى كثافة الشحنة في كل نقطة من الناقل ثابتة مع الزمن، فإذا تأملنا حجماً صغيراً $d\tau$ بجوار نقطة M نجد أن هنالك شحناً عنصرية تغادر هذا الحجم وأخرى تدخله؛ والنتيجة هي أن الشحنة الكلية للحجم العنصري تبقى ثابتة. من ناحية أخرى يمكننا القول إن الحركة الماكروسكوبية للشحن معدومة.

سؤال: قلنا إنّ الشحنة الكلية للناقل المتوازن كهربائياً تكون ثابتة، هل هذا الشرط كافٍ ليكون الناقل متوازناً؟ في حال النفي ما الشروط الأخرى؟

في الفقرات اللاحقة سوف تكون دراستنا من وجهة نظر ماكروسكوبية أي تكون الشحن ضمن الناقل في حالة التوازن ساكنة.

2.1 خواص الناقل المتوازن

أ. لنتأمل ناقلاً في حالة توازن كهربائي، نتأمل شحنة dq داخل الناقل بجوار النقطة M .



لو كان الحقل $\mathbf{E}$ في النقطة M غير معدوم لخضعت الشحنة لقوة كهربائية:

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}$$

إذن سوف تتحرك هذه الشحنة بتأثير القوة الكهربائية.

والناقل لن يكون حينئذ في حالة توازن.

النتيجة: حتى يكون الناقل متوازناً كهربائياً يجب أن ينعدم الحقل الكهربائي داخل الناقل.

ب. لنحسب تغير الكمون عند الانتقال من نقطة إلى أخرى ضمن الناقل:

لتكن M نقطة داخل الناقل و M' نقطة أخرى مجاورة لـ M، ننتقل من M إلى M' عبر انتقال عنصري $\overrightarrow{d\ell}$.

رأينا سابقاً أنّ فرق الكمون بين النقطتين M' و M يُعطى بالعلاقة:

$$dV = -\overrightarrow{grad}\, V \,.\, \overrightarrow{d\ell}$$

ونعلم أنّ: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ، والحقل معدوم داخل الناقل المتوازن.

النتيجة: إنّ تغيّر الكمون معدوم داخل الناقل. وجميع نقاط الناقل تتمتّع بالكمون نفسه.

ج. بناء على النتيجة السابقة: جميع نقاط سطح الناقل تتمتّع بالكمون نفسه.

إذن سطح الناقل هو سطح تساوي كمون.

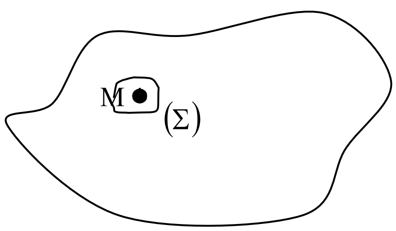
ونعلم مما تعلمناه في السنة الأولى (راجع دروس السنة الأولى، أو بحث أدوات رياضية: فقرة (3.5.1) من كتاب الكهرطيسية:

إنّ خط الحقل يعامد سطح تساوي الكمون (الذي اشتق منه الحقل)

إذن الحقل بجوار النقطة المعتبرة من سطح الناقل يكون عمودياً على هذا السطح.

النتيجة: الحقل الكهربائي بجوار نقطة من سطح ناقل يكون عمودياً على سطح الناقل في تلك النقطة.

د. لنأخذ الحجم v بجوار النقطة M داخل الناقل، وليكن (Σ) السطح الذي يحد v . لما كان الحقل معدوماً داخل الناقل فإن تدفق هذا الحقل من خلال Σ معدوم، لنطبق نظرية غاوس:



$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iint_{(\Sigma)} \mathbf{E}.d\mathbf{S} = 0$$

حيث Q_{int} الشحنة داخل الناقل.

إذن الشحنة الكلية معدومة داخل الحجم (v)، أي داخل الحجم (v) يكون معتدل كهربائياً، ولما كان اختيارنا للنقطة M من دون شروط خاصة، فإن كل داخل الناقل هو معتدل كهربائياً.

وإذا شحنا الناقل فسوف يبقى داخله معتدلاً كهربائياً، والشحنات المضافة إلى الناقل لا يُمكنها إلا أن تتوضع على السطح.

