جامعة المنارة
قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

الدارات الكهربائية

الدكتور المهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

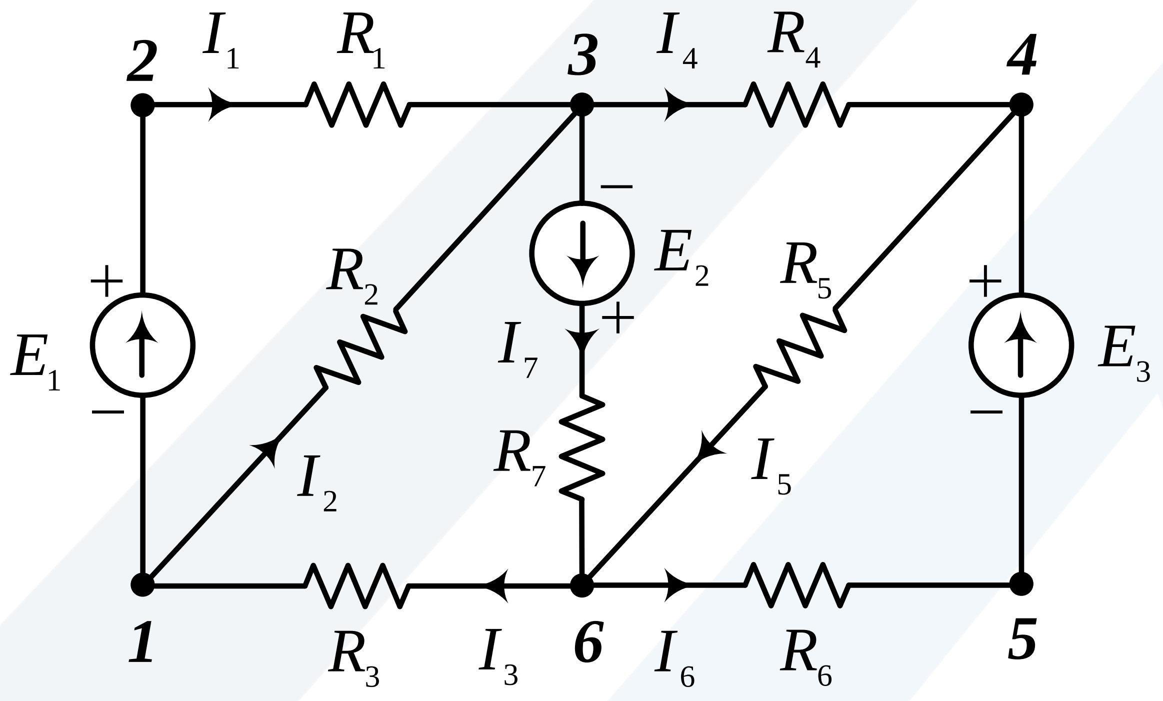
3

طرق تحليل الدارات الكهربائية

METHODS ANALYSIS OF ELECTRICAL CIRCUITS

استخدام قوانين كيرشوف :By using Kirchhoff's laws

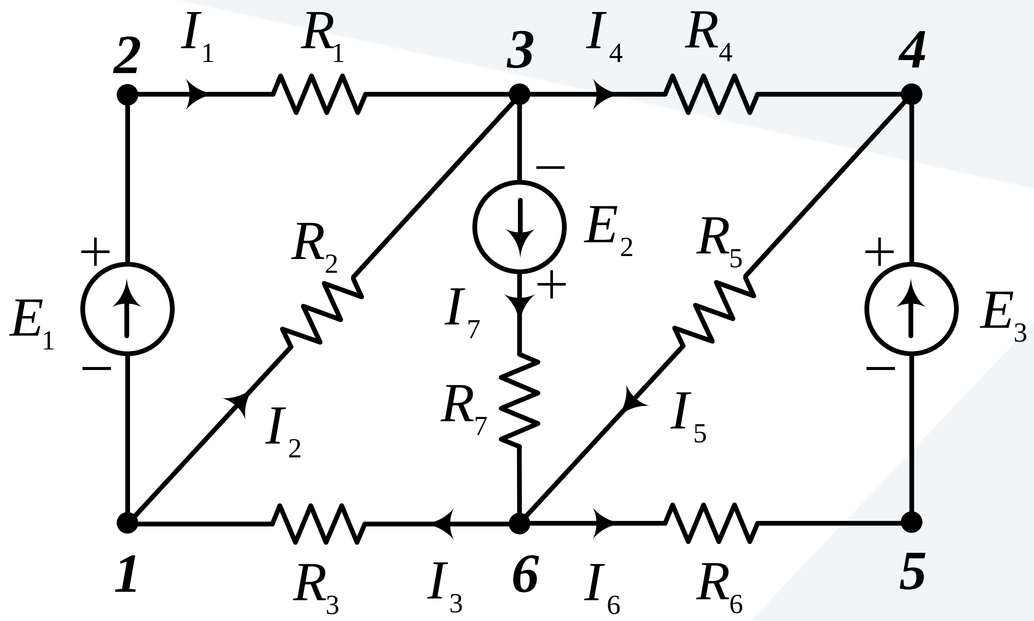
لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. تحوي هذه الدارة على عدد من العقد (1, 3, 4, 6)، وعدد من الحلقات (1-2-3-1، 1-3-6-1، 1-2-3-6-1،... وهكذا). يمكن كتابة معادلة التيارات في كل عقدة من عقد الدارة حسب قانون كيرشوف الأول، كما يمكن كتابة معادلات الجهود لكل حلقة حسب قانون كيرشوف الثاني.



