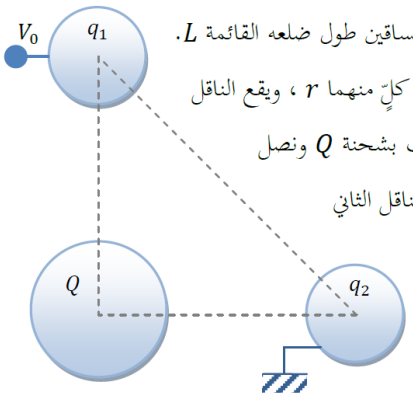
النواقل والمكثفات والطاقة الكهربائية

التمرين 1: توازن ناقلين كرويّين متّصلين بسلك ناقل

نفرض أن لدينا جملةً مكوّنةً من كرتين معدنيتين متصلتين بسلكٍ ناقلٍ طويل ومهمل السعة. الشحنة الكلّية لهذه الجملة هي Q . ليكن r نصف قطر الكرة الأولى وشحنتها q ، وليكن R نصف قطر الكرة الثانية وشحنتها $Q-q$، وليكن a البعد بين مركزي الكرتين. نقبل بأنّ $a \gg max\{R,r\}$ بحيث نعتبر أنّ توزّع الشحنات على كلٍّ من الكرتين يبقى منتظماً.

1. أوجد عبارة الشحنة q بدلالة Q و a و R و r . واستنتج عبارة الكمون الكهربائي لجملة الكرتين.
2. ما عبارة السعة الكهربائية لجملة الكرتين؟ استنتج منها عبارة سعة ناقل كروي وحيد.

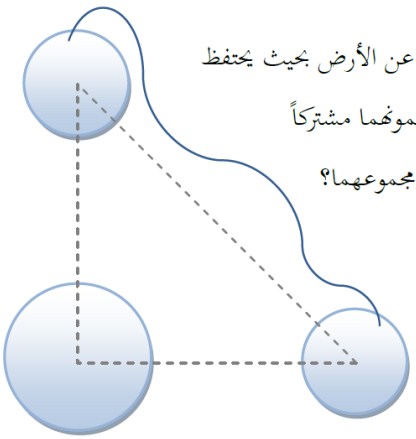
التمرين 2: ثلاثة نواقل كروية (دورة 2010)



ليكن لدينا ثلاثة نواقل كروية تقع مراكزها على رؤوس مثلث قائم متساوي الساقين طول ضلعه القائمة L. يقع الناقلان الأول والثاني على طرفي وتر المثلث، وهما متماثلان ونصف قطر كلٍّ منهما r ، ويقع الناقل الثالث ذو نصف القطر R على الرأس القائمة للمثلث. نشحن الناقل الثالث بشحنة Q ونصل الناقل الأول إلى منبع كمونٍ V_0 موجب فينشحن بشحنة q_1 ، كما نصل الناقل الثاني بالأرض لينشحن بشحنة q_2.

سنقبل بأنّ $L \gg R$ و $L \gg r$ بحيث لا يتغير توزع الشحنات على أحد النواقل بتأثير النواقل الأخرى ويبقى منتظماً.

1. اكتب المعادلات التي تعطي كلّاً من كمونات النواقل الثلاثة بدلالة Q و q_1 و q_2 و L و R و r.
2. أوجد عبارة الشحنة q_1 بدلالة Q و L و r و V_0.
3. استنتج عبارة كمون الناقل الثالث بدلالة Q و L و r و R و V_0.



4. نفصل الآن الناقل الأول عن منبع الكمون V_0 ونفصل الناقل الثاني عن الأرض بحيث يحتفظ كلّ منهما بشحنته، ثمّ نصلهما بسلكٍ طويلٍ مهمل السعة ليصبح كموهما مشتركاً وشحنتاهما Q_1 و Q_2 . بيّن أن هاتين الشحنتين متساويتين. ما هو مجموعهما؟
5. ما هو الكمون المشترك الجديد؟
6. هل تتغير شحنة الناقل الثالث؟ (في حال الإيجاب ماذا تصبح؟)
7. هل يتغير كمون الناقل الثالث؟ (في حال الإيجاب ماذا يصبح؟)

