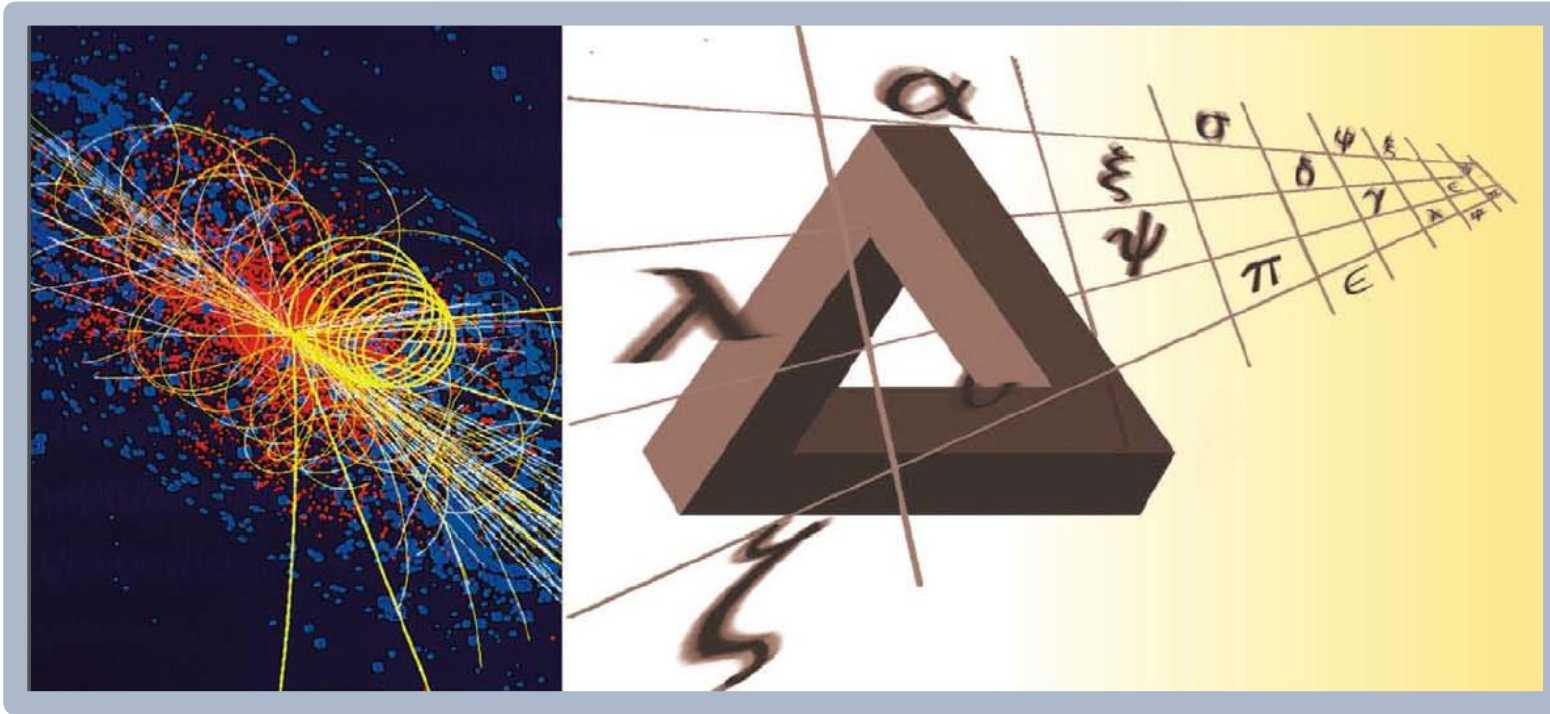


Introduction to Numerical Math



العام الدراسي 2023-2024

د. محمد خير عبد الله محمد



Contents

مقدمة

تعريف ببرنامج Matlab-Simulink

Linear Equations

Nonlinear Equations

تطوير طريقة عددية مبسطة لحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة



الحل التحليلي هو الحل الرياضي المستند إلى علاقات و معادلات تصف سلوك الظاهرة المدروسة بدقة والتي تعطي في النهاية حلاً مغلقاً ونهائياً للمشكلة المطروحة.

الحل العددي هو الحل المعتمد على تصميم خوارزميات لمعالجة المسائل التي يصعب حلها بالطرق التحليلية ويتم ذلك باستخدام الحاسب.

يمكن النظر إلى الحل العددي لأي مشكلة على أنه خطوة من خطوات محاكاة هذه المشكلة على الحاسب. وهذه المحاكاة تعتبر ميزة عظيمة في دراسة أداء الحل المقدم تحت الظروف والأحوال المختلفة

كما أن هذه المحاكاة تمكننا من اختبار الحل في ظروف يصعب فرضها في الوضع الطبيعي حيث قد تحتاج إلى تكلفة عالية ووقت كبير.

