المعادلات الموضعية

يتناول درسنا هذا المعادلات الموضعية للكهرباء والمغناطيسية، وسنبدأ بالمعادلتين الموضعيتين للكهرباء الساكنة، وهما: معادلتان تختصران مانعرفه عن الكهرباء الساكنة، مع الأخذ بالعلاقة التي تربط الحقل الكهربائي بالقوة الكهربائية:

القوّة الكهربائية $\vec{F}$ التي تخضع لها شحنة كهربائية q في منطقة يسودها الحقل كهربائي $\vec{E}$ تُعطى بالعلاقة: $\vec{F} = q\vec{E}$

بمعرفة العلاقة السابقة وانطلاقاً من المعادلتين الموضعيتين للكهرباء الساكنة سنرى أنّه بالإمكان استنتاج كل مايتعلق بالكهرباء الساكنة.

في البدايةنورد الخاصة الآتية المعروفة في الرياضيات ونقبل بها:

" بمعرفة كلٍ من دوّار حقل شعاعي وتفَرُّقه يمكننا تحديد هذا الشعاع. "

أي: إذا كان الحقل الشعاعي $\vec{A}$ مجهولاً، ولكن لدينا الحقل الشعاعي $\overrightarrow{rot\vec{A}}$ والحقل السلمي $div\vec{A}$ معروفان في منطقة من الفراغ (D) يُمكن التوصّل إلى الحقل الشعاعي $\vec{A}$ في المنطقة (D).

لنبدأ بكتابة المعادلتين الموضعيتين للكهرباء الساكنة:

1. المعادلتان الموضعيتان للكهرباء الساكنة

أ.**دوَّر الحقل الكهربائي**: من دراستنا للحقل الكهربائي وجدنا أنّ:

الحقل الكهربائي مشتق من كمون

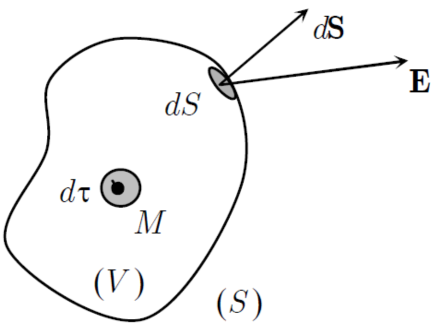
ويكافئ ذلك أن يكون جولان هذا الحقل على أي منحن مغلق معدوم، ونعبّر عن ذلك بالقول:

يوجد حقل سلّمي V نسميه الكمون الكهربائي بحيث $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

ونعلم (خاصة في الرياضيات) أنّ الشرط اللازم والكافي ليكون حقل شعاعي ما $\vec{E}$ مشتقاً من كمون سلمي هو أن يكون دوّار هذا الحقل معدوماً. أي $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

النتيجة: المعادلة الموضعية الأولى للكهرباء الساكنة هي: $\boxed{\mathbf{rotE} = \mathbf{0}}$

ب.**تفرّق الحقل الكهربائي**: لتكن (V) منطقة توزعت فيها شحن كهربائية بكثافة حجمية ρ ، وليكن (S) سطحاً يحيط بـ (V)، الشكل الآتي:



تُكتب نظرية غاوس كما يلي:

$$\iint_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \rho \, d\tau$$

وبتطبيق نظرية أوستروغرادسكي نجد:

$$\iint_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{E} . d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \rho \, d\tau$$

والعلاقة السابقة محققة دوماً، أي محققة في حال اخترنا أي منطقة محدودة من الفراغ وطبقنا عليها نظرية غاوس نجد أنّ التكامل السابق محقق،

إذن يتساوى الحدّان تحت التكامل الحجمي في الطرفين، أي: $\operatorname{div} \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

النتيجة: المعادلة الموضعية الثانية $\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

كما أشرنا سابقاً إذا أضفنا إلى المعادلتين الموضعيتين العلاقة $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ يُمكننا استنتاج كامل قوانين الكهرباء الساكنة.