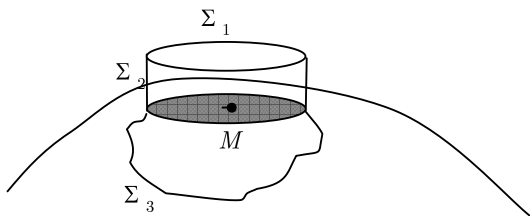
النتيجة: في حال كان الناقل مشحوناً كهربائياً ، فإنّ الشحنات تتوضع على سطح الناقل.

3.1 نظرية كولون

لنتأمل ناقلاً مشحوناً. كما رأينا، تتوزع الشحنات على سطح الناقل.

لتكن σ كثافة الشحنة السطحية، بوجه عام هذه الكثافة ليست منتظمة. لتكن M نقطة من سطح الناقل، ليكن (D) سطحاً دائرياً بجوار هذه النقطة مساحته Σ. نأخذ هذا السطح صغيراً بقَدْرٍ يكفي لإهمال تغيرات الكثافة السطحية σ عليه.

لننشئ السطح المغلق المكون من (Σ_1) قاعدة أسطوانة موازية للسطح بجوار M وقريبة من M قرباً يسمح باعتبار الحقل على هذا السطح مساوياً للحقل على سطح الناقل، ومن السطح الجانبي للأسطوانة (Σ_2) المحدود من الأسفل بسطح الناقل، إضافة إلى السطح (Σ_3) داخل الناقل. انظر الشكل الآتي:



إن تدفق الحقل من خلال السطح (Σ_3) معدوم لأن الحقل معدوم داخل الناقل،

وتدفق الحقل من خلال السطح (Σ_2) معدوم أيضاً لأن الحقل عمودي على سطح الناقل.

إذن التدفق من خلال السطح المغلق يساوي التدفق من خلال (Σ_1) الذي يساوي بدوره $\phi = E(M)\Sigma$.

إن الشحنة المحتواة ضمن السطح المغلق تساوي $q = \sigma\Sigma$،

لنطبّق نظرية غاوس نجد:

$$E(M)\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}$$

ومن ثَمّ:

$$E(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

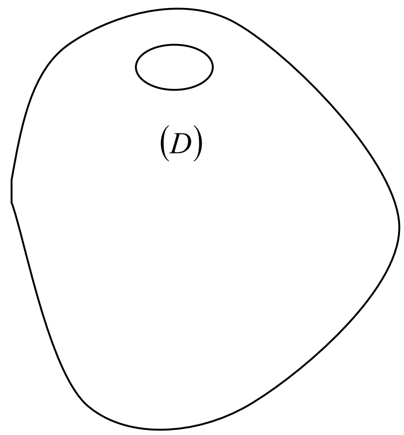
ليكن $\mathbf{n}$ الناظم على السطح في النقطة M، لدينا:

$$\boxed{\mathbf{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}}$$

وهي العبارة التي تسمح بإيجاد الحقل الكهربائي بجوار سطح الناقل في حال عرفنا كثافة الشحنة السطحية.

4.1 الضغط الكهرسكوني

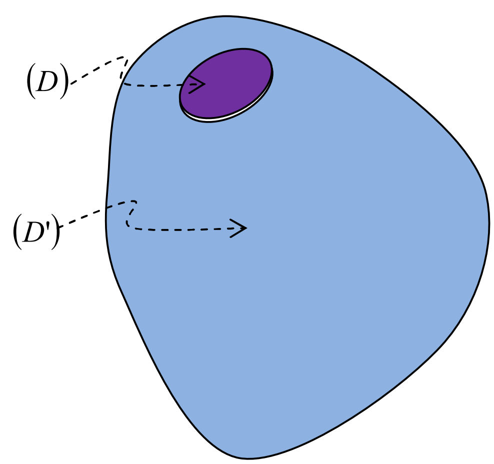
لنتأمل ناقلاً متوزنا كهربائياً:



ليكن (D) جزء من سطح الناقل على شكل قرص.

لنجزئ ذهنياً سطح هذا الناقل إلى جزأين:

- القرص (D) : باللون البنفسجي.
- بقية سطح الناقل ولنسمه الجزء (D'): باللون الأزرق.