توجد في المعادلات المكتوبة حسب قانوني كيرشوف الأول والثاني، التيارات التي بحسابها نكون قد حققنا هدف الحساب.

يجب قبل كتابة المعادلات اختيار الاتجاهات الافتراضية الموجبة للتيارات في كل فرع من فروع الدارة. الاتجاهات الفعلية للتيارات قد لا تتطابق مع الاتجاهات الافتراضية، وسيظهر الخطأ في اختيار اتجاه التيار نتيجة الحل، إذ ستكون قيمة مثل هذا التيار سالبة، وبالتالي يجب تغيير اتجاهه في الدارة وعَدّه فيما بعد موجباً.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY



نكتب الآن معادلات التيارات في العقد حسب قانون كيرشوف الأول:

في العقدة 1: $I_3 = I_1 + I_2$

في العقدة 3: $I_1 + I_2 = I_4 + I_7$

في العقدة 4: $I_5 = I_4 + I_6$

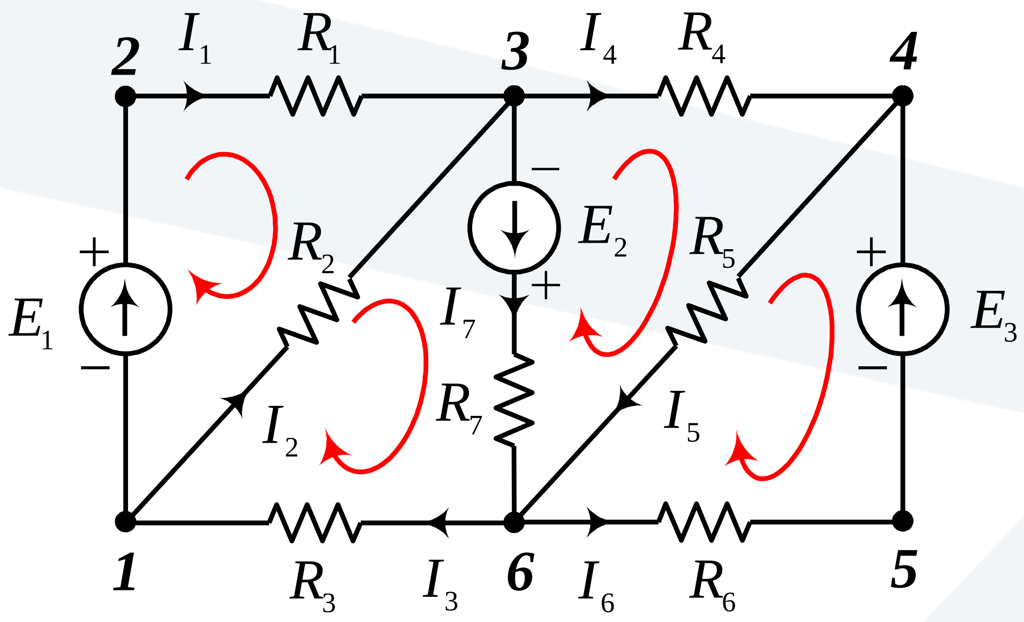
في العقدة 6: $I_5 + I_7 = I_3 + I_6$

نلاحظ من المعادلات السابقة أن هناك ثلاث معادلات مستقلة فقط، وهي المعادلات التي يدخل فيها تياروا حد جديد على الأقل مقارنةً بباقي المعادلات. المعادلة الرابعة لا تحوي تيار جديد، وبالتالي يمكن الحصول عليها من المعادلات السابقة.

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

وفقاً لذلك نجد أن عدد المعادلات المستقلة التي وضعت حسب قانون كيرشوف الأول غير كافٍ لتحديد جميع التيارات في الدارة، إذ يسري فيها سبعة تيارات (سبعة مجاهيل). معادلات العقد المستقلة هي ثلاث فقط. يتم وضع باقي المعادلات اعتماداً على قانون كيرشوف الثاني.

نلاحظ من الدارة أنها تحتوي على عشر حلقات، إلا أن بعض هذه المعادلات سيكون غير مفيد لوجود حدودها في معادلات أخرى. أي أننا نحتاج لمعادلات مستقلة فقط. فالمعادلة تكون مستقلة عن سابقتها إذا احتوت الحلقة التي نطبّق عليها قانون كيرشوف الثاني على جزء واحد من الدارة على الأقل لم يدخل في نطاق الحلقة التي كتبت عليها المعادلة السابقة. بمعنى آخر يجب اختيار الحلقات بحيث يكون في كل حلقة جزء واحد جديد على الأقل مقارنةً بباقي الحلقات.



في الحلقة 1-2-3-1:
$$E_1 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2$$

في الحلقة 1-3-6-1:
$$E_2 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_7 \cdot R_7$$