التمرين 3: كرة ناقلة (دورة 2017)

نضع كرةً ناقلة، نصف قطرها R وشحنتها الكلّية معدومة، في مجال حقلٍ كهربائي منتظم $\overrightarrow{E} = E_0\,\overrightarrow{e_z}$ فيتغيّر توزّع الشحنات الكهربائية على الكرة لتصبح متوازنة من جديد (حقل كهربائيٌّ كلّي معدومٌ داخل الكرة). إذا علمت أن الكمون الكهربائي الذي سينتج عن الكرة في كلّ نقطة من الفضاء خارج الكرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(r,\theta,\varphi) = E_0\left(-r + \frac{R^3}{r^2}\right)cos\theta$$

1. أوجد عبارة شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}(r,\theta,\varphi)$ الناتج عن الكرة في كل نقطةٍ خارجها.
2. استنتج عبارة $\sigma(\theta)$ توزّع الشحنات الحاصل على سطح هذه الكرة.
3. ما الشحنة التي ستتوزّع على النصف العلوي للكرة (أي باتجاه z موجبة إذا اعتبرنا مركز الكرة في المبدأ)؟

التمرين 4: أقراص مشحونة (دورة 2011)

لدينا ناقلٌ على شكل قرصٍ دائريّ رقيق (نهمل سماكته) نصف قطره a . نشحن هذا الناقل بشحنة كلية Q ، ونقبل بأنّ هذه الشحنة تتوزّع على سطحه وفق العلاقة التالية:

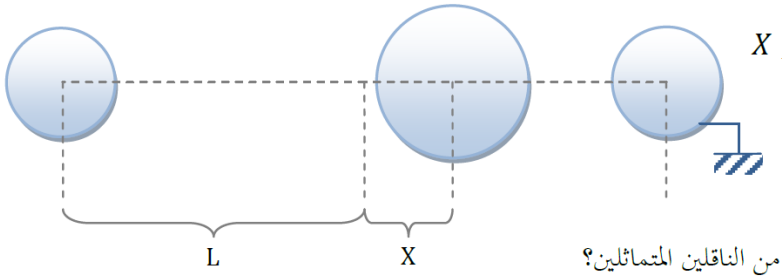
$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-(r^2/a^2)}}$$

حيث σ_0 ثابت هو قيمة الكثافة السطحية للشحنة في مركز القرص.

1. أوجد عبارة σ_0 بدلالة Q و a.
2. أوجد عبارة الكمون الكهربائي الناتج عن هذا القرص في نقطة من محوره تبعد عن مركزه مسافة z (نذكّر بأنّ: $\int \frac{dx}{\sqrt{A-\sqrt{B+x}}} = 2\arctan\sqrt{\frac{B+x}{A-x}}$).
3. استنتج عبارة الكمون الكهربائي في مركز القرص. ثمّ استنتج عبارة سعة هذا الناقل.
4. سنعتبر أنّ لدينا قرصين ناقلين شحنتاهما الكلّيتان Q_1 و Q_2 ونصفا قطريهما a_1 و a_2 على الترتيب، موضوعان بحيث يتطابق محوراهما والبعد بينهما هو L والذي سنعتبره كبيراً بشكلٍ كافٍ بحيث لا يتغيّر توزّع الشحنات عليهما ويبقى على شكله السابق. اكتب عبارتي الكمونين الكهربائيين V_1 و V_2 لهذين القرصين.
5. ماذا يحدث لو وصلنا القرصين بسلك طويل مهمل السعة؟
6. إذا اعتبرنا أنّ $a_2 = 2a_1$ وأنّ $L = 10a_1$ ، أوجد العلاقة بين الشحنتين النهائيتين للقرصين Q_1' و Q_2'، واحسب قيمة كلّ منهما إذا علمت أن $Q_1 + Q_2 = 10^{-5}$ C.
7. ما قيمة الكمون النهائي للقرصين في هذه الحالة إذا كان $a_1 = 10\ cm$ ؟

التمرين 5: نواقل كروية على استقامة واحدة (دورة 2012)

لدينا ناقلان كرويان مصمتان متماثلان نصف قطر كلّ منهما r ويبعد مركز أحدهما عن مركز الآخر مسافة $2L$. الناقلان غير مشحونين وأحدهما موصولٌ إلى نقطةٍ كمونها معدومٌ دوماً (الأرض). نضع بين الناقلين السابقين ناقلاً كروياً مصمتاً ثالثاً نصف قطره R بحيث يكون مركزه على القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الناقلين، وأقرب إلى أحدهما بمسافة X (انظر الشكل)، ولنفرض أنّ هذا الناقل مشحونٌ بشحنة كلية Q موجبة.