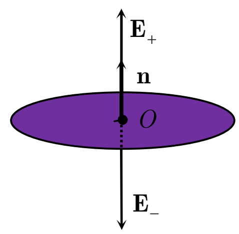


لنحسب القوة التي يؤثر بها الجزء (D') في القرص (D):

نعلم أن الحقل الناتج عن قرص بجوار مركز هذا القرص يساوي الحقل الناتج عن مستوٍ لانهائي، أي:

- $\mathbf{E}_+ = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$ من الجهة العليا (1)
- و $\mathbf{E}_- = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}\mathbf{n}$ من الجهة الدنيا،

كما هو ممثل في الشكل الآتي:



والحقل الناتج عن كامل السطح بجوار النقطة M ناتج عن تركيب الحقلين الناتجين عن (D) وعن (D')،

ليكن $\mathbf{E}'$ الحقل الناتج عن (D'). لدينا:

خارج الناقل: (من الجهة العليا للقرص): $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}' = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}$ (2)

داخل الناقل: (من الجهة الدنيا للقرص): $\mathbf{E}_- + \mathbf{E}' = \mathbf{0}$

نستنتج من العلاقتين (1) والعلاقتين (2):

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$$

يتأثّر القرص المشحون (D) بالحقل الناجم عن (D') بقوة دفع كهربائية تساوي:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' = \Sigma\sigma\mathbf{E}' = \Sigma\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$$

حيث Σ مساحة القرص و q شحنة القرص.

لنحسب الآن الضغط الكهربائي للشحن الساكنة على السطح:

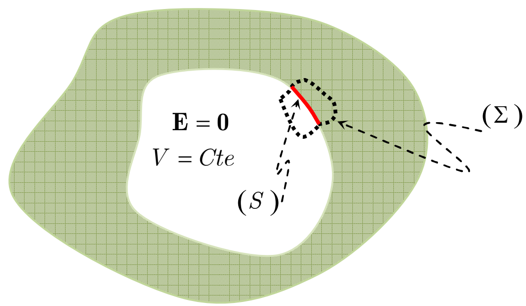
$$p = \frac{|\mathbf{F}|}{\Sigma}$$

$$\boxed{p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

تمرين: فقاعة من الصابون نصف قطرها r مشحونة بشحنة q موزعة باتظام على سطحها (نفترض أنّ الفقاعة ناقلة) ليكن γ التوتر السطحي للفقاعة، نذكّر أن الفقاعة مكونة من غشاء مضاعف. تحوي الفقاعة على الهواء بدرجة حرارة T، كما يحيط الهواء بالفقاعة ويبلغ الضغط الخارجي P_0 اكتب العلاقة التي تُعطي الضغط داخل الفقاعة.

5.1 تجويف ضمن ناقل

لنتأمل ناقلاً يحتوي داخله على تجويف كما في الشكل الآتي:



الحقل داخل الناقل معدوم كما رأينا سابقاً، إذن هو معدوم داخل التجويف، وهذا يقتضي بدوره تساوي الكمون في كل نقاط التجويف.

لنأخذ سطحاً مغلقاً (Σ) يحتوي الجزء (S) من سطح التجويف، كما في الشكل أعلاه، ولنطبق نظرية غاوس:

الحقل معدوم داخل الناقل، إذن تدفق هذا الحقل من خلال السطح (Σ) معدوم أيضاً،

ومن ثَم فالشحنة داخل (Σ) معدومة حسب نظرية غاوس، أي إنّ (S) لا يحمل شحنة.

النتيجة: الشحنة السطحية للتجويف معدومة.

لهذه النتيجة أهمية كبيرة، فهي تسمح بحماية دارة كهربائية من التأثيرات الخارجية وذلك بوضعها داخل علبة معدنية مغلقة.

ملاحظة: النتائج السابقة ليست بالضرورة محققة إذا احتوى التجويف على أجسام مشحونة.

6.1 ناقل وحيد في الفراغ

لنتأمل ناقلاً وحيداً في الفراغ، إذا كان هذا الناقل يحمل شحناً، فهذه الشحن ستتوضع على سطح الناقل كما رأينا. لنفترض أن الكثافة السطحية تأخذ قيماً موجبة وأخرى سالبة، هذا يؤدي إلى نشوء قوى تجاذب بين هذه الشحن، وتحركها بحيث تلتقي الشحن الموجبة بالسالبة، والنتيجة بقاء نوع وحيد من الشحن إما موجبة أو سالبة. إذن الشحنة السطحية لناقل وحيد في الفراغ تكون إما موجبة أو سالبة إذا كان الناقل في حالة توازن كهربائي.