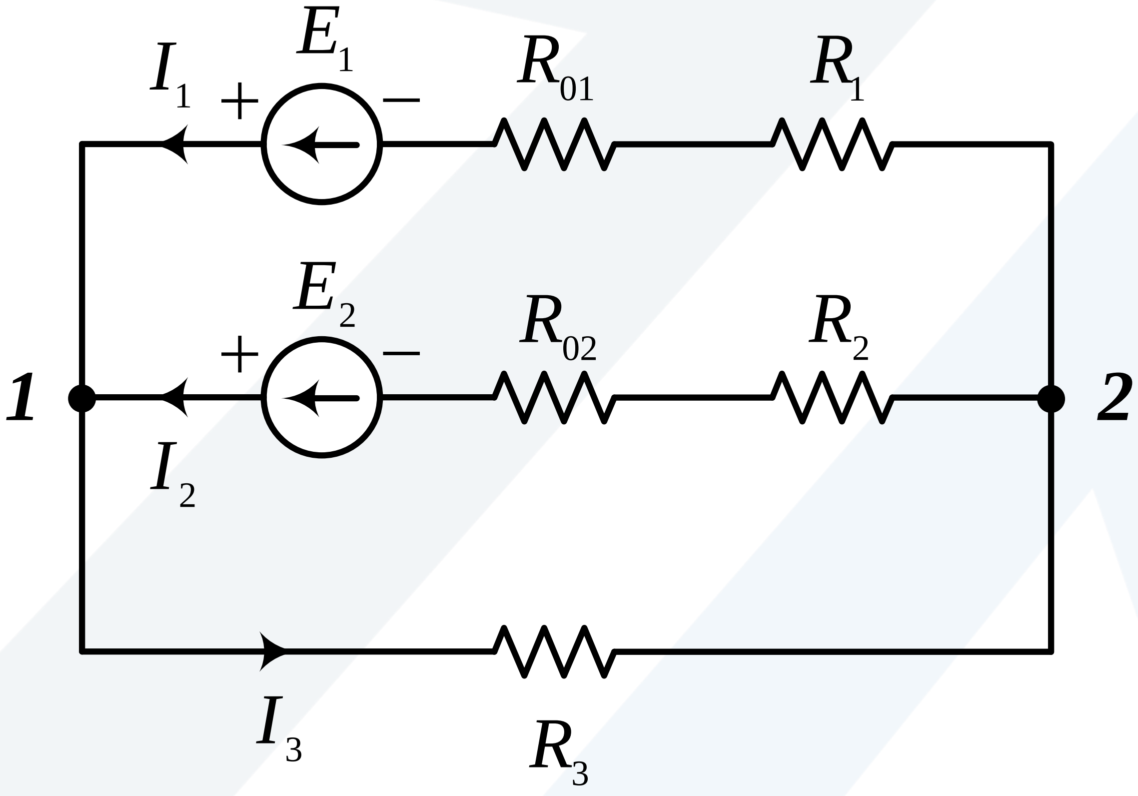
في الحلقة 6-3-4-6:
$$-E_2 = I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 - I_7 \cdot R_7$$

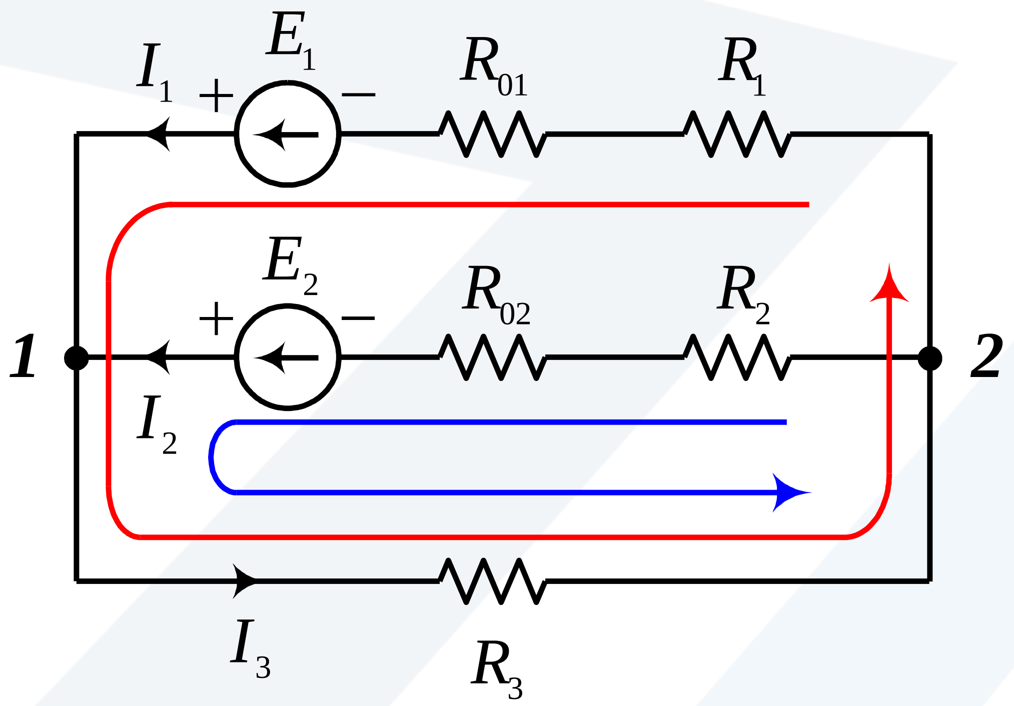
في الحلقة 6-4-5-6:
$$-E_3 = -I_5 \cdot R_5 - I_6 \cdot R_6$$

إن الإشارة السالبة للقوى المحركة الكهربائية يحددها الاختلاف في اتجاه الدوران الافتراضي مع اتجاه القوة المحركة لمنبع الجهد. فإذا دخل سهم اتجاه الدوران الافتراضي من القطب السالب باتجاه القطب الموجب للمنبع تكون E موجبة، وإلا تكون سالبة. أما إشارات الجهود المطبقة على العناصر فيحددها التوافق أو التعاكس بين اتجاه التيار المار في العنصر وبين اتجاه الدوران الافتراضي. فإذا توافق اتجاه التيار المار في العنصر (الفرع) مع اتجاه الدوران الافتراضي تكون إشارة جهد العنصر موجبة، وإلا تكون سالبة.