نفرض أنّ المسافة L كبيرة مقارنةً بالمقدار X وبأنصاف الأقطار بحيث نقبل بأنّ توزّع الشحنات النواقل يبقى منتظماً.

1. هل يتغيّر كمون أو شحنة أيّ من الناقلين المتماثلين؟

سنفرض أنّ شحنة الناقل الموصول إلى الأرض q_1 وكمونه V_1 ، وأنّ شحنة الناقل الثاني المماثل q_2 وكمونه V_2 ، وأنّ V هو كمون الناقل الثالث المشحون بالشحنة Q.

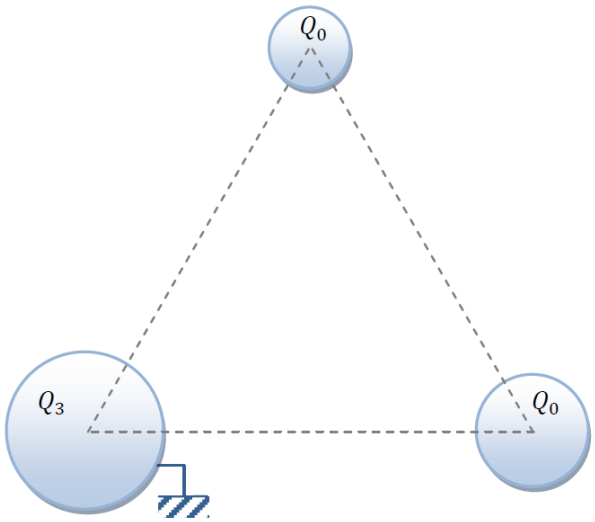
2. اكتب قيمة كلٍّ من V_1 و q_2 .
3. اكتب عبارة الكمون V_1 واستنتج منها أنّ: $q_1 = -\frac{r}{L-X}Q$.
4. اكتب عبارة V بدلالة Q و R و r و L و X .
5. اكتب عبارة V_2 بدلالة Q و r و L و X .
6. أعد كتابة عبارة q_1 (بدلالة Q) وعبارتي V و V_2 (بدلالة Q و r) وذلك في حال كان الناقل الثالث يماثل الناقلين وموضوع في المنتصف تماماً (أي $X = 0$ و $R = r$)، وكان $L = 10r$. ما هي إشارة V_2 ؟

   سنعتبر هذه الحالة محققة حتى نهاية التمرين.
7. نصل الناقلين الأول والثاني بسلكٍ طويل مهمل السعة. علّل سبب مرور تيارٍ كهربائي في السلك وحدّد
8. عندما ينعدم التيار تصبح شحنة الناقل الموصول إلى الأرض q_1' وتصبح شحنة الناقل الثاني q_2'. ما عبارة الشحنة التي انتقلت بين الناقلين بدلالة Q ؟
9. هل العلاقة التالية محققة $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ ؟ ولماذا؟

التمرين 6: نواقل كروية .. مرّة أخرى (دورة 2008)

لدينا ثلاثة نواقل كروية أنصاف أقطارها $R_3 > R_2 > R_1$ ، تقع مراكزها على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه L. سنقبل بأنّ $L \gg R_3$ بحيث لا يتغير توزع الشحنات على أحد النواقل بتأثير النواقل الأخرى ويبقى منتظماً. نشحن كلاً من الناقلين الأول والثاني بشحنةٍ كلّيةٍ Q_0 ، ونصل الناقل الثالث بالأرض لينشحن بشحنة كلية Q_3.

1. اكتب عبارة كلٍّ من كمونات النواقل الثلاثة V_1 و V_2 و V_3 بدلالة Q_0 و Q_3 و L و أنصاف الأقطار.

