الطاقة الكهربائية الساكنة

وردت معكم سابقاً الطاقة الكهربائية لشحنة q في منطقة يسودها حقل كهربائي، وكتبنا الطاقة الكهربائية الساكنة لهذه الشحنة على الشكل: $E_p = qV$ حيث V الكمون الكهربائي الذي اشتق منه الحقل الكهربائي. وهنا نسأل:

أي معنى فيزيائي يُمكننا إعطاؤه لهذه الطاقة الكامنة ؟

ما الشرط اللازم لنكتب هذه الصيغة؟

لنأخذ شحنتان q_1 و q_2 متوضعتين على مسافة r الواحدة عن الأخرى، في حال كانت الشحنتان موجبتان وكانت الشحنة الأولى مثبّتة (لا يمكنها الحركة) والشحنة الثانية حرة، الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنة الأولى هو: $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$ } بأخذ الكمون معدوماً في اللانهاية} وعندها تكون الطاقة الكامنة للشحنة الثانية: $E_p = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$

وهي مقدار موجب، ونتيجة التدافع بين الشحنتين سوف تتحرّك الشحنة الثانية لتصل إلى اللانهاية حيث الكمون معدوم، وانحفاظ الطاقة الميكانيكية يقتضي أن يكون للشحنة سرعة غير معدومة في اللانهاية، وكما رأيتم في دروس الميكانيك يكون مسار الشحنة q_2 جزء من قطع زائد.

لنفترض الآن أنّ الشحنة q_2 كانت في اللانهاية ساكنة، عندها تكون طاقتها الميكانيكية معدومة، ولنقلها إلى موضع يبعد مسافة r عن الشحنة q_1 يجب تقديم العمل لهذه الشحنة لزيادة طاقتها حتى تبلغ القيمة $E_p = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$.

نعمم هذه النتيجة من خلال التعريف الآتي:

1. تعريف

الطاقة الكامنة للتأثير الكهربائي الساكن لتوزع شحن، هي العمل الواجب تقديمه لنقل الشحن من اللانهاية إلى الموقع الموجودة فيه.

لاحظ في هذا التعريف أنّ العمل يقدّمه مؤثّر خارجي يقوم بنقل الشحنة إلى الموقع المطلوب، والمؤثّر الخارجي يجب أن يطبق قوة تعاكس القوة الكهربائية الناجمة عن التأثير المتبادل بين الشحنات الكهربائية المنقولة.

لنكتب عبارة الطاقة الكامنة لجملة شحنات استناداً إلى التعريف السابق.

2. عبارة الطاقة

1.2. حالة شحنة وحيدة معزولة في الفضاء

إذا اردنا نقل شحنة معزولة في الفضاء (أي لا تؤثّر بها أي شحنات أخرى) وهي في اللانهاية (أي بعيدة بحيث لا يُمكن استشعار الحقل الكهربائي الناجم عن هذه الشحنة في نقطة المراقبة) فإذا نقلنا هذه الشحنة إلى نقطة المراقبة، نلاحظ أنّ العمل اللازم للقيام بذلك معدوم، فنحن ننقلها إلى موضع جديد تكون طاقتها الكامنة معدومة (نظراً لأنّها معزولة) وطاقتها الحركية معدومة لأنّ الشحنة ساكنة، إذن طاقتها الميكانيكية معدومة كما هي في اللانهاية. من الناحية العملية نقوم بإعطاء الشحنة طاقة حركية ابتدائية لتصل إلى النقطة المطلوبة، ثمّ نسترجع هذه الطاقة الحركية وذلك لنصل إلى طاقة معدومة أي لتصل الشحنة إلى النقطة المطلوبة وتتوقف عندها.

النتيجة: الطاقة الكهربائية الساكنة للشحنة الكهربائية المعزولة معدومة.

2.2. حالة شحنتين نقطيتين معزولتين معاً في الفضاء

لنحسب الطاقة الكهربائية الساكنة لجملة شحنتين الأولى q_1 في الموقع M_1، والشحنة الثانية q_2 في الموقع M_2، تبعد النقطتان مسافة r_{12}، ولا توجد أي شحنات أخرى تؤثّر في هاتين الشحنتين.