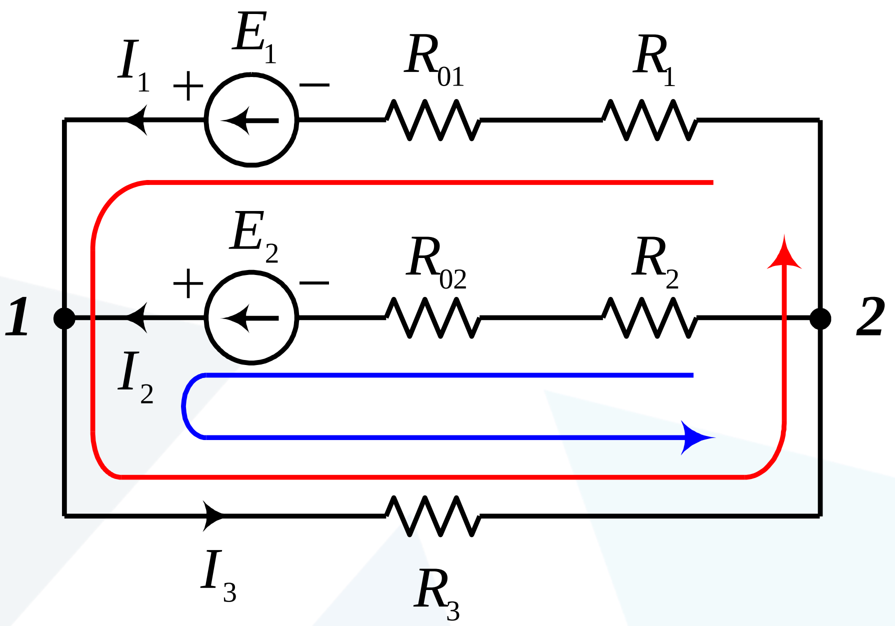
مثال: لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. المطلوب حساب تيارات الفروع في هذه الدارة باستخدام قوانين كيرشوف إذا كان:

$E_1 = 1.8[V], E_2 = 1.2[V]$
$R_1 = 0.6[\Omega], R_{01} = 0.2[\Omega]$
$R_2 = 0.4[\Omega], R_{02} = 0.3[\Omega]$
$R_3 = 0.8[\Omega]$





I_1
E_1
+
−
R_{01}
R_1
E_2
+
−
R_{02}
R_2
1
2
I_2
I_3
R_3



حسب قانون كيرشوف الأول في العقدة **1**:

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

حسب قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الخارجية يكون:

$$E_1 = I_1 \cdot (R_1 + R_{01}) + I_3 \cdot R_3 \Rightarrow 1.8 = 0.8I_1 + 0.8I_3 \qquad (2)$$

حسب قانون كيرشوف الثاني على الحلقة السفلية يكون:

$$E_2 = I_2 \cdot (R_2 + R_{02}) + I_3 \cdot R_3 \Rightarrow 1.2 = 0.7I_2 + 0.8I_3 \qquad (3)$$

نعوض (1) في (2)، فيكون:

$$1.8 = 0.8I_1 + 0.8I_1 + 0.8I_2 = 1.6I_1 + 0.8I_2$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1.8 - 0.8I_2}{1.6} \qquad (4)$$

نعوض في (3) قيمة I_3 من (1) وقيمة I_1 من (4)، فيكون:

$$1.2 = 0.8I_1 + 0.8I_2 + 0.7I_2 = 0.8I_1 + 1.5I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1.2 - 0.8I_1}{1.5} = \frac{1.2 - 0.8(\frac{1.8 - 0.8I_2}{1.6})}{1.5}$$

$$1.5I_2 = 1.2 - \frac{1.44}{1.6} + \frac{0.64}{1.6}I_2 = 1.2 - 0.9 + 0.4I_2 \;\Rightarrow I_2 = \frac{0.3}{1.1} = 0.273[A]$$

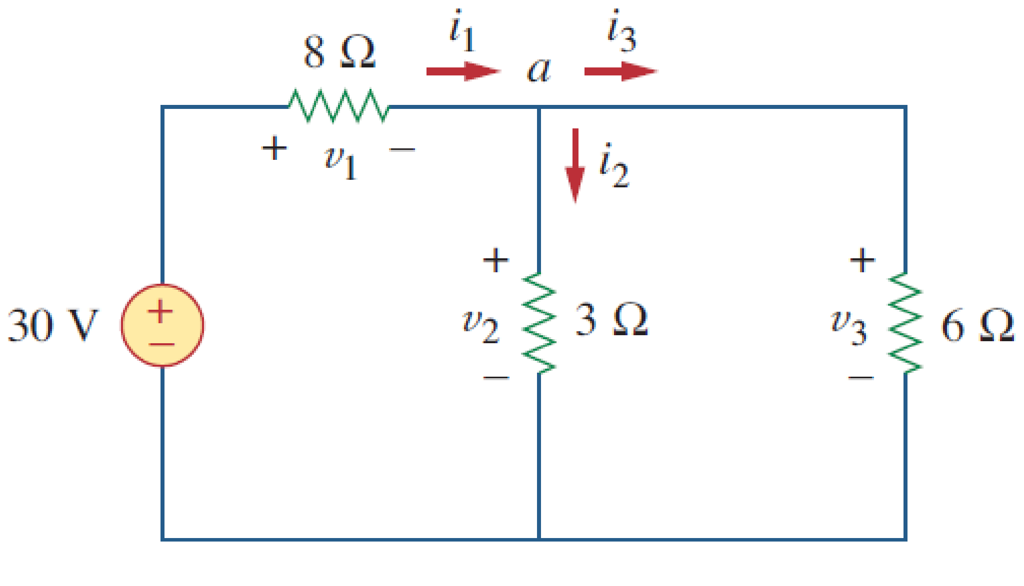
نعوض في (4):