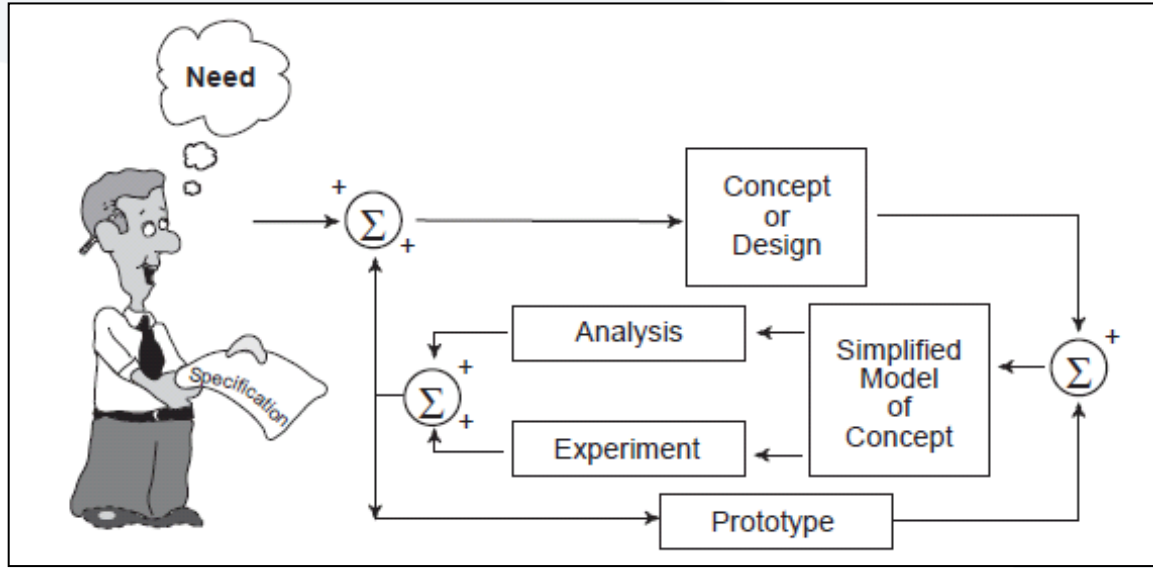
حل المشاكل بالتحليل العددي ليس خاليا من الصعوبات أو العيوب نتيجة أخطاء حتمية تصاحب استخدام الحاسب والتي تبدولنا بسيطة ولكنها في ظروف معينة قد تؤدي إلى كوارث.