كما رأينا في الفقرة السابقة: إنّ العمل اللازم لنقل الشحنة الأولى من اللانهاية إلى الموقع M_1 معدوم،

يُكتب عمل القوة الكهربائية عند انتقال الشحنة q_2 من اللانهاية إلى الموقع M_2:

$$W = q_2\left[V_1(\infty) - V_1\left(M_2\right)\right] = -q_2 V_1\left(M_2\right)$$

حيث V_1 الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنة q_1.

تمرين محلول: استنتج العلاقة السابقة اعتماداً على عبارة العمل العنصري للقوة الكهربائية.

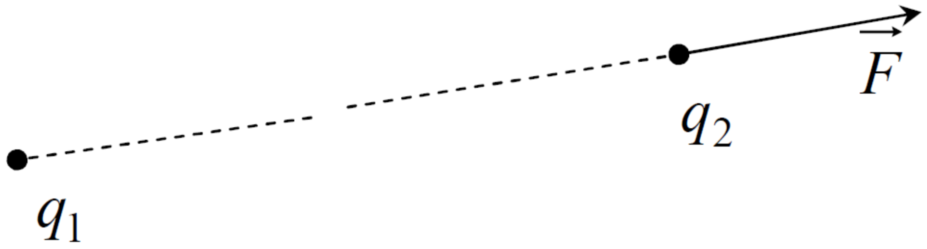
الحل:

القوّة التي تخضع لها الشحنة q_2:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{مع} \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}$$

عند انتقال الشحنة q_2 انتقالاً $\vec{d\ell} = dr\,\vec{u}_r$ يكون العمل العنصري:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{d\ell}$$



$$\delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}dr$$

وعمل القوة الكهربائية:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_{12}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}} = -q_2 V_1$$

ومن ثَم يجب على المؤثر الخارجي تقديم العمل التالي:

$$W' = q_2 V_1\left(M_2\right)$$

النتيجة: تكتب الطاقة الكهربائية الساكنة لجملة الشحنتين:

$$U_{12} = W' = q_2 V_1\left(M_2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

نلاحظ أن:

$$\boxed{U_{12} = U_{21} = \frac{1}{2}\left(q_1 V_2 + q_2 V_1\right)}$$

3.2 مجموعة شحنات متجاورة في منطقة معزولة

تُكتب الطاقة الكامنة الناتجة عن التأثير الكهربائي الساكن بين الشحنتين q_i و q_j كما يلي:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

والطاقة الناتجة عن تأثير الشحنة q_i في بقية الشحن:

$$U_i = \sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

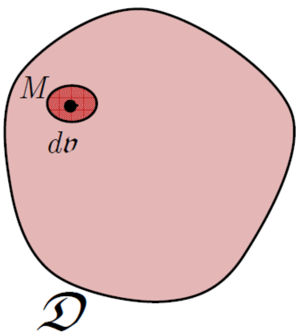
والطاقة الكلية:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

ضربنا العلاقة بـ $\frac{1}{2}$ لأن الحدود المختلفة تتكرر مرتين في علاقة المجموع السابقة.

4.2 حالة توزع مستمر للشحن

لنتأمل توزعاً مستمراً للشحن في منطقة من الفراغ $\mathfrak{D}$ بكثافة حجمية ρ.



لتكن M نقطة من المنطقة $\mathfrak{D}$، و dv حجماً صغيراً بجوار M، وليكن $V(M)$ الكمون الكهربائي في النقطة M.

إنّ شحنة الحجم dv هي:

$$dq = \rho(M).dv$$

لنفترض أننا نقلنا شحنة من اللانهاية إلى المنطقة $\mathfrak{D}$،

يـؤدي ذلـك إلى تغيـير الكثافة الحجميـة للشـحنة بجـوار M بمقـدار $d\rho$ وتغيـير الكمـون بمقدار dV،

تصبح شحنة الحجم $d\upsilon$ مساوية $dq = [\rho(M) + d\rho].d\upsilon$.