لنبيّن ذلك:

ولنبدأ بإيجاد عبارة الكمون السلّمي:

2. معادلة الكمون السلمي

لننطلق من المعدلتين الموضعيتين:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ و } \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

إذن:

$$\operatorname{div}(-\mathbf{grad}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

وهي العلاقة المعروفة في الكهرباء الساكنة، ومنها يُمكن استنتاج عبارة الحقل الكهربائي بأخذ تدرّج التابع السابق، وبهذا نجد كل خواص الكهرباء الساكنة.

ملاحظة:

إذا كان $\rho = 0$ نجد:

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

تعرف هذه المعادلة باسم معادلة لابلاس Laplace.

بالمثل لنبحث عن المعادلتين الموضعيتين للمغناطيسية الساكنة:

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

تُعرف المعادلة السابقة باسم معادلة بواسون Poisson.

نبرهن أنه بافتراض وجود شروط حدية على المنطقة المدروسة (أي بإعطاء قيم محددة للكمون عند حدود المنطقة) فإنّ معادلة بواسون تُعرِّف وبشكل وحيد التابع V،

نأخذ عادة في حالة توزع منتهٍ (أي محدود مكانياً) الشرط $V = 0$ في اللانهاية.

عندها يكون حل معادلة بواسون:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho\, d\tau}{r}}$$

وهي العلاقة المعروفة في الكهرباء الساكنة، ومنها يُمكن استنتاج عبارة الحقل الكهربائي بأخذ تدرّج التابع السابق، وبهذا نجد كل خواص الكهرباء الساكنة.

ملاحظة:

إذا كان $\rho = 0$ نجد:

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

تعرف هذه المعادلة باسم معادلة لابلاس Laplace.

بالمثل لنبحث عن المعادلتين الموضعيتين للمغناطيسية الساكنة:

3. المعادلتان الموضعيتان للمغناطيسية الساكنة

أ. **تفرق الحقل**: وجدنا في دراستنا للحقل المغناطيسي الساكن أنّ:

تدفق الحقل المغناطيسي محافظ

أي إنّ تدفق الحقل المغناطيسي من خلال أي سطح مغلق (S) معدوم:

$$\oiint_{(S)} \mathbf{B.dS} = 0 \Rightarrow \iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{B}\, d\tau = 0$$

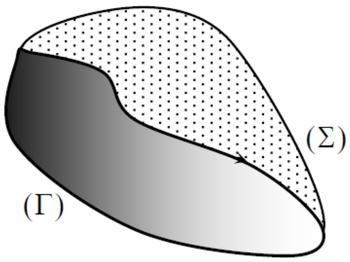
حيث (V) المنطقة التي يحدها (S).

ومن ثَم:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}$$

وهي المعادلة الموضعية الأولى.

ب.دوَّار الحقـل: في منطقـة تحتـوي تيـارات حجميـة، لـيكن $\mathbf{j}$ شـعاع كثافـة التيـار الحجمي ، ليكن (Σ) سطحاً مغلقاً يستند إلى منحنٍ (Γ) كما في الشكل الآتي:



لدينا حسب نظرية أمبير:

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{B}.\mathbf{dl} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \mathbf{j}.d\mathbf{S}$$

وبتطبيق نظرية ستوكس أمبير نجد:

$$\iint_{(\Sigma)} \mathbf{rotB}.d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \mathbf{j}.d\mathbf{S} \Rightarrow$$

$$\iint_{(\Sigma)} \left(\mathbf{rotB} - \mu_0 \mathbf{j}\right).d\mathbf{S} = 0$$

وهذا محقق لِكل سطح (Σ)، إذن:

$$\boxed{\mathbf{rotB} = \mu_0 \mathbf{j}}$$

وهي المعادلة الموضعية الثانية

سنرى في الدرس القادم كيف يُمكننا استنتاج خواص الحقل المغناطيسي من المعادلتين السابقتين.