صاروخ باترويت الذي سقط في موقعه
نتيجة خطأ التقريب الحسابي

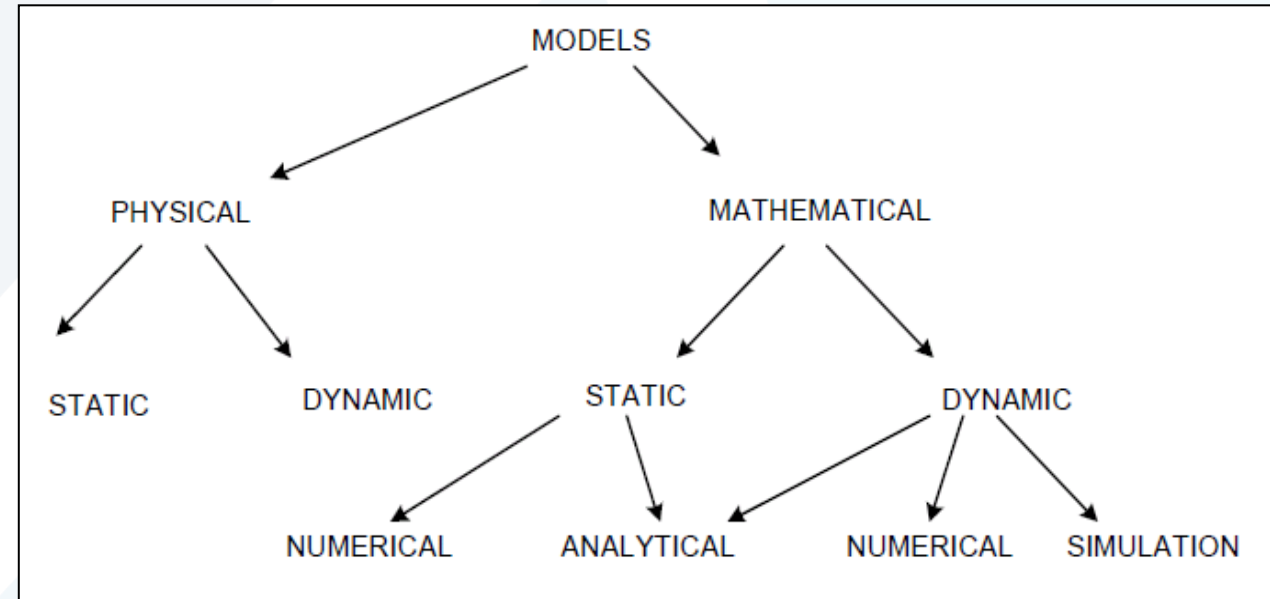


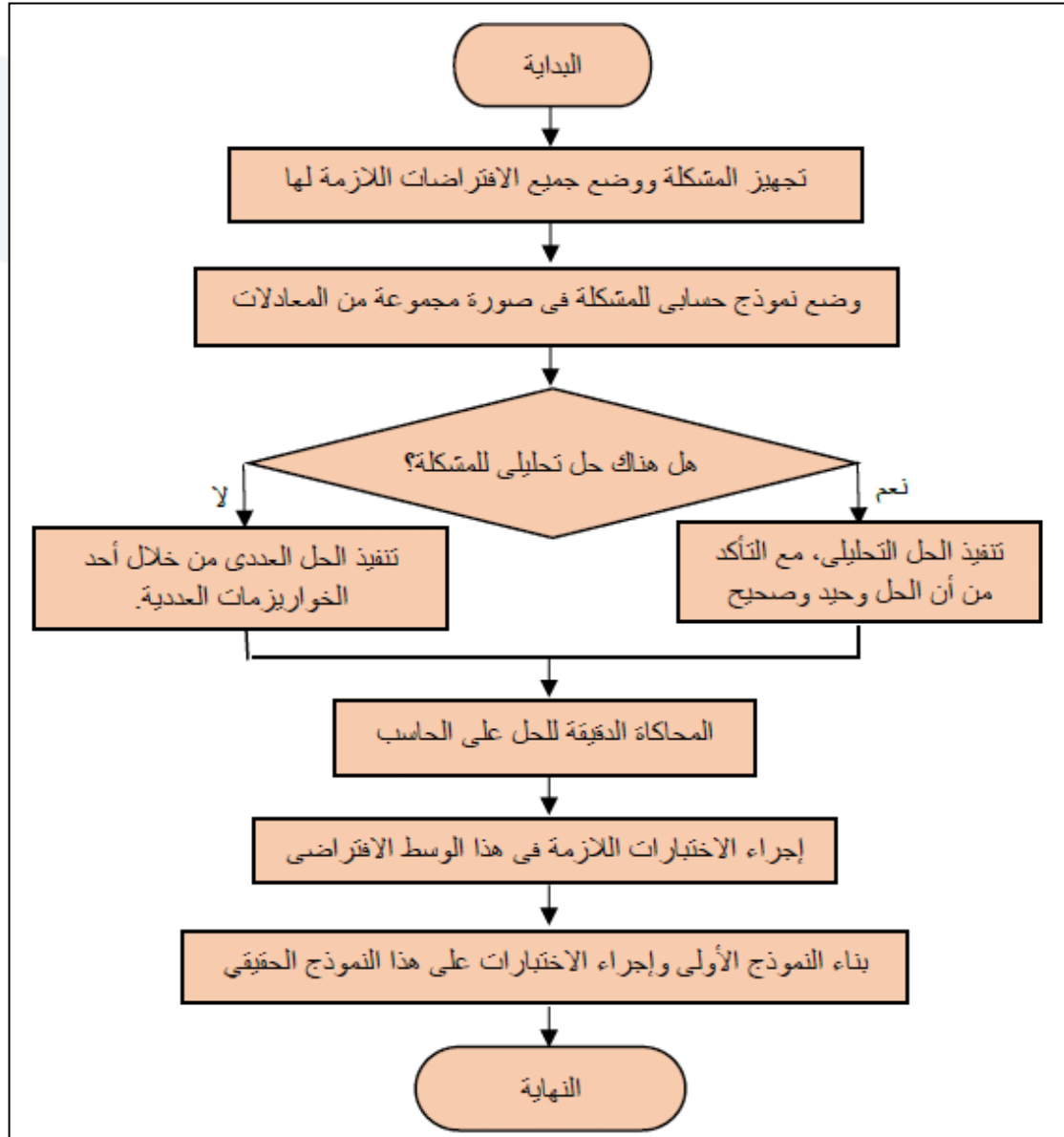
سقوط الصاروخ أريان 5 بعد
إطلاقه مباشرة نتيجة أخطاء في التقريب الحسابي



من حاجة إلى حل

النماذج وحلولها



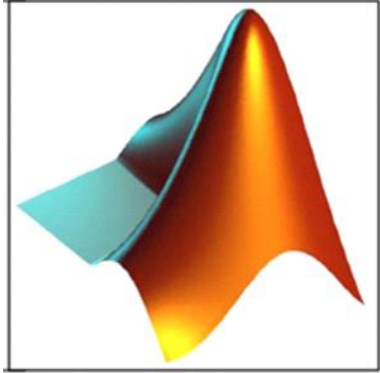


خوارزمية حل المشكلة

تعريف ببرنامج Matlab-Simulink

Matlab

لغة ذات مستوى عالي للحسابات و البرمجة وهو اختصار لعبارة مختبر المصفوفة **MATrix LABoratory** لأنه يتعامل مع البيانات كمصفوفات وهي نقطة القوة الأساسية الكبيرة فيه مما يجعله الأداة البرمجية الأكثر كفاءة ديناميكياً (إعطاء أبعاد متعددة للظاهرة المدروسة)



يستطيع Matlab

- ❖ إجراء الحسابات الرياضية بما فيها الأكثر تعقيداً (الرياضيات التفاضلية والمتقطعة واللابلاسية وغيرها من التقنيات المتقدمة)
- ❖ تطوير الخوارزميات المبرمجة على اختلاف أنواعها (المتسلسلة و المتفرعة)
- ❖ معالجة البيانات وتحليلها وعرضها بمختلف الطرق
- ❖ تنفيذ عمليات الرسم ثنائي وثلاثي الأبعاد بدقة متناهية

✓ يشمل Matlab على مجموعة من الأدوات البرمجية مصنفة ضمن ما يعرف toolbox (صندوق أدوات) حيث أن كل صندوق متخصص بمجال معين



جامعة
المنارة

Shortcuts | How to Add | What's New

Command Window 1 نافذة الأوامر

New to MATLAB? Watch this video or read [Getting Started](#).