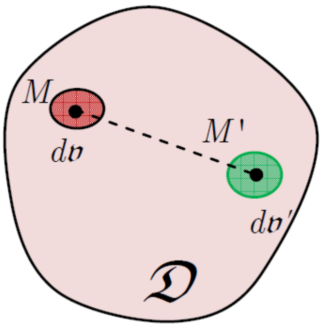
إنّ العمل اللازم لنقل الشحنة $d\rho d\upsilon$ من اللانهاية إلى جوار النقطة M يساوي:

$$d^2W = -[V(\infty) - V(M)]d\rho d\upsilon = V(M)d\rho d\upsilon$$

وهو يمثل طاقة التأثير المتبادل بين الشحنة المضافة وشحنة التوزع.

فتكون عبارة العمل اللازم لتغيير الكثافة الحجمية في كامل التوزع:

$$dW = \iiint_{\mathfrak{D}} V(M)d\rho d\upsilon$$



ولكن:

$$V(M) = \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(M')}{|MM'|} d\upsilon'$$

إذن:

$$dW = \iiint_{\mathfrak{D}} \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\rho(M')}{|MM'|} d\upsilon' \right\} d\rho d\upsilon$$

$$= \iiint_{\mathfrak{D}} \rho(M') \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{d\rho}{|MM'|} d\upsilon \right\} d\upsilon'$$

$$= \iiint_{\mathfrak{D}} \rho(M')dVd\upsilon'$$

$$= \iiint_{\mathfrak{D}} \rho(M)dVd\upsilon$$

{قمنا بتبديل ترتيب التكاملين في العبارة السابقة. } إذن:

$$
\begin{aligned}
dW &= \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M)\, dV d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} V(M)\, d\rho d\tau \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} \left[\rho(M)\, dV + V(M)\, d\rho\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M)\, dV d\tau \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} d\left[V(M)\rho(M)\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2} d\iiint_{\mathcal{D}} V(M)\rho(M)\, d\tau
\end{aligned}
$$

ومن ثم تُكتب عبارة تغير الطاقة الكهربائية الساكنة كما يلي:

$$
dU = \frac{1}{2} d\iiint_{\mathcal{D}} V(M)\rho(M)\, d\tau
$$

والطاقة الكامنة:

$$
\boxed{U = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} V(M)\rho(M)\, d\tau}
$$

3. عبارة الطاقة الكهربائية بدلالة الحقل الكهربائي

في حسابنا السابق افترضنا أنه لاتوجد شحن في الفراغ خارج المنطقة $\mathcal{D}$ ، ومن ثم يمكننا أن نكتب العبارة المحسوبة في الفقرة السابقة بالشكل:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}} V(M)\rho(M)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{E} V(M)\rho(M)\, d\tau
\end{aligned}
$$

أي إنَّ التكامل يمتد على كامل الفراغ E .

الحقل الكهربائي يرتبط بالكثافة الحجمية وفق العلاقة:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

لنبدل قيمة ρ في عبارة الطاقة :

$$U = \frac{1}{2}\iiint_E V(M)\,\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E}\,dv$$

ولنستخدم العلاقة الآتية: { انظر درس أدوات رياضية من كتاب الكهرطيسية}

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(V\mathbf{E}) &= V\operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{grad}\,V\\ &= V\operatorname{div}\mathbf{E} - \mathbf{E}^2\\ \Rightarrow V\operatorname{div}\mathbf{E} &= \operatorname{div}(V\mathbf{E}) + \mathbf{E}^2\end{aligned}$$

ومن ثم:

$$(1)\quad U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_E \operatorname{div}(V\mathbf{E})\,dv + \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_E \mathbf{E}^2\,dv$$

لنحسب التكامل الأول:

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div}(V\mathbf{E})\,dv &= \lim_{R\to\infty}\iiint_{\mathcal{G}(R)} \operatorname{div}(V\mathbf{E})\,dv\\ &= \lim_{R\to\infty}\iint_{\mathbb{S}(R)} V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

حيث:

$\mathcal{G}(R)$ الفراغ داخل كرة نصف قطرها R.

$\mathbb{S}(R)$ سطح الكرة السابقة.