$$I_1 = \frac{1.8 - (0.8 \times 0.273)}{1.6} = 0.99[A]$$

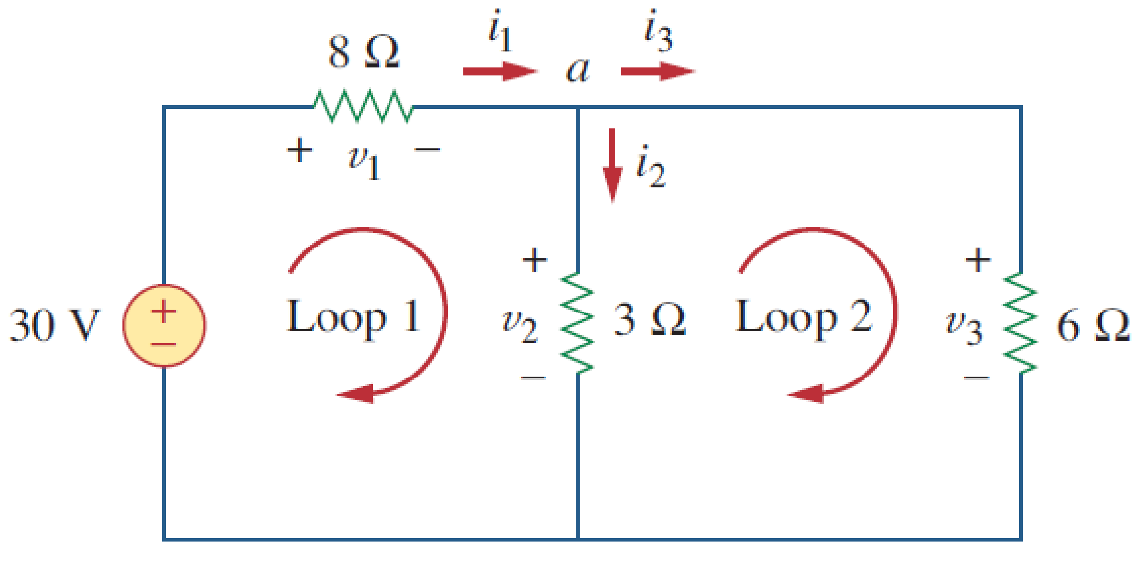
نعوض قيمة I_1 و I_2 في (1)، فيكون:

$$I_3 = 0.273 + 0.99 = 1.26[A]$$

Find currents and voltages in the circuit shown in Fig.



(a)



(b)

Solution

We apply Ohm's law and Kirchhoff's laws. By Ohm's law

$$v_1=8i_1 \quad , \quad v_2=3i_2 \quad , \quad v_3=6i_3 \qquad (1)$$

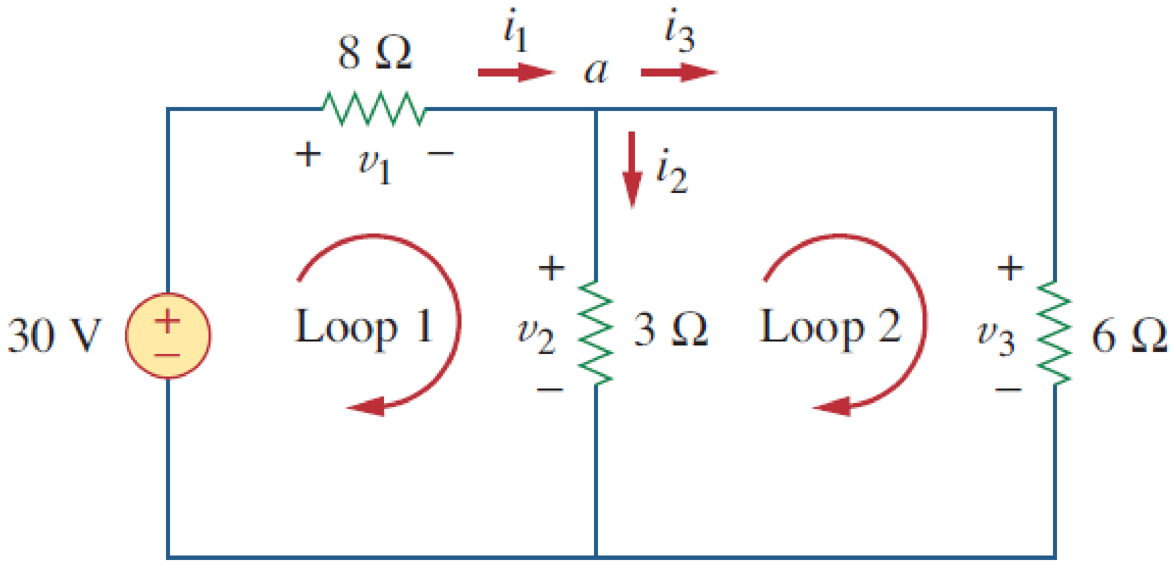
Since the voltage and current of each resistor are related by Ohm's law as shown, we are really looking for three things: (v_1,v_2,v_3) or (i_1,i_2,i_3). At node a, KCL gives