Workspace 2 إطار العمل

Stack: Base Select data to plot

Name Value Min Max

Command History 3 تاريخ الأوامر

-- m 05:49 20/02/2013 --

Start OVR

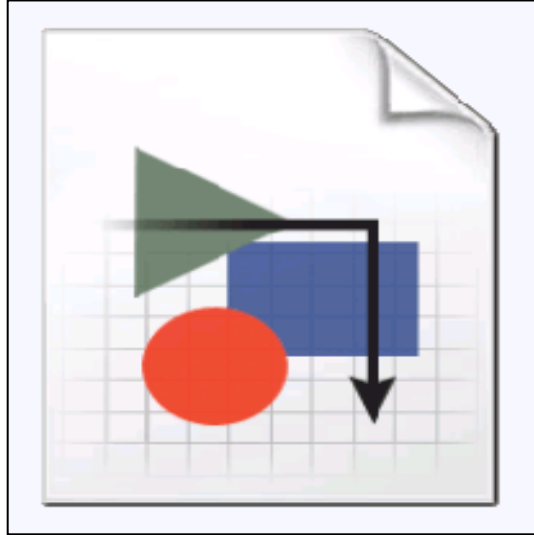
التعريف بالبرنامج

برنامج هندسي مخصص للمهام الحسابية و محاكاة النظم المختلفة ، حيث تتوفر فيه العديد من الدوال المبنية داخليا والتي تستخدم في حل المعادلات الرياضية و التفاضل والتكامل والرسم ثنائي الابعاد والرسم ثلاثي الابعاد وغيرها الكثير والكثير.

الاجزاء الرئيسية للبرنامج

- 1- Command Window.
- 2- Work Space.
- 3- Command History

جزء من Matlab وهو أداة نمذجة ومحاكاة وتحليل النظم الديناميكية
يستطيع التعامل مع النظم المستمرة و المتقطعة و الهجينة و هو اختصار لعبارة (SIMulation and LINK) أي
بمعنى محاكاة وارتباط



✓ يستخدم لبناء النماذج الهندسية حيث يقوم بإخراج واجهات رسومية (GUI) كمخططات صندوقية وبعد ذلك
يمكن تنفيذ المحاكاة وتحليل النتائج

✓ Simulink بمثابة مكتبة ضخمة جداً مؤلفة من مكتبات فرعية كل مكتبة فرعية تتضمن أدوات نمذجة ومحاكاة
و تحليل مجال تخصصي معين (هندسة الطيران-السيارات-نظم التحكم الآلي-النظم الالكترونية- النظم
الهيدروليكية- النظم الحرارية-النظم الميكانيكية-معالجة الصورة-معالجة الإشارة-المنطق الضبابي-الشبكات
العصبونية الصناعية وعدد كبير من المجالات التخصصية الأخرى بما فيها المجالات الطبية والاقتصادية وحتى
البيولوجية)

✓ يركز في معالجته لمختلف هذه المجالات على رياضيات عالية التقنية ركيزتها الأساسية المصفوفات و الطرق
العددية المبرمجة المتقدمة



1 اختيار التطبيق المناسب

2 اختيار المكونات الرئيسية للمشروع

3 تحديد عناصر المنظومة بدقة

4 توصيل الكائنات وتحديد قيمها

5 عرض النتائج وتحليلها

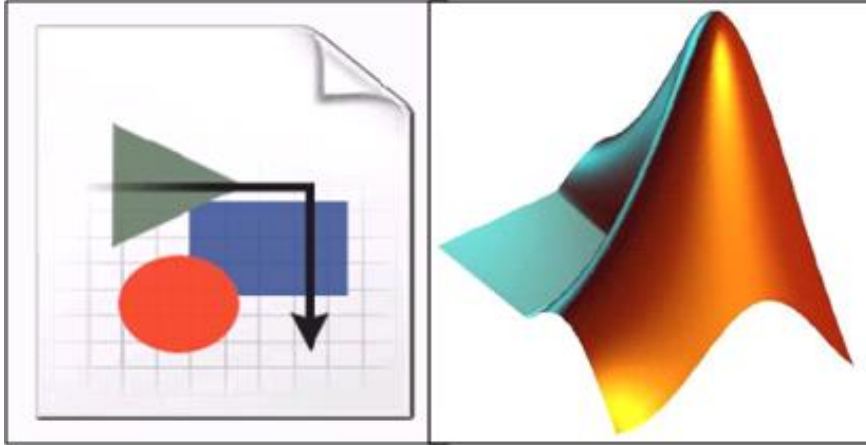
كيفيّة اختيار العناصر لبناء برنامج محاكاة

في المجال الأكاديمي:

عمليات التفاضل والتكامل والطرق العددية المعقدة
حل المعادلات الجبرية
حل المعادلات التفاضلية واللابلاسية ذات الرتب العليا
عمليات التفاضل الجزئي وعمليات الكسر الجزئي
العناصر المنتهية

في المجال التطبيقي:

أنظمة التحكم
معالجة الصورة والصوت
محاكاة الالكترونيات
محاكاة النظم الميكانيكية والهيدروليكية والحرارية والكهربائية
صناعة السيارات
الطيران والصناعات العسكرية (الدفاع الجوي)
صناعة الروبوت
في المجالات الانشائية (التحليل بالعناصر المنتهية)
الهندسة الطبية (التحليل الدوائي والكشف عن الأورام الخبيثة)



وهذا النظام يمكن كتابته في صورة مصفوفات كما يلي:

$$Ax=b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{حيث:}$$

والمطلوب هو حساب قيمة المتجه x الذي يحقق كل المعادلات السابقة حيث x في كل التطبيقات تمثل استجابة أو خرج النظام و b هي الدخل للنظام و A تمثل معاملات أو خواص النظام.

