جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 3

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

٢. السلاسل والتقارب Series and Convergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sequence of partial sums متتالية المجاميع الجزئية

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

السلسلة متقاربة

$\{S_n\}$ متباعدة $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ السلسلة متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=\quad ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$S_1=1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{2(1)+1}$$

$$S_2=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{5}=1-\frac{1}{2(2)+1}$$

$$S_3=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=1-\frac{1}{7}=1-\frac{1}{2(3)+1}$$

$$\vdots$$

$$S_n=1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

السلسلة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1$$

أمثلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

convergent

$$S_1=1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1+1}$$

$$S_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{2+1}$$

$$S_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{3+1}$$

$$\vdots$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}S_n=1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

السلسلة متقاربة

السلسلة الهندسية Geometric Serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots$$

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad (r \neq 1).$$

متتالية المجاميع الجزئية

$|r| \geq 1$ ⟶ السلسلة متباعدة

$0 < |r| < 1$ ⟶ السلسلة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ السلسلة متقاربة $r = \frac{1}{2} < 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{1-1/2} = 6$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ السلسلة متباعدة $r = \frac{3}{2} > 1$

• Properties of Infinite Series خصائص السلاسل اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow$$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA \ , \ c \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

nth-Term Test for Convergence اختبار الحد النوني للتقارب

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ السلسة متقاربة **convergent** $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergent** السلسة متباعدة

P-Series and Harmonic Series السلاسل من النوع *P* والسلسلة التو افقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- $0 < p \leq 1$ **divergent** السلسة متباعدة
- $p > 1$ **convergent** السلسة متقاربة

اختبار التكامل للتقارب Integral Test for Convergence

لتكن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الموجبة، وبفرض أن $a_n = f(n)$، حيث f تابع مستمر وموجب ومتناقص من أجل كل $x \geq N$، عندئذ فإن السلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ والتكامل $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ يتقاربان معاً ويتباعدان معاً.

مثال أثبت أن السلسلة الآتية متقاربة من أجل $p > 1$ ومتباعدة من أجل $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

الحل

التابع $f(x) = 1/x^p$ مستمر وموجب ومتناقص من اجل كل $x \geq 1$ ووجدنا أن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ متقارب من أجل $p > 1$ ومتباعد من أجل $p \leq 1$

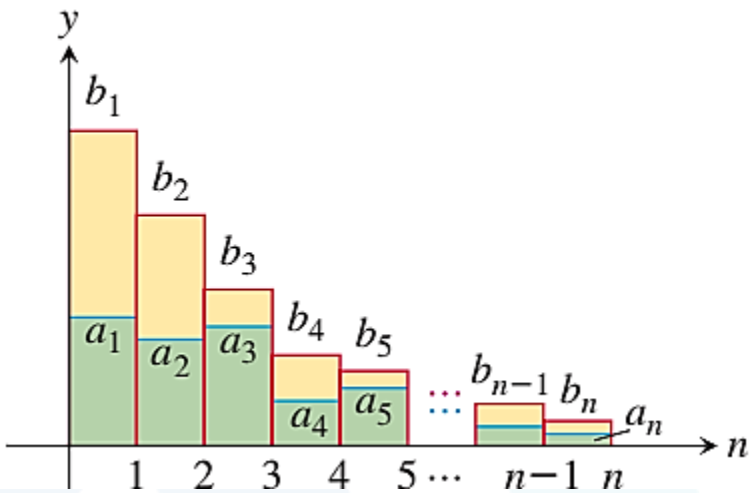
بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة من أجل $p > 1$ ومتباعدة من أجل $p \leq 1$

٣. مقارنة السلاسل Comparisons of Series

اختبار المقارنة المباشر Direct Comparison Test

Let $0 < a_n \le b_n$ for all n.

1. If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n} \; ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ convergent}$$ متقاربة

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n} \text{ convergent}$$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}} \; ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textbf{divergent}$$ متباعدة

$$a_n = \frac{1}{2+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \textbf{divergent}$$ متباعدة

$$a_n = \frac{1}{n} \le \frac{1}{2+\sqrt{n}} = b_n \;,\; n \ge 4 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}} \quad \textbf{divergent}$$ متباعدة

اختبار المقارنة بالنهاية Limit Comparison Test

$$0 < a_n \ , \ 0 < b_n \ \ \& \ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L > 0$$

للسلسلتين نفس الطبيعة أي متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \ ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$ متقاربة **convergent** $p = 3/2 > 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)\left(\frac{n^{3/2}}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$ متقاربة **convergent**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n}{4n^3+1} \; ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$ **nth-Term Test for Convergence** → **divergent** متباعدة

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,2^n}{4n^3+1}\right)\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{4}$$

→ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n}{4n^3+1}$$ **divergent** متباعدة

٤. السلاسل المتناوبة Alternating Series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

اختبار السلاسل المتناوبة Alternating Series Test

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ a_{n+1} \le a_n \ , \ \forall n \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$ متقاربة

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}}$$

$$\forall n \ge 1 \ , \ \frac{1}{2} \le \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{2^{n-1}}{2^n} \le \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} \le \frac{n}{2^{n-1}} = a_n \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}}$$ متقاربة