استخدمنا نظرية أستروغرادسكي للانتقال من التكامل الحجمي إلى التكامل السطحي.

إن الحقل الكهربائي الناتج عن توزع شحن يتناقص كما رأينا بسرعة، على الأقل مثل $\frac{1}{R^2}$ عندما نبتعد عن التوزع بمقدار R كبير بالنسبة إلى أبعاد التوزع، لأن الحقل الناجم يكون له شكل الحقل الناجم عن شحنة نقطية إذا كانت الشحنة الكلية للتوزع غير معدومة،

وفي حال كانت الشحنة الكلية للتوزع معدومة فسيكون للحقل الناتج شكل الحقل الناجم عن ثنائي قطب أو متعدد أقطاب حيث يتناقص الحقل بأسرع من $\frac{1}{R^2}$ (يكون التناقص مثل $\frac{1}{R^3}$ في حالة ثنائي القطب).

أما الكمون الناتج عن التوزع فهو يتناقص مثل $\frac{1}{R^i}$

حيث: $i=1$ في حال كانت الشحنة الكلية غير معدومة .

$i=2$ في حال كانت الشحنة الكلية معدومة وكان التوزع يكافئ ثنائي قطب كهربائي.

$i>2$ في حال كانت الشحنة الكلية معدومة وكان عزم ثنائي القطب معدوم أي التوزع يكافئ متعدد أقطاب كهربائي.

نستنتج أنّ الجداء $V\mathbf{E}$ يتناقص مثل $\frac{1}{R^3}$ أو $\frac{1}{R^i}$ حيث $i \geq 5$

} الحالة $i=5$ هي حالة ثنائي القطب الكهربائي والحالات الأخرى هي حالات متعدد أقطاب كهربائي{

على حين تزداد مساحة سطح كرة نصف قطرها R مثل R^2 ، ومن ثمّ التكامل السابق يتغيّر مثل:

- $\frac{1}{R}$ في حال كانت الشحنة الكلية غير معدومة.

- $\frac{1}{R^i}$ مع $i > 3$ في حال كانت الشحنة الكلية معدومة.

إذن نهاية التكامل الأخير تساوي الصفر عندما ينتهي نصف قطر الكرة R إلى اللانهاية.

إذن يبقى في العلاقة (1) الحد الثاني فقط.

والطاقة الكهربائية الساكنة للتوزع:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_E \mathbf{E}^2 dv$$
$$= \iiint_E \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 dv$$
$$= \iiint u_e dv$$

بالنظر إلى العلاقة السابقة نجد أنّ:

كثافة الطاقة الكهربائية (الطاقة الكهربائية في واحدة الحجم) تساوي $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2$.

أي إنّ الطاقة الكهربائية الساكنة موجودة حيث يوجد الحقل الكهربائي.

النتيجة: إن الطاقة متوضعة في الفراغ، حيث يوجد حقل كهربائي، وكثافة الطاقة:

$$\boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}$$

تمارين تطبيقية مباشرة

1. احسب الطاقة الكهربائية الساكنة لكرة نصف قطرها R مشحونة حجمياً بكثافة ثابتة ρ.

2. تتألف مكثفة مستوية من لبوسين مربعي الشكل طول كل منها a، والمسافة بين اللبوسين d $(d << a)$، ونفترض أن ثابت العزل للمادة العازلة ε_r.

أ. بإهمال أثر الأطراف (أي بافتراض أن الحقل عمودي دوماً على اللبوسين وله قيمة الحقل الناتج عن مستويين لانهائيين مشحونين بانتظام)، أوجد عبارة الطاقة الكهربائية الساكنة للمكثفة إذا كانت شحنتها تساوي Q.

ب. استنتج عبارة طاقة المكثفة بدلالة السعة C والشحنة Q.

3. احسب الطاقة الكهربائية الساكنة لكرة ناقلة نصف قطرها R مشحونة بشحنة Q وذلك باستخدام كثافة الطاقة الكهربائية، ثُمّ باستخدام علاقة الطاقة الكامنة لمكثف له سعة تساوي سعة الكرة. قارن النتيجتين.