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad (2)$$

Applying KVL to loop 1 as in Fig.

$$-30 + v_1 + v_2 = 0$$

We express this in terms of i_1 and i_2 as in Eq. (1) to obtain



(b)

$$-30 + 8i_1 + 3i_2 = 0$$

or

$$i_1 = (30-3i_2)/8 \qquad (3)$$

Applying KVL to loop 2.

$$-v_2 + v_3 = 0 \;\Rightarrow\; v_3 = v_2 \qquad (4)$$

As expected since the two resistors are in parallel. We express v_1 and v_2 in terms of i_1 and i_2 in Eq.(1). Equation (4) becomes

$$6i_3 = 3i_2 \;\Rightarrow\; i_3 = i_2/2 \qquad (5)$$

Substituting Eqs. (3) and (5) into (2) gives

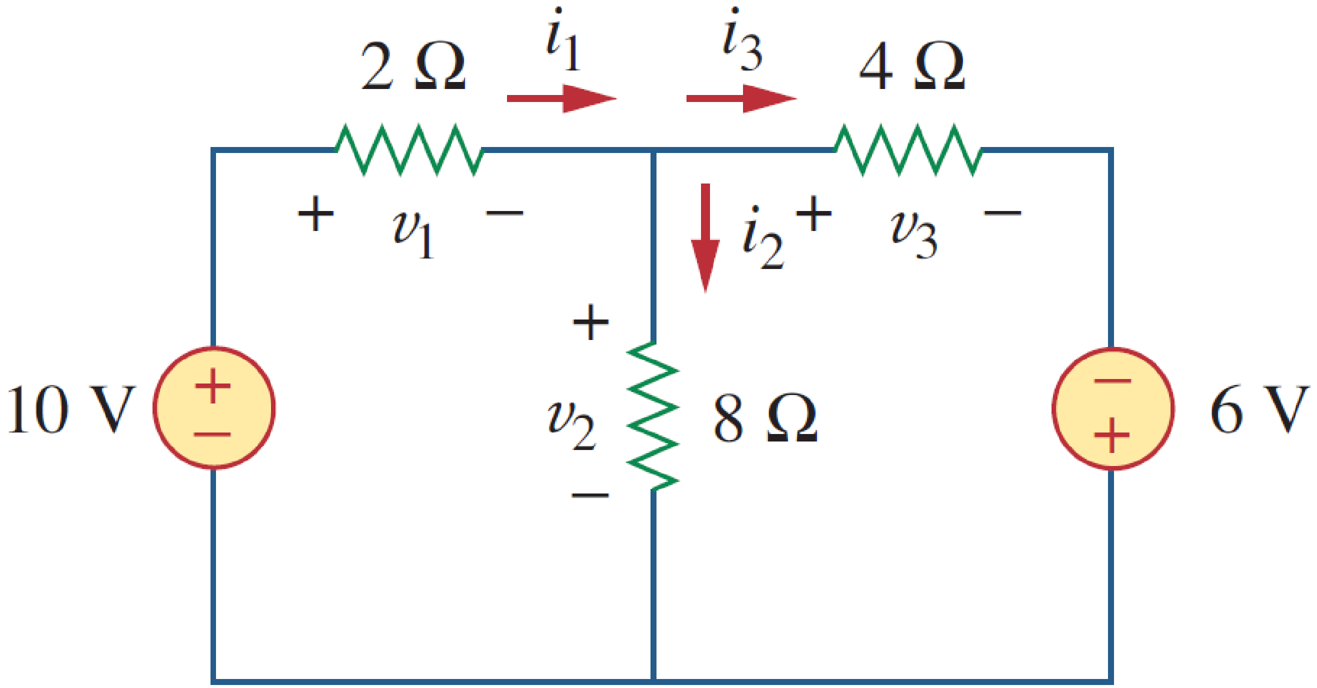
$$i_1 = ((30-3i_2)/8) - i_2 - i_2/2 = 0 \qquad \text{or} \quad i_2 = 2\ A.$$

From the value of i_2, we now use Eqs. (1) to (5) to obtain

$$i_1 = 3\ \text{A}, \quad i_3 = 1\ \text{A}, \quad v_1 = 24\ \text{V}, \quad v_2 = 6\ \text{V}, \quad v_3 = 6\ \text{V}$$

Find the currents and voltages in the circuit shown in Fig.

Answer: v_1 =6 V , v_2 =4 V , v_3 =10 V , i_1=3 A, i_2=500 mA , i_3=1.25 A



طريقة تحليل الشبكة Mesh Analysis (التيارات الحلقية، تيارات ماكسويل):

Mesh analysis provides another general procedure for analyzing circuits, using mesh currents as the circuit variables. Using mesh currents instead of element currents as circuit variables is convenient and reduces the number of equations that must be solved simultaneously.

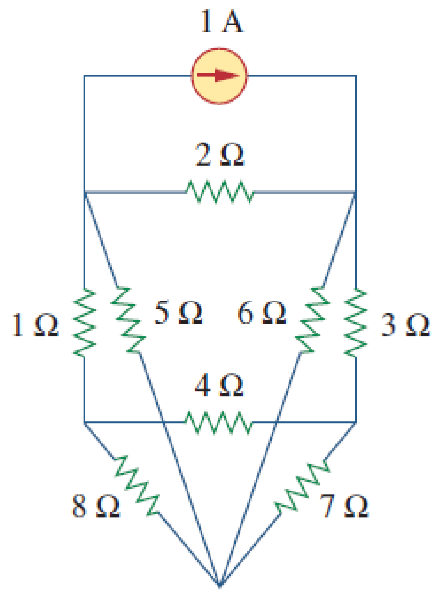
Recall that a loop is a closed path with no node passed more than once.