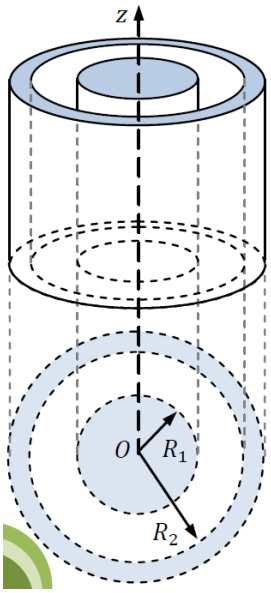


2. أوجد عبارة الشحنة Q_3 بدلالة Q_0 و R_3 و L.
3. استنتج عبارتي الكمونين V_1 و V_2 من جديد بدلالة Q_0 و L و أنصاف الأقطار.
4. أوجد عبارة الطاقة الكهربائية المختزنة في هذه الجملة بدلالة ما تراه مناسباً.
5. نصل الناقلين الأول والثاني بسلك طويل مهمل السعة مقاومته r . فتصبح شحنتاهما Q_1 و Q_2. هل تتغير شحنة الناقل الثالث؟ ماذا تصبح؟
6. برهن أنّ:

$$Q_1 = 2Q_0 \frac{R_2^{-1} - L^{-1}}{R_1^{-1} + R_2^{-1} - 2L^{-1}}$$

وأوجد عبارة الشحنة الأخرى Q_2 .

7. أوجد عبارة الطاقة الكهربائية الجديدة المختزنة في هذه الجملة بدلالة ما تراه مناسباً.
8. في المرحلة الانتقالية بين الحالتين السابقتين (قبل وصل الناقلين وبعده) مرّ تيارٌ في السلك ذي المقاومة r. ما سبب مرور هذا التيار؟ اكتب المعادلة التفاضلية التي تصف تغيّر شحنة أحد الناقلين مع الزمن واستنتج عبارة التيار المار $i(t)$ بدلالة ما تراه مناسباً.
9. احسب الطاقة الحرارية الناتجة عن مرور التيار في السلك وبيّن أنها لا تتعلق بالمقاومة r. ثمّ تحقق من مبدأ انحفاظ الطاقة.



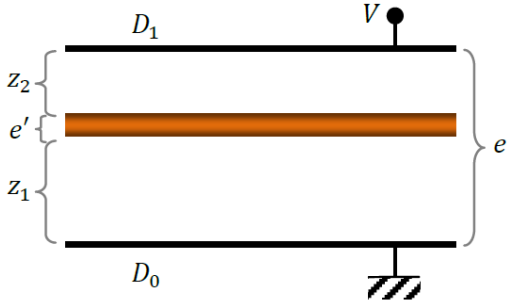
التمرين 7: **مكثّفة أسطوانية**

يتكوّن لبوسا المكثّفة الأسطوانية من أسطوانتين لانهائيّتين لهما المحور ذاته Oz. والعازل بينهما هو الخلاء. أوجد عبارة سعة واحدة الطول من هذه المكثفة بدلالة R_1 و R_2 (نصفا قطري مقطعي الأسطوانتين) و ε_0 .

التمرين 8: **مكثّفة مستوية**

تتكوّن مكثفة مستوية من قرصين متوازيين D_0 و D_1 عازلهما الخلاء والبعد بينهما e، مركزاهما O و O_1 ولهما نصف القطر ذاته a بحيث $e \ll a$. نصل D_0 إلى الأرض، ونصل D_1 إلى كمونٍ كهربائيٍّ موجب V.

1. أوجد عبارة الكمون $V(z)$ في كل نقطة M بين اللبوسين وذلك بدلالة z (بعدها عن D_0) و σ (الكثافة السطحيّة لشحنة اللبوسين) والثابت ε_0. استنتج عبارة σ بدلالة V و e و ε_0 .

