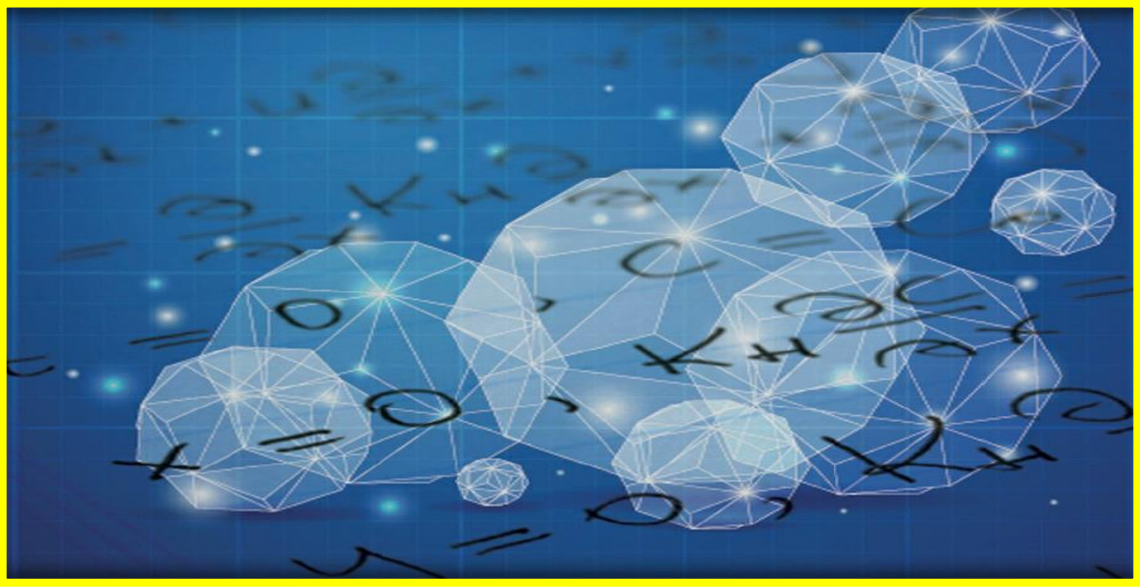
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الميكاترونكس

مقرر المعادلات التفاضلية و التحويلات

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2023-2024

Contents

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (بحد ثابت) من الرتبة الثانية

برمجة المعادلات التفاضلية باستخدام Matlab

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

المؤثر التفاضلي

نعرّف $D \equiv \frac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2} \qquad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}$$

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x} \qquad D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9e^{3x}$$

الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n بدلالة المؤثر التفاضلي

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} D + a_n)\, y = f(x)$$

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n$$

$\Phi(D)\, y = f(x)$ خطية غير متجانسة

$\Phi(D) y = 0$ خطية متجانسة

نفترض أن المعادلة $y''+a_1y'+a_2y = 0$ (1)

نحاول استخدام $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت

نضع المعادلة على الصورة $(D^2+a_1D+a_2)y = 0$ ثم نعوض بالحل المفروض

نحصل على المعادلة $(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)e^{\lambda x}=0$

وحيث أن $e^{\lambda x}\neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1 , λ_2

حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$

حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$

مركبان .

جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

جذرا المعادلة المميزة مركبان :

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام $y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$

يكون الحل العام للمعادلة على الصورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda x} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \frac{d}{dx}$ نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4 \quad , \quad \lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الحـــــل : نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 2D + 5)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

المعادلة المساعدة $\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$

الحل العام للمعادلة $y = e^{-x}\,[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$

مثال

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل : نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ويكون جذراها $\lambda = 2,\ 2$

الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (بحد ثابت) من الرتبة الثانية

في حالة معادلة تفاضلية غير متجانسة (بحد ثابت) من الشكل :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = C$$

لنرمز للحل بالرمز y , و هو مجموع حلين :

$$y = y_1 + y_2$$

حيث :

y_1 حل المعادلة المتجانسة: و يتم إيجاده بجعل الحد الثابت في المعادلة صفراً , و نتعامل مع المعادلة بذات الطريقة التي نتعامل مع حل المعادلة المتجانسة من حيث إيجاد القيم المميزة , أي :