A mesh is a loop that does not contain any other loop within it.

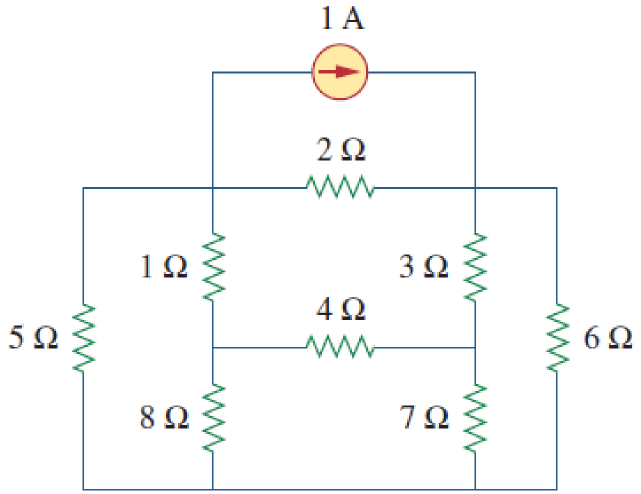
Nodal analysis applies KCL to find unknown voltages in a given circuit, while mesh analysis applies KVL to find unknown currents.

Mesh analysis is not quite as general as nodal analysis because it is only applicable to a circuit that is planar. A planar circuit is one that can be drawn in a plane with no branches crossing one another; otherwise it is nonplanar. A circuit may have crossing branches and still be planar if it can be redrawn such that it has no crossing branches.

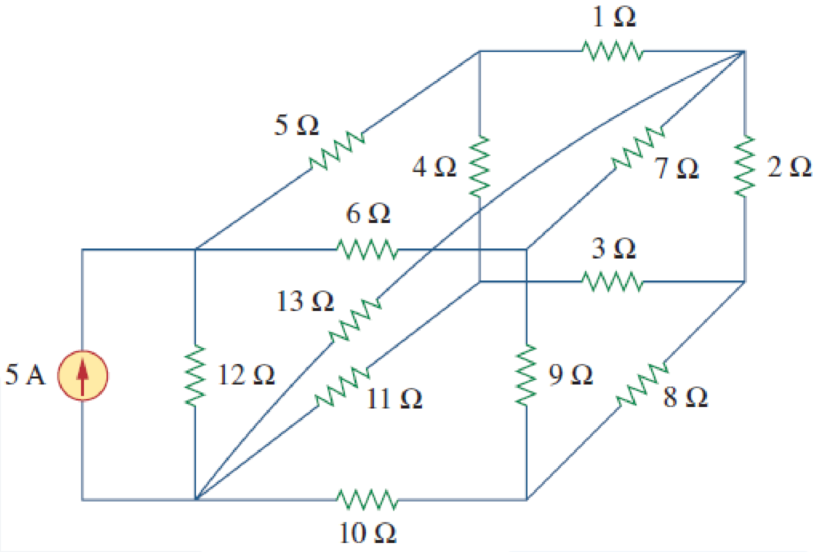
For example, the circuit in Fig. (a) has two crossing branches, but it can be redrawn as in Fig. (b). Hence, the circuit in Fig. (a) is planar. However, the circuit in Fig. (c) is nonplanar, because there is no way to redraw it and avoid the branches crossing.



(a) A planar circuit with crossing branches.



(b) The same circuit redrawn with no crossing branches.



(c) A nonplanar circuit.

To understand mesh analysis, we should first explain more about what we mean by a mesh.

A mesh is a loop which does not contain any other loops within it.

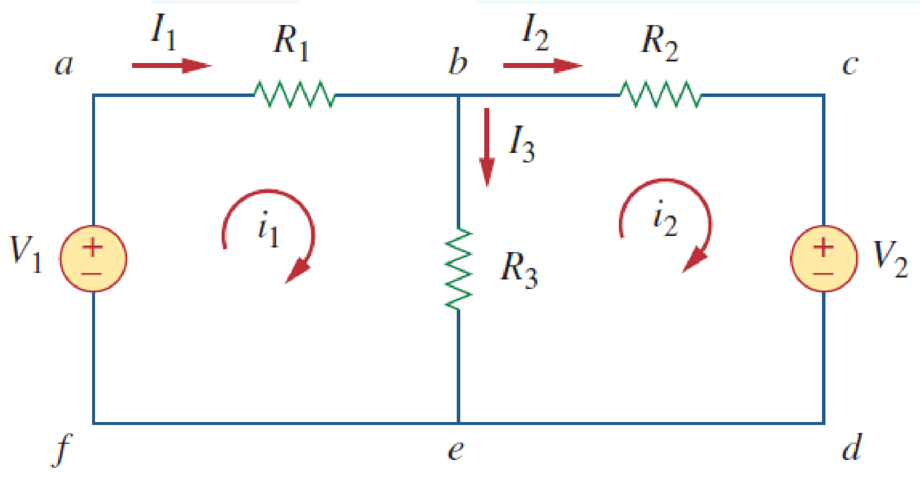
STEPS TO DETERMINE MESH CURRENTS:

1. Assign mesh currents i_1, i_2, …i_n to the n meshes.

2. Apply KVL to each of the n meshes. Use Ohm's law to express the voltages in terms of the mesh currents.

3. Solve the resulting n simultaneous equations to get the mesh currents.

To illustrate the steps, consider the circuit in Fig. The first step requires that mesh currents i_1 and i_2 are assigned to meshes 1 and 2. Although a mesh current may be assigned to each mesh in an arbitrary direction, it is conventional to assume that each mesh current flows clockwise.