نعلم أن كمون الناقل يأخذ قيمة ثابتة. لحساب هذه القيمة، يكفي أن نُجري هذا الحساب في إحدى نقاط الناقل ولتكن M. لدينا:

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_D \frac{dq}{r}$$

حيث D يمثل الناقل، و dq شحنة حجم عنصري يبعد مسافة r عن النقطة M.

من الواضح أن العلاقة بين شحنة الناقل وكمونه خطية، أي يتناسب الكمون طرداً مع الشحنة ويمكننا أن نكتب:

$$\boxed{Q = CV}$$

حيث Q تمثل الشحنة الكلية للناقل. و C ثابت التناسب الذي نسميه سعة الناقل. من الواضح أن C هي مقدار موجب، ويعبَّر عنه بالفاراد (رمزه F).

تمرين: بأخذ الأرض كناقل متوازن معزول في الفضاء. احسب سعة الأرض. نذكّر أنّ نصف قطر الأرض يساوي $R_E \approx 6400\,km$ وأنّ الثابتة الكهربائية $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, F/m$.

2 التأثير الكهربائي الساكن

1.2 ناقلان متجاوران

نقرب ناقلاً (D_1) معتدلاً كهربائياً من آخر (D_2) مشحون نفترضه في البداية وحيداً في حالة توازن كهربائي.

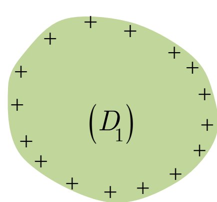
سوف يؤثر الحقل الكهربائي الناتج عن (D_2) في الشحن الحرة في الناقل (D_1) ويؤدي إلى تحركها،

تتحرّك الشحنات السالبة في اتجاه وتتحرّك الشحنات الموجبة في الاتجاه الآخر،

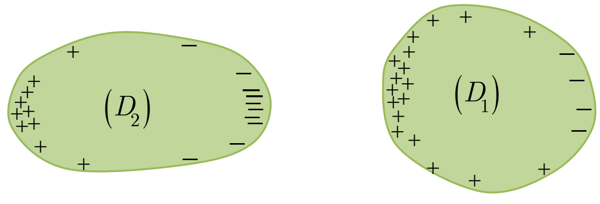
ينشأ عن تراكم هذه الشحن في طرفي الناقل حقل كهربائي داخل الناقل يعاكس الحقل الناتج عن (D_2) وتتوقف حركة الشحن عندما ينعدم الحقل الكلي داخل الناقل (D_1)،

ولا بد من ملاحظة أن الحقل الناجم عن (D_1) يؤدي بالمقابل إلى تغيير توزع الشحن ضمن الناقل (D_2) حتى ينعدم الحقل داخله أيضاً.

وبوجه عام، عند وضع ناقلين مشحونين، أو أحدهما مشحون، تتوزع الشحن في كلا الناقلين بحيث ينعدم الحقل الكهربائي داخل كل منهما. انظر الشكل الآتي:



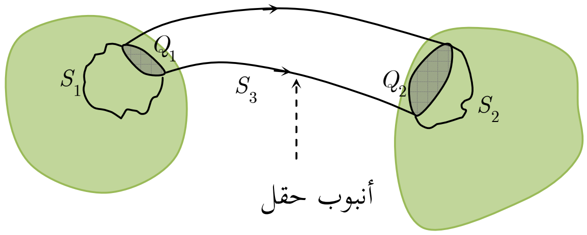
ناقل وحيد مشحون



الناقل السابق عند تقريب ناقل آخر منه .

2.2 نظرية العناصر المتقابلة

لنتأمل ناقلين في الفراغ، نسمي عنصرين متقابلين من سطحي الناقلين، الجزأين من السطحين الذين يحدهما أنبوب الحقل نفسه. كما في الشكل الآتي: العنصرين المتقابلين هما الجزأين العاتمين.



لتكن Q_1 شحنة السطح العاتم من سطح الناقل الأول و لتكن Q_2 شحنة السطح المقابل (العاتم) من سطح الناقل الثاني.

لنتأمل السطح المغلق المكون من اجتماع سطح أنبوب الحقل S_3، والسطحين S_1 و S_2 الموجودين داخل الناقلين، ويستندان إلى محيطي العنصرين المتقابلين.