$$y_1 = C_1 . e^{\lambda_1 . t} + C_2 . e^{\lambda_2 t}$$

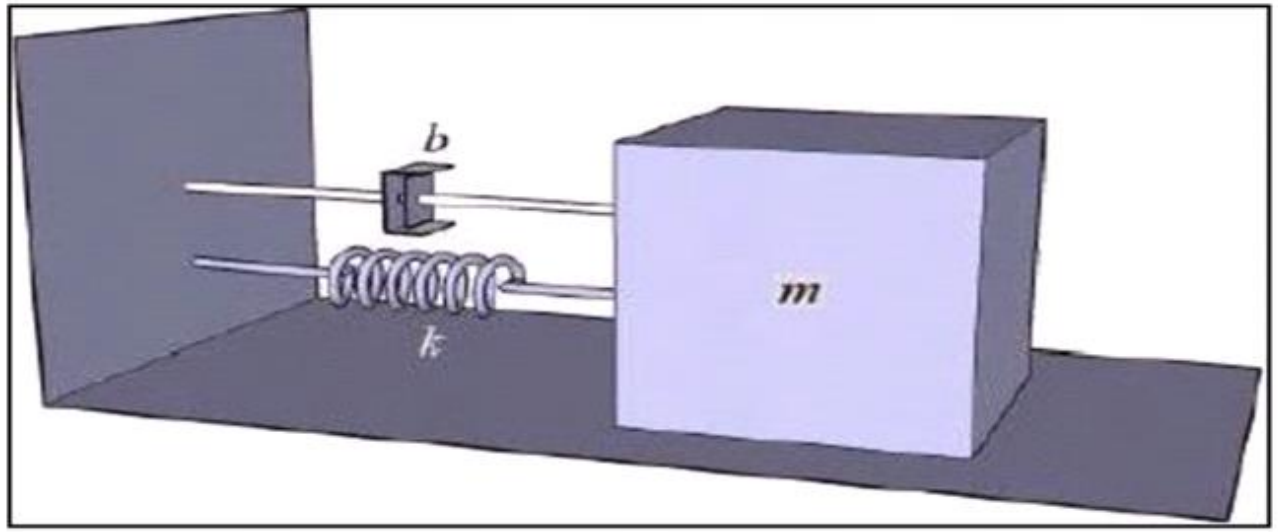
y_2 حل المعادلة الناتج عن حد عدم التجانس : على اعتبار أن حد عدم التجانس ثابتاً فإن y_2 ثابتاً , و بالتالي لإيجاده يتم حذف جميع المشتقات من المعادلة (على اعتبار أنها مشتقات لحد ثابت و بالتالي فهي معدومة) ثم يتم حل المعادلة لنحصل على y_2

$$a_2 y_2 = C \longrightarrow y_2 = \frac{C}{a_2}$$

Example

في نظام كتلة-نابض-مخمد المبين بالشكل

حيث : $m = 1[kg]; k = 2[N/m]; b = 3[Ns/m]; X(0) = 0.1; X'(0) = 0$



1 - أوجد العلاقة الزمنية لإزاحة الكتلة

الحل :

بالاعتماد على قانون نيوتن في الحركة الانسحابية :

$$\sum F = m.x''$$

$$-bx' - kx = mx''$$

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$(m.D^2 + b.D + k)x = 0$$

$$x = e^{\lambda.t}$$

$$(m\lambda^2 + b\lambda + k)e^{\lambda.t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1$$

$$0.1 = C_1 + C_2$$

$$x' = -2.C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$0 = -2.C_1 - C_2$$

$$C_1 = -0.1$$

$$C_2 = 0.2$$

$$x = -0.1.e^{-2.t} + 0.2.e^{-t}$$

2 - بفرض أن الشروط الابتدائية معدومة ، و هناك قوة شد خارجية F=1 [N] مطبقة على الكتلة ، دون تغيير على باقي البارامترات

أوجد العلاقة الزمنية لإزاحة الكتلة في هذه الحالة

الحل :

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t}$$

حيث تبقى قيم $\lambda_{1,2}$ هي ذاتها في الطلب الأول

لإيجاد x_2 و على اعتبار أن المعادلة التفاضلية أصبحت

$$mx'' + bx' + kx = F$$

و حيث أن F مقدار ثابت فإن x_2 هو مقدار ثابت ، و بالتالي :

$$kx_2 = F$$

$$x_2 = 0.5$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t} + 0.5$$

$$x' = -2C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 = C_1 + C_2 + 0.5$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$0 = -2C_1 - C_2$$

