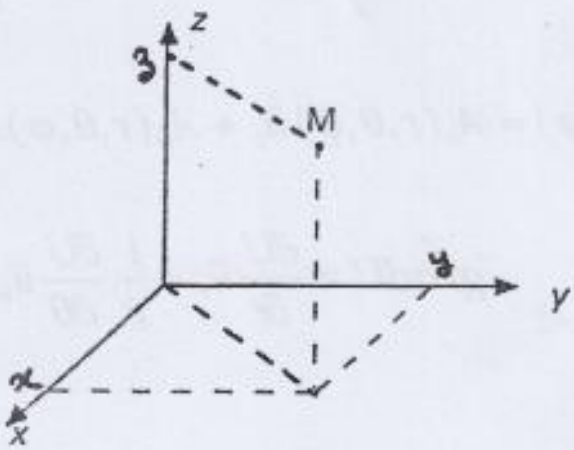
المؤثرات الشّعاعية

١) صيغ المؤثّرات الشعاعية في جُمل الإحداثيات الثلاث:

١-١) الإحداثيات الديكارتية:



♣ لدينا: $\overline{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$

♣ الحقلان المدروسان:

- الحقل السلمي: $U(x,y,z)$
- الحقل الشعاعي:

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z).\vec{u}_x + A_y(x,y,z).\vec{u}_y + A_z(x,y,z).\vec{u}_z$$

♣ التدرُّج: $\overline{grad}\,U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}.\vec{u}_z$

♣ التباعد: $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

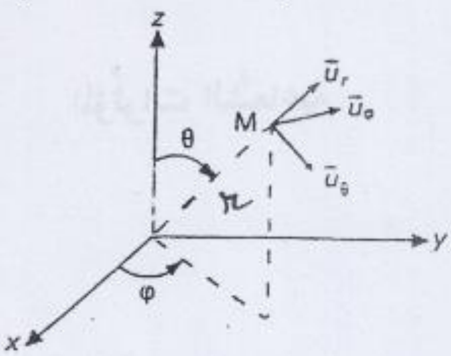
♣ اللابلاسيان: $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

♣ الدوران أو اللف:

$$\overline{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

١–٣) الإحداثيات الكروية:



♣ لدينا: $\overline{OM} = r.\vec{u}_r$

$$x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = r.\sin\theta.\sin\varphi$$

$$z = r.\cos\theta$$

♣ الحقلان المدروسان:

- الحقل السلمي: $U(r,\theta,\varphi)$
- الحقل الشعاعي:

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi).\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi).\vec{u}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi).\vec{u}_\varphi$$

♣ التدرج:

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial U}{\partial \varphi}.\vec{u}_\varphi$$

♣ التباعد:

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta.A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi)$$

١-٢) الإحداثيات الأسطوانية:

♣ لدينا: $\overline{OM} = r.\vec{u}_r + z.\vec{u}_z$

$$x = r.\cos\theta$$

$$y = r.\sin\theta$$

♣ الحقلان المدروسان:

- الحقل السلمي: $U(r,\theta,z)$

- الحقل الشعاعي:

$$\vec{A}(r,\theta,z) = A_r(r,\theta,z).\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z).\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z).\vec{u}_z$$

♣ التدرج: $\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}.\vec{u}_z$

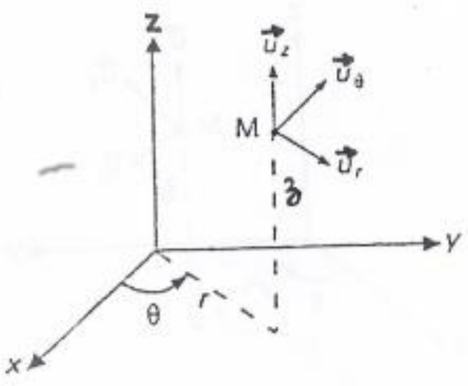
♣ التباعد: $div\vec{A} = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}(r.A_r) + \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$

♣ اللابلاسيان: $\Delta U = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

♣ الدوران أو اللف:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left[\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial \theta}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_\theta)\right].\vec{u}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_r) - \frac{\partial}{\partial r}(A_z)\right].\vec{u}_\theta$$

$$+\left[\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}(r.A_\theta) - \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial \theta}(A_r)\right].\vec{u}_z$$



♣ اللابلاسيان:

$$\Delta U=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

♣ الدوران أو اللف:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}=\frac{1}{r.\sin\theta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\theta)\right]\vec{u}_r$$

$$+\frac{1}{r}\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_r)-\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_\varphi\right)\right]\vec{u}_\theta+\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r.A_\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\right]\vec{u}_\varphi$$

٢) نظرية ستوكس:

نستخدم الرموز التالية:

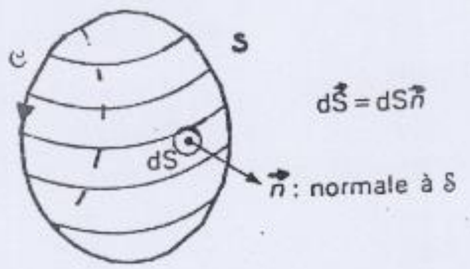
$\vec{A}$: هو حقل شعاعي مشتقاته الجزئية بالنسبة لإحداثيات الفراغ محدودة،

C : هو منحنٍ مُغلق مُوجَّه،

S : هو سطح يرتكز على المنحني C و مُوجَّه حسب قاعدة اليد اليمنى،

$\vec{n}$: هو الشعاع الناظم على السطح S في النقطة المُعتبرة.

تُكتب نظرية ستوكس على النحو: $\oint_C \vec{A}.d\vec{l}=\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{A}.d\vec{s}$ حيث $d\vec{s}=ds.\vec{n}$.



٣) نظرية أوستوغرادسكي:

نستخدم الرموز التالية:

$\vec{A}$: هو حقل شعاعي مشتقاته الجزئية بالنسبة لإحداثيات الفراغ محدودة،

S : هو سطح مُغلَق و مُوجَّه نحو الخارج،

V : هو الحجم المحصور داخل السطح المُغلَق.

تُكتب نظرية أوستوغرادسكي على النحو: $\oiint_S \vec{A}.d\vec{s}=\iiint_V div\,\vec{A}.d\tau$.