طريقة معكوس مصفوفة

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

Example

$$\begin{array}{rrcr} 3x & +2y & -z & = 10 \\ -x & +3y & +2z & = 5 \\ x & -y & -z & = -1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A=[3 \ 2 \ -1; -1 \ 3 \ 2; 1 \ -1 \ -1];$$

$$b=[10 \ 5 \ -1]';$$

$$x=\text{inv}(A)*b$$

$$x = \begin{bmatrix} -2.0000 \\ 5.0000 \\ -6.0000 \end{bmatrix}$$

طريقة Cramer

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = A$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = B$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} & a_{13} \\ B & a_{22} & a_{23} \\ C & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A & a_{13} \\ a_{21} & B & a_{23} \\ a_{31} & C & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ a_{31} & a_{32} & C \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_1}{\Delta} \quad y = \frac{D_2}{\Delta} \quad z = \frac{D_3}{\Delta}$$

Example

$$\begin{array}{rrcr} 3*x & +2*y & +5*z & = & 22 \\ 4*x & +5*y & -2*z & = & 8 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}$$

```
A=[3 2 5;4 5 -2; 1 1 1];  
delta=det(A);  
d1=[22 2 5;8 5 -2; 6 1 1];  
D1=det(d1);  
d2=[3 22 5;4 8 -2; 1 6 1];  
D2=det(d2);  
d3=[3 2 22;4 5 8; 1 1 6];  
D3=det(d3);  
x=D1/delta;  
y=D2/delta;  
z=D3/delta;  
disp('x=');disp(x);  
disp('y=');disp(y);  
disp('z=');disp(z);
```

```
clc  
clear  
a=input('Overall Matrix=');  
b=a(:,end);  
a(:,end)=[];  
delta=det(a);  
for i=1:size(a,1)  
    N=a;  
    N(:,i)=b;  
    D=det(N);  
    x=D/delta;  
    disp(['variable',num2str(i),'=']);  
    disp(x)  
end
```

Nonlinear Equations

$$T = e^{-kt} + 100$$

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8$$

$$x(t) = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + 0.2 + 0.7 \sin 7t$$

إن حل المعادلات اللاخطية أداة أساسية عند نمذجة و محاكاة الأنظمة الفيزيائية

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر

الحل بطريقة بيانية

إذا رسمنا مخطط الدالة $y=f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط x_1, x_2, \dots, x_n فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة

$$f_1(x) = f_2(x)$$

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

حيث f_1, f_2 دالتان يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذراً للمعادلة.

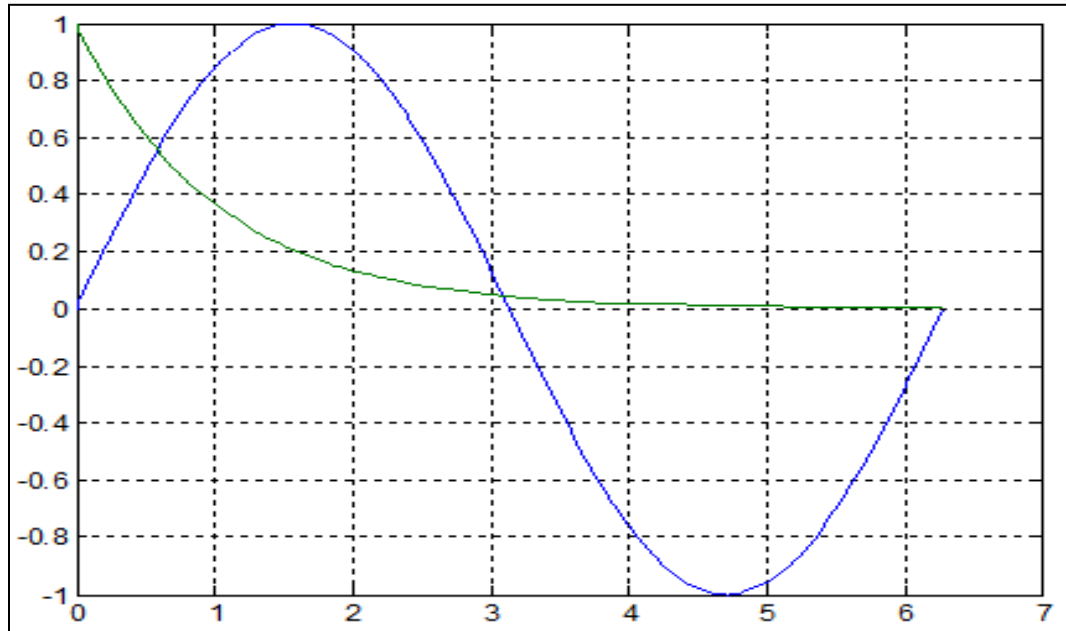
Example

$$e^x \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = e^{-x}$$

عين مواقع جذور المعادلة

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة:



```
x=0:pi/100:2*pi;
```