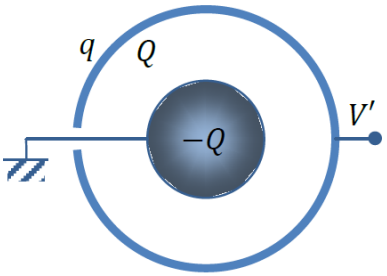


2. مثِّل كلّاً من السطوح متساوية الكمون وخطوط الحقل الكهربائي بين اللبوسين.
3. استنتج عبارة C_0 سعة هذه المكثفة المستوية بدلالة ε_0 و e و a .
4. نُدخل بين لبوسي هذه المكثفة قرصاً نحاسياً غير مشحون نصف قطره a كذلك، وسماكته e' بحيث يكون موازياً للّبوسين. أوجد عبارة C سعة هذه المكثفة الجديدة بدلالة C_0 والنسبة $\frac{e'}{e}$ (لاحظ أن إدخال القرص النحاسي أدى إلى زيادة سعة المكثفة، وأن هذه السعة الجديدة مستقلّة عن مكان القرص بين اللبوسين).

التمرين 9: **مكثّفة كروية**

تتألّف مكثفةٌ كروية عازلها الخلاء من:

- لبوسٍ كرويّ داخلي نصف قطره R ، كمونه معدوم، ووجهه الخارجي مشحون بالشحنة $-Q$.
- لبوسٍ كرويّ خارجي متمركز مع اللبوس الأول ونصف قطره R' ، كمونه V' موجب، شحنة وجهه الداخلي $+Q$ ، وشحنة وجهه الخارجي q .



1. أوجد عبارة كلٍّ من الحقل الكهربائي $\vec{E}(r)$ والكمون الكهربائي $V(r)$ في كل نقطة من الفراغ .
2. أوجد عبارة C سعة هذه المكثفة الكروية بدلالة R و R' و ε_0 .
3. أوجد عبارة Q بدلالة V' و R و R' و ε_0 .
4. استنتج عبارة q بدلالة V' و R' و ε_0 .

5. تطبيق عددي:

من أجل $R = 20\ cm$ و $R' = 22\ cm$ و $V' = 9000\ V$ و $S.I$ و $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$.

أوجد Q و q، وارسم التابعين $E(r)$ و $V(r)$.

التمرين 10: **مكثّفتان كرويتان متّصلتان**

تتّصل مكثفة كروية، عازلها الهواء، ونصفا قطري لبوسيها R_1 و R_2 (حيث $R_1 < R_2$) ، بمكثّفة ثانية مماثلة بحيث تكونان بعيدتين إحداهما عن الأخرى وعن الأرض. ونفرض أنّ الجملة غير مشحونة في وضعها الابتدائي.

نصِلُ اللبوس A بالكمون الموجب V، ونصل اللبوس D بالأرض، فتنشحن الوجوه الخارجية للّبوسات الأربعة بالشحنات Q_A و Q_D و Q'_B و Q'_C، وينشحن الوجهان الداخليان للّبوسين الخارجيين بالشحنتين Q''_B و Q''_C .

1. اكتب العلاقات التي تحقّقها الشحنات الستّ السابقة.
2. بيّن بدون حساب أنّ الكمون المشترك للّبوسين الخارجيّين V_B موجب وأصغر من V، واستنتج إشارة كلٍّ من الشحنات الستّ السابقة.

3. أوجد عبارة V_B بدلالة V و R_1 و R_2 .
4. أوجد عبارة كلٍّ من الشحنات الستّ السابقة بدلالة V و R_1 و R_2 و ε_0 .

التمرين 11: **الضغط الكهرسكوني**

1. ما سعة كرةٍ معدنية مصمتة نصف قطرها R ؟
2. نضع على سطح كرةٍ معدنيةٍ نصف قطرها $R = 2\ cm$ قرصاً معدنياً صغيراً نصف قطره $r = 2\ mm$ وكتلته $m = 0.02\ g$. ما قيمة أصغر كمون كهربائي V مفروضٍ على الكرة قادر على رفع القرص عنها؟ ما هي شحنة الكرة Q عندئذٍ؟

التمرين 12: **الطاقة الكهربائية الساكنة**

بيّن (بطريقتين مختلفتين) أنّ الطاقة الكهربائية الساكنة لكرة مشحونة حجمياً بكثافة منتظمة تُعطى بالعبارة التالية:

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

حيث Q الشحنة الكلية للكرة، و R نصف قطرها.