لما كان الحقل معدوماً داخل كل من الناقلين، فإن تدفق الحقل من كلٍ من السطحين معدوم. وتدفق هذا الحقل من سطح أنبوب الحقل معدوم أيضاً، لأن الحقل يمس الأنبوب في كل نقطه،

ومن ثَم التدفق من خلال السطح المغلق المعرف آنفاً معدوم.

لكن هذا التدفق يساوي حسب نظرية غاوس:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

إذن:

$$Q_1 = -Q_2$$

أي إنّ السطحين المتقابلين يحملان شحنتين متعاكستين.

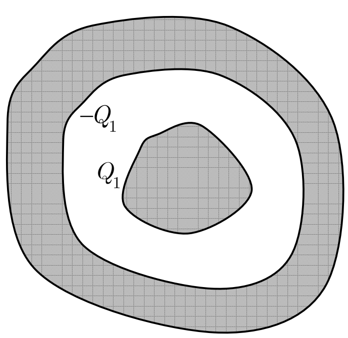
تُعرف هذه النتيجة بنظرية العناصر المتقابلة.

3.2 التأثير الكلي

نقول عن ناقلين إنهما في حالة تأثير كلي إذا كانت جميع خطوط الحقل المنطلقة من أحدهما تصل إلى الآخر.

بناءً على نظرية العناصر المتقابلة فإن الوجهين المتقابلين يحملان شحنتين لهما القيمة المطلقة نفسها.

مثال: ناقل ضمن تجويف داخل ناقل آخر يشكلان ناقلين بينهما تأثير كلي. انظر الشكل الآتي:



4.2 المكثفات

تتكون المكثفة من ناقلين في حالة تأثير كلي. نسمي السطحين المتقابلين من الناقلين لبوسي المكثفة. بناءً على ما سبق يحمل اللبوسان شحنتين متعاكستين.

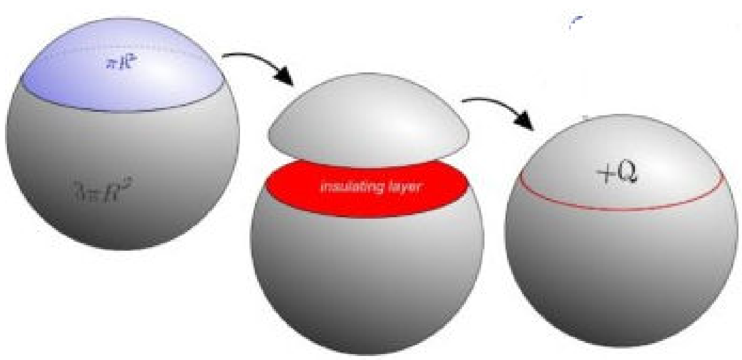
لنفترض أن اللبوس الأول يحمل الشحنة الموجبة Q وليكن V_1 كمون هذا اللبوس. اللبوس الثاني يحمل الشحنة $-Q$ ، لنفترض أنّ V_2 كمون هذا اللبوس. نُعرف سعة المكثفة C بالعلاقة التالية:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2}}$$

تمرين: تحقق أن سعة مكثفة وفق هذا التعريف هي مقدار موجب.

تمرين: مكثفة كروية مكوّنة من كرة ناقلة نصف قطرها $r_1 = 4cm$ بغطاة بقشرة عازلة سماكتها e وثابت عزلها يساوي $\varepsilon_r = 2.5$ ، تكسوها من الخارج طبقة معدنية ناقلة، تشكل الجملة مكثفة كروية، ما قيمة e لتساوي سعة هذه المكثفة سعة ناقل كروية له نصف قطر الأرض؟ بيّن أهمية المكثفات.

تمرين: كرة ناقلة مصمتة نصف قطرها R، معتدلة كهربائياً، نقوم باقتطاع جزء من هذه الكرة مساحة سطحه الخارجي تساوي ربع مساحة سطح الكرة. ثُمّ نعيد لصق الجزءين بمادة عازلة كهربائياً، سماكتها مهملة، ولكنّها تمنع مرور الشحنات بين سطحي التلامس. نشحن الجزء العلوي بشحنة Q، وندرس ما يحدث بافتراض الجملة متوازنة كهربائياً.



أ. ما شحنة كل من سطحي التلامس q، ’q، وما شحنة كل من السطحين الخارجيين ’Q، ’’Q للجزءين؟

ب. أوجد عبارة القوّة الكهربائية التي يخضع لها السطح الخارجي للجزء العلوي.