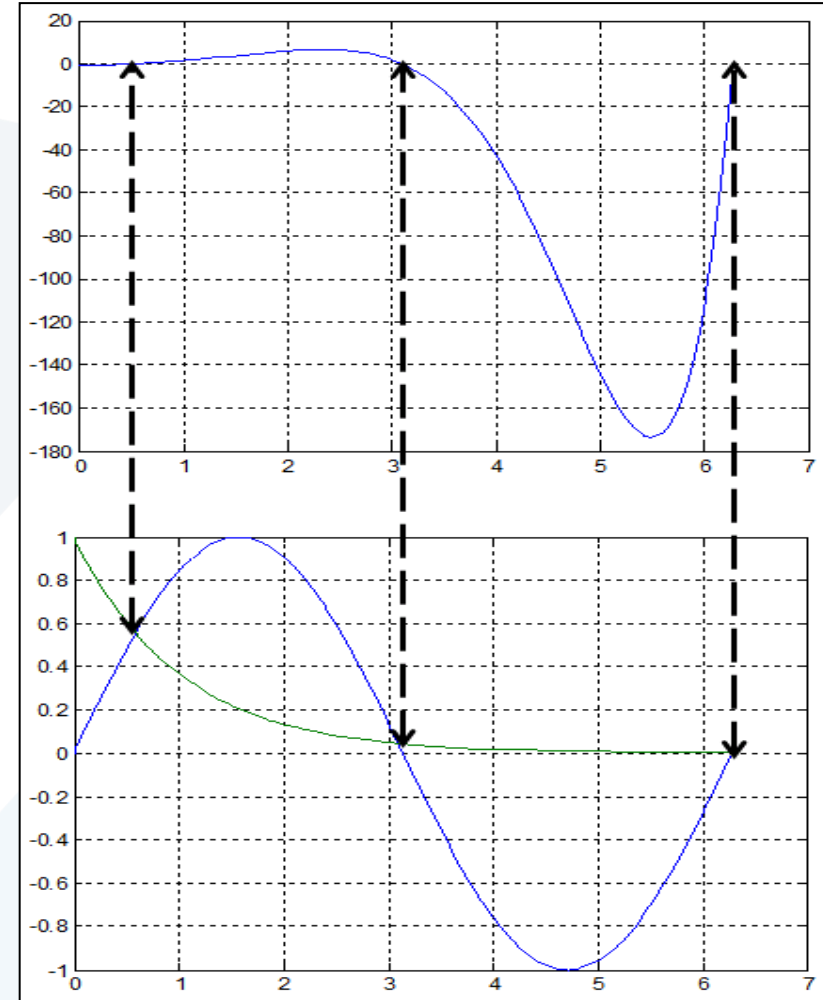
```
y=sin(x);
```

```
z=exp(-x);
```

```
plot(x, y, x, z)
```

```
grid
```

```
x=0:pi/100:2*pi;  
y=sin(x);  
z=exp(-x);  
w=exp(x).*sin(x)-1;  
subplot(211);  
plot(x,w);  
title('exp(x).*sin(x)-1');  
xlabel('x-axis');  
ylabel('w-axis');  
grid  
subplot(212);  
plot(x,y,x,z);  
title('y=sin(x)&z=exp(-x)');  
xlabel('x-axis');  
ylabel(' y&z-axis');  
grid
```



تعيين مواقع الجذور بطريقة مبرمجة

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة x_1, x_2, \dots, x_n فإذا كانت قيمة $f(x_i) \cdot f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين x_i و x_{i+1} .

مثال: عين مواقع جذور المعادلة: $f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$ في الفترة $[-8, 8]$.

إذا أخذنا فترة تقسيم h مساوية إلى 4 فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط الأول في الفترة $(-4, 0)$ والثاني في الفترة $(4, 8)$.

أما عند اختيار فترة تقسيم أصغر 2 بدلاً من 4 فإن إشارات الدالة تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي إن هناك جذوراً في الفترات $(-2, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, 4)$ و $(4, 6)$.

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:4:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

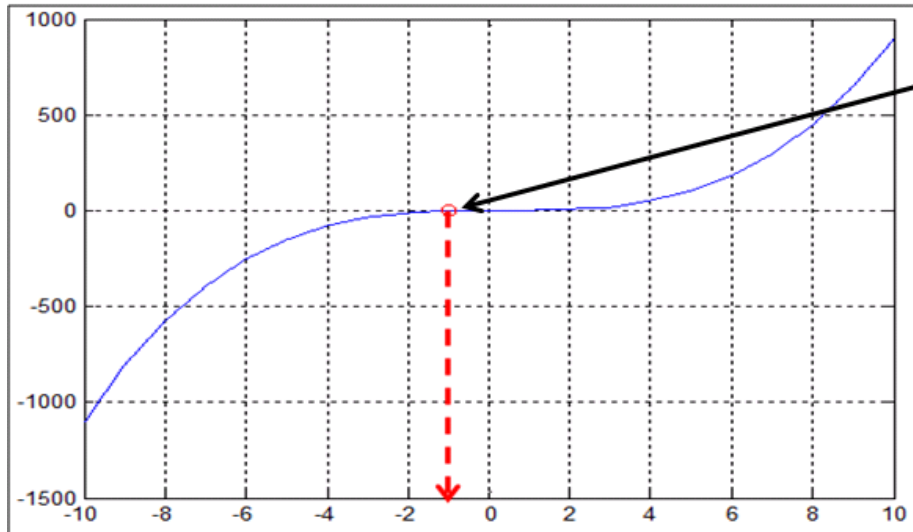
```
-8
a =
    7654
-4
a =
    638
0
a =
   -10
4
a =
   -50
8
a =
    902
```