$$C_1 = 0.5$$

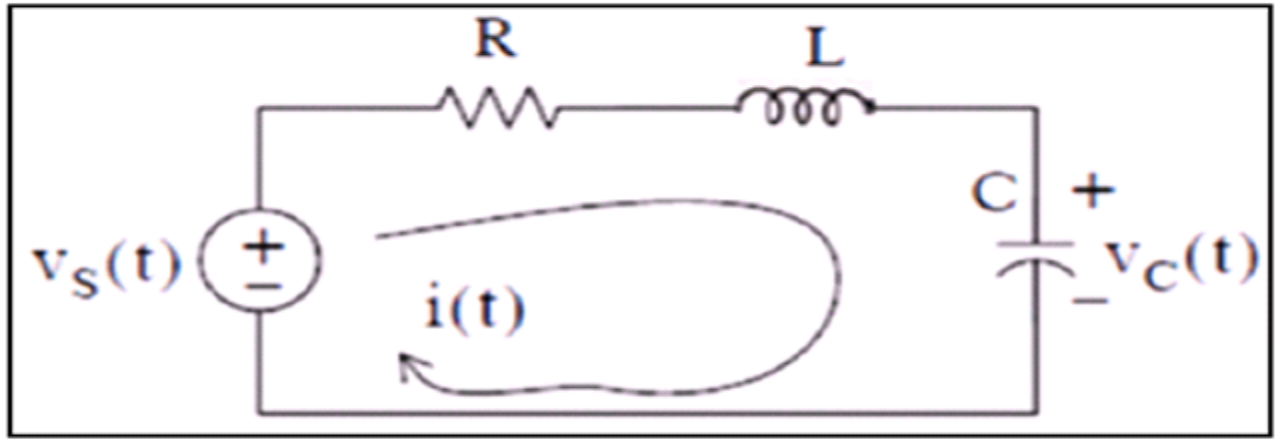
$$C_2 = -1$$

$$x = 0.5.e^{-2.t} - e^{-t} + 0.5$$

Example

في الدارة الكهربائية المبينة بالشكل حيث :

$L = 1[H]; C = 0.5[F]; R = 3[\Omega]; V_s=0.5; V_c(0) =0.1; i(0)=0.025$



و المطلوب:

أوجد من خلال حل المعادلة التفاضلية لجهد المكثف العلاقة الزمنية لجهد المكثف V_c و العلاقة الزمنية لتيار الدارة i

الحل :

بالاعتماد على قانون كيرشوف للجهود :

$$Ri + Li' + V_c = V_s$$

$$i_c = i = CV_c'$$

$$RCV_c' + LCV_c'' + V_c = V_s$$

$$1.5V_c' + 0.5V_c'' + V_c = V_s$$

نبدأ بحل المعادلة المتجانسة :

$$0.5V_c'' + 1.5V_c' + V_c = 0$$

$$(0.5D^2 + 1.5D + 1)V_c = 0$$

$$V_c = e^{\lambda t}$$

$$(0.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 1)e^{\lambda . t} = 0$$

$$0.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -1$$

الحل النهائي هو مجموع الحلين :

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t}$$

لإيجاد x_2 و على اعتبار أن المعادلة التفاضلية

$$1.5V_c' + 0.5V_c'' + V_c = V_s$$

و حيث أن V_s مقدار ثابت فإن x_2 هو مقدار ثابت ، و بالتالي :

$$x_2 = 0.5$$

$$x = C_1.e^{-2.t} + C_2.e^{-t} + 0.5$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1$$

$$0.1 = C_1 + C_2 + 0.5$$

$$x' = -2C_1.e^{-2.t} - C_2.e^{-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow x' = \frac{i(0)}{C} = \frac{0.025}{0.5} = 0.05$$

$$0.05 = -2C_1 - C_2$$

$$C_1 = 0.35 \qquad C_2 = -0.75$$

$$x = V_c = 0.35e^{-2.t} - 0.75e^{-t} + 0.5$$

$$i = i_c = Cx' = -0.35e^{-2.t} + 0.375e^{-t}$$

برمجة المعادلات التفاضلية باستخدام Matlab

تعليمة حل المعادلة التفاضلية

المؤثر التفاضلي

ثابت

```
y=dsolve('Dy=a*y')
```

متحول

```
y =
C6*exp(a*t)
```

الحل الناتج بالماتلاب

شرط ابتدائي

```
y=dsolve('Dy=a*y','y(0)=b')
y =
b*exp(a*t)
```

```
y=dsolve('Dy-2*x=0', 'y(0)=1')
y =
2*t*x + 1
```

الناتج هنا هو تكامل بالنسبة للزمن

```
y=dsolve('Dy-2*x=0', 'y(0)=1', 'x')
y =
x^2 + 1
```

الناتج هو تكامل بالنسبة للمتحول الموجود في نهاية العبارة البرمجية و هو هنا x

شرط ابتدائي

شرط ابتدائي

```
y=dsolve('D2y+y=0', 'y(0)=1', 'Dy(0)=0')
y =
cos(t)
```

انتهت المحاضرة