جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 4

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

تمارين

تمارين

1 أوجد صيغة للحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لكل من السلاسل الآتية واستخدمها لإيجاد مجموع السلسلة إذا كانت متقاربة.

- $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$
- $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

الحل:

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$$

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ أي $a=2, r=1/3$

$$\Rightarrow \quad s_n=\frac{a\left(1-r^n\right)}{(1-r)}=\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=3$$

تمارين

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ أي $a=1, r=-1/2$

$$s_n=\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}=\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow s_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{2}$$

تمارين

2 حدد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الهندسية الآتية متقاربة أم متباعدة وأوجد مجموعها في حال كانت متقاربة:

- $1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$
- $1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$
- $\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \cdots$

الحل:

$1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$

$r = \frac{2}{5} \Rightarrow \left|\frac{2}{5}\right| < 1$ ⇒ سلسلة متقاربة مجموعها $\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

$1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$

$r = -3 \Rightarrow |-3| > 1$ ⇒ سلسلة متباعدة

$\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \cdots$

$r = \frac{1}{8} \Rightarrow \left|\frac{1}{8}\right| < 1$ ⇒ سلسلة متقاربة مجموعها $\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$

تمارين

3 استخدم السلاسل الهندسية لكتابة العدد العشري المكرر على شكل عدد كسري

- $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ldots$
- $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ldots$

الحل:

$0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ldots$

$$0.\overline{23} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{\left(\frac{23}{100}\right)}{1-\left(\frac{1}{100}\right)} = \frac{23}{99}$$

$1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ldots$

$$1.\overline{414} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{414}{1000}\left(\frac{1}{10^3}\right)^n = 1 + \frac{\left(\frac{414}{1000}\right)}{1-\left(\frac{1}{1000}\right)} = 1 + \frac{414}{999} = \frac{1413}{999}$$

تمارين

4 استخدم اختبار الحد النوني لإثبات أن السلسلة متباعدة

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+n}$

الحل:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+5n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1 \neq 0$

السلسلة المعطاة متباعدة

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \neq 0$

السلسلة المعطاة متباعدة

5 أوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لكل من السلاسل التلسكوبية الآتية واستخدمه لتحديد فيما إذا كانت السلسلة متقاربة أم متباعدة

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}\right)$

تمارين

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_k=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1,$$

السلسلة المعطاة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{3}{(n+1)^2}\right)$$

$$s_k=\left(\frac{3}{1}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{3}{9}-\frac{3}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{3}{(k-1)^2}-\frac{3}{k^2}\right)+\left(\frac{3}{k^2}-\frac{3}{(k+1)^2}\right)=3-\frac{3}{(k+1)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k=\lim_{k\to\infty}\left(3-\frac{3}{(k+1)^2}\right)=3$$

السلسلة المعطاة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}\right)$$

$$s_k=\left(\ln\sqrt{2}-\ln\sqrt{1}\right)+\left(\ln\sqrt{3}-\ln\sqrt{2}\right)+\left(\ln\sqrt{4}-\ln\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\ln\sqrt{k}-\ln\sqrt{k-1}\right)+\left(\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{k}\right)$$

$$=\ln\sqrt{k+1}-\ln\sqrt{1}=\ln\sqrt{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k=\lim_{k\to\infty}\ln\sqrt{k+1}=\infty$$

السلسلة المعطاة متباعدة

تمارين

6 استخدم اختبار التكامل لتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الآتية متقاربة أم متباعدة:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

الحل:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

التابع $f(x)=\frac{1}{x+4}$ مستمر وموجب ومتناقص من اجل كل $x \geq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+4}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x+4}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x+4|\right]_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|b+4| - \ln 5\right) = \infty$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+4}dx$ متباعد $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ متباعدة

تمارين

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$$

التابع $f(x)=e^{-2x}$ مستمر وموجب ومتناقص من اجل كل $x \geq 1$

$$\int_1^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2b}}+\frac{1}{2e^{2}}\right)=\frac{1}{2e^{2}}$$

$\int_1^{\infty} e^{-2x}\,dx$ متقارب $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ متقاربة

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

التابع $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ مستمر وموجب ومتناقص من اجل كل $x \geq 2$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ متقارب $\Longrightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ متقاربة

تمارين

7 استخدم اختبار المقارنة مباشرة لتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الآتية متقاربة أم متباعدة:

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$

الحل:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$ $\quad n \geq 1 \quad n^2 \leq n^2+30 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+30}$

بما ان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة لأن $p=2>1$ بالتالي حسب اختبار المقارنة السلسلة المعطاة متقاربة.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ $\quad n \geq 2 \quad \sqrt{n}-1 \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

بما ان السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $p=\frac{1}{2} \leq 1$ بالتالي حسب اختبار المقارنة السلسلة المعطاة متباعدة.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$ $\quad n \geq 2 \quad n^2-n \leq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2-n} \geq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n}{n^2-n} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n+2}{n^2-n} \geq \frac{n}{n^2-n} \geq \frac{1}{n}$

بما ان السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة لأن $p=1 \leq 1$ بالتالي حسب اختبار المقارنة السلسلة المعطاة متباعدة.

تمارين

8 استخدم اختبار المقارنة بالنهاية لتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الآتية متقاربة أم متباعدة:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3+4^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-n^2+3}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-n^2+3}$$

سنقارن مع السلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-2}{n^3-n^2+3}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2}{n^3-n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{3n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-4}{6n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{6}=1>0.$$

بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$$

سنقارن مع السلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}}{1/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}}=\sqrt{1}=1>0.$$

بالتالي السلسلة المعطاة متباعدة.

تمارين

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$$

سنقارن مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ المتقاربة لأنها سلسلة هندسية حيث $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3+4^n}}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \ln 4}{4^n \ln 4} = 1 > 0.$$

بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$$

سنقارن مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ المتقاربة لأنها سلسلة هندسية حيث $|r| = \left|\frac{2}{5}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n}{(2/5)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10n+15}{10n+8}\right)^n = \exp \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{10n+15}{10n+8}\right)^n = \exp \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{10n+15}{10n+8}\right)$$

$$= \exp \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{10n+15}{10n+8}\right)}{1/n} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{10n+15} - \frac{10}{10n+8}}{-1/n^2} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{70n^2}{(10n+15)(10n+8)} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{70n^2}{100n^2+230n+120}$$

$$= \exp \lim_{n\to\infty} \frac{140n}{200n+230} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{140}{200} = e^{7/10} > 0.$$

بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة.

تمارين

9 استخدم اختبار السلاسل المتناوبة لتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل المتناوبة الآتية متقاربة أم متباعدة:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>0 \text{ for all } n\geq 1 \qquad n\geq 1\Rightarrow n+1\geq n\Rightarrow \sqrt{n+1}\geq\sqrt{n}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow u_{n+1}\leq u_n$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة حسب اختبار السلاسل المتناوبة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$$

$$u_n=\frac{1}{n3^n}>0 \text{ for all } n\geq 1; \qquad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n3^n}=0.$$

$$n\geq 1\Rightarrow n+1\geq n\Rightarrow 3^{n+1}\geq 3^n\Rightarrow (n+1)3^{n+1}\geq n3^n\Rightarrow \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}\leq\frac{1}{n3^n}\Rightarrow u_{n+1}\leq u_n$$

بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة حسب اختبار السلاسل المتناوبة.

تمارين

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^2+4}=1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$$

النهاية غير موجودة ⇒ بالتالي السلسلة المعطاة متباعدة.