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:2:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

```
-8
a =
    7654
-6
a =
   2750
-4
a =
    638
-2
a =
    22
0
a =
   -10
2
a =
    14
4
a =
   -50
6
a =
    38
8
a =
    902
```

Example

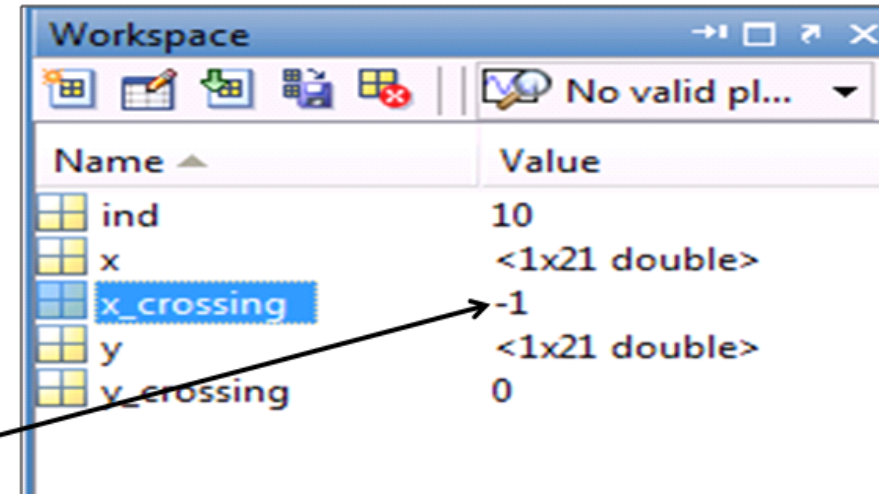
```
x=-10:1:10;
y=x.^3-x.^2+2;
ind=find(y==0);
x_crossing=x(ind);
y_crossing=y(ind);
plot(x, y, x_crossing, y_crossing, 'ro');
grid
```



تقنيات باستخدام Matlab

عين مواقع جذور المعادلة

$$y=x^3-x^2+2$$



باستخدام تعليمة حل المعادلة في الماتلاب

```
[x]=solve('x^3-x^2+2')
```

باستخدام تعليمة رسم التوايح في الماتلاب

```
ezplot('x^3-x^2+2',[-10 10])
grid
```

Example

$$x - 2y + z^2 = 6$$

$$3x + y^3 - z = 8$$

$$x + y + z = 6$$

`syms X Y Z`

`[X Y Z]=solve('X-2*Y+Z^2-6','3*X+Y^3-Z-8','X+Y+Z-6');`

`double([X Y Z])`

ans =

1.0000

2.0000

3.0000

3.2263

0.7207

2.0531

7.7556 - 3.4284i

-2.6088 + 0.6533i

0.8531 + 2.7751i

7.7556 + 3.4284i

-2.6088 - 0.6533i

0.8531 - 2.7751i

6.6313 - 0.7573i

1.2484 + 2.0487i

-1.8797 - 1.2914i

6.6313 + 0.7573i

1.2484 - 2.0487i

-1.8797 + 1.2914i

تطوير طريقة عددية مبسطة لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات.

مرتبة المعادلة التفاضلية ودرجتها: مرتبة المعادلة التفاضلية (Order) هي أعلى رتبة اشتقاق فيها. أما درجتها (Degree) فهي القوة المرفوعة لها أعلى رتبة اشتقاق

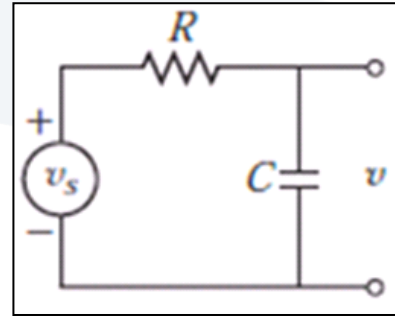
$$y'' - 3y' + 4xy - 5 = 0$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x \frac{dy}{dx} + xy = \sin x$$

الشكل العام للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

لحل هذه المعادلة بطريقة عددية مبسطة نتبع الخطوات التالية:

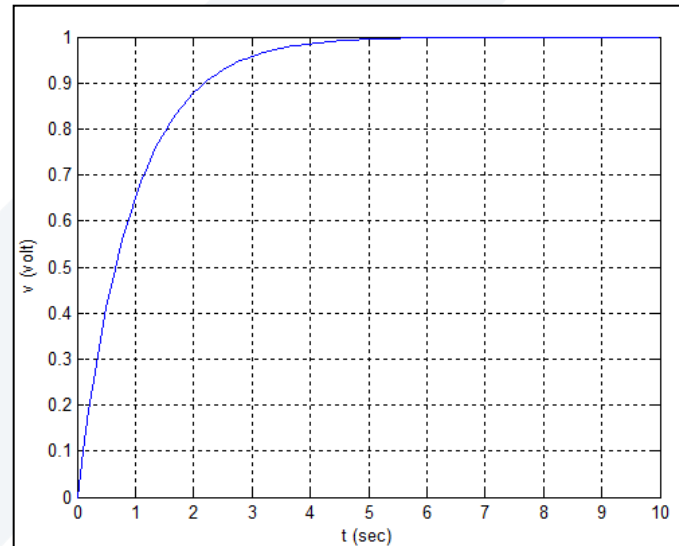
- التعبير عن البارامتر المطلوب حسابه بمقدار عنصري صغير يعرف من خلال المعادلة التفاضلية للنظام .
- إجراء حل تراكمي لهذا العنصر عبر تنفيذ عدد كبير من مرات الحساب من خلال خوارزمية مبرمجة تقوم بحساب مقدار ذلك العنصر التفاضلي في كل مرة ومراكمته فوق المرات السابقة التي تم فيها حسابه بذات الطريقة .
- ستوضح هذه الخطوات من خلال استعراض بعض التطبيقات



$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_s$$

Numerical Solution

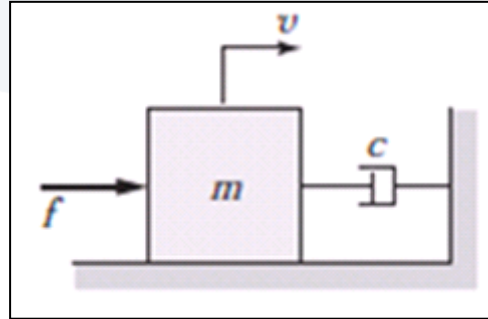
```
vs=1;
R=10^3;
C=10^-3;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=10;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X(i,:)=[t v];
    dv=(vs-v)/(R*C);
    v=v+dt*dv;
    t=t+dt;
end
plot(X(:,1),X(:,2),'b' )
xlabel('t (sec)')
ylabel('v (volt)')
grid
```



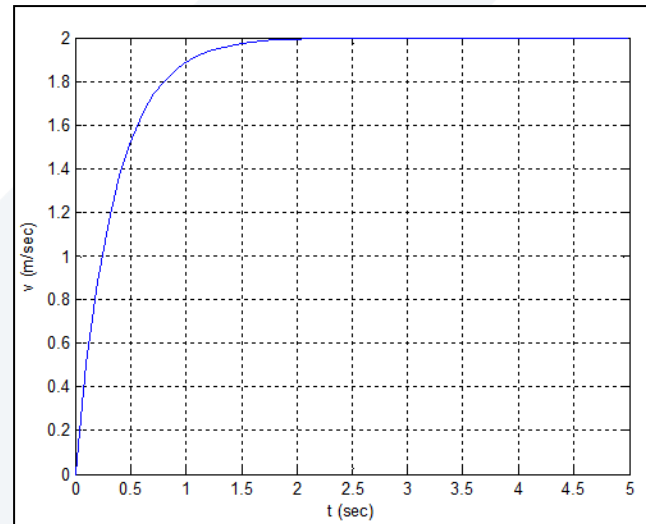
Numerical Solution

```
f=10;
m=2;
c=5;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=5;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X(i,:)=[t v];
    dv=(f-c*v)/m;
    v=v+dt*dv;
    t=t+dt;
end
plot(X(:,1),X(:,2),'b' )
xlabel('t (sec)')
ylabel('v (m/sec)')
grid
```

حساب سرعة كتلة متصلة بمخمد



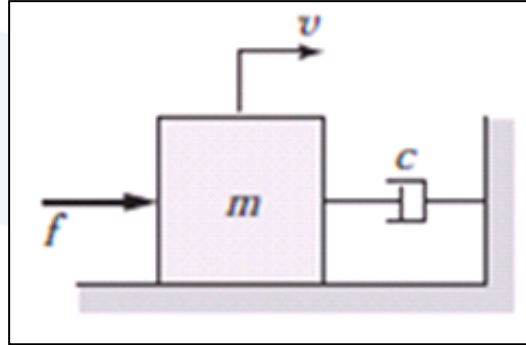
$$m \frac{dv}{dt} + cv = f$$



تقنيات إضافية بمساعدة خوارزمية الحل العددي

حساب الزمن عند سرعة معينة

```
f=10;
m=2;
c=5;
t=0;
v=0;
dt=0.01;
tsim=5;
n=(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X(i,:)=[t v];
    dv=(f-c*v)/m;
    v=v+dt*dv;
    if v>=1.8
        disp(t)
        break
    end
    t=t+dt;
end
```



حساب القوة المطلوبة للحصول على
سرعة مستقرة معينة

```
m=2;
c=5;
for f=10:20
    t=0;
    v=0;
    dt=0.01;
    tsim=5;
    n=(tsim-t)/dt;
    for i=1:n
        X(i,:)=[t v];
        dv=(f-c*v)/m;
        v=v+dt*dv;
        t=t+dt;
    end
    if X(n,2)>3
        disp(f)
        break
    end
end
```

انتهت المحاضرة