As the second step, we apply KVL to each mesh. Applying KVL to mesh 1, we obtain:

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0$$

Or:

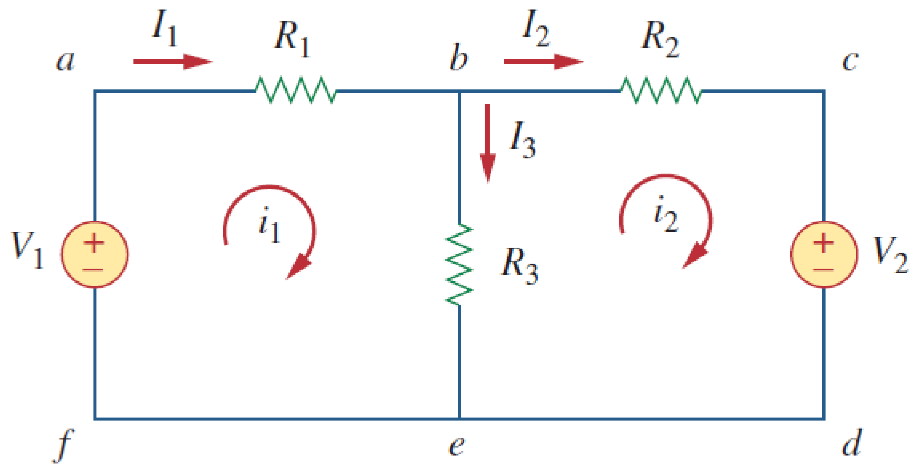
$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1$$

For mesh 2, applying KVL gives

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$$

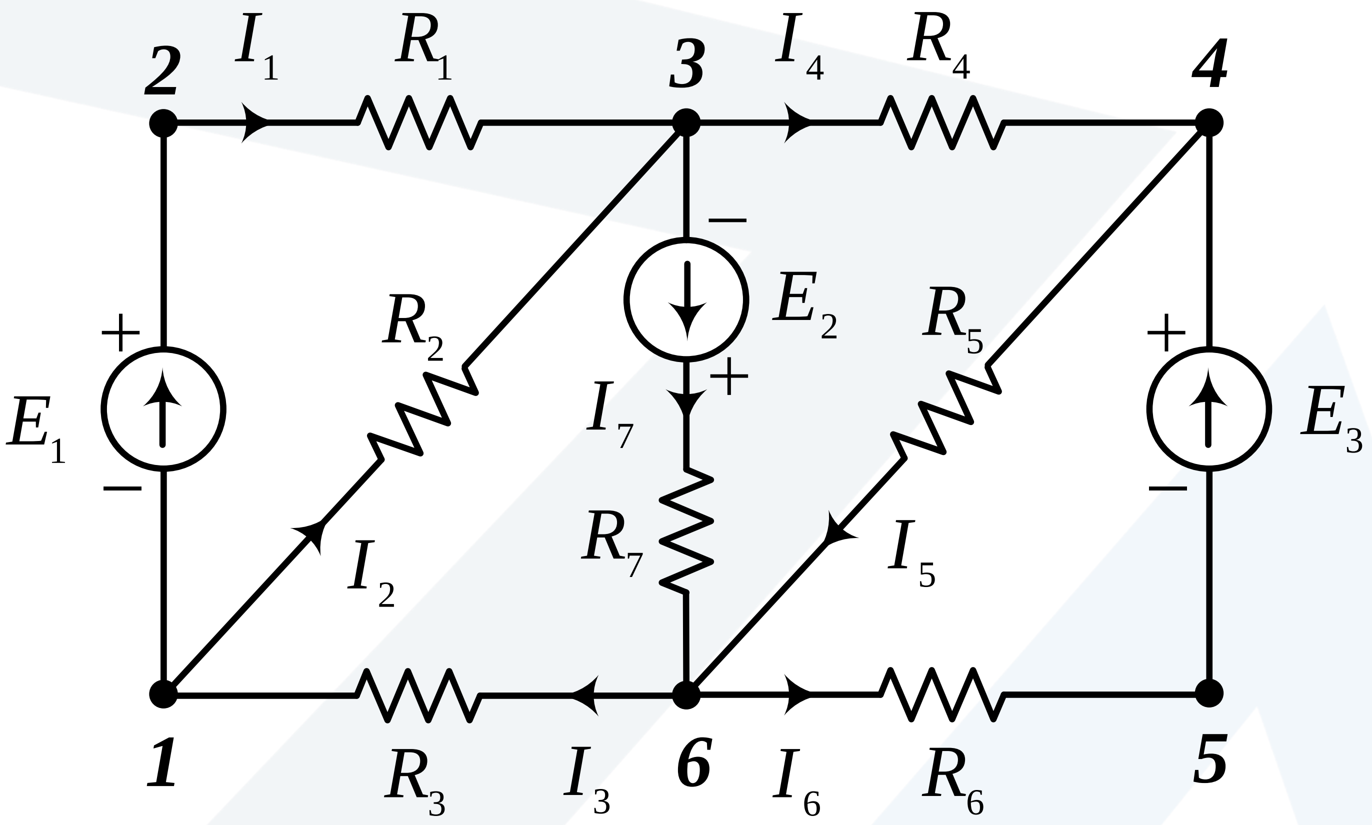
Or:

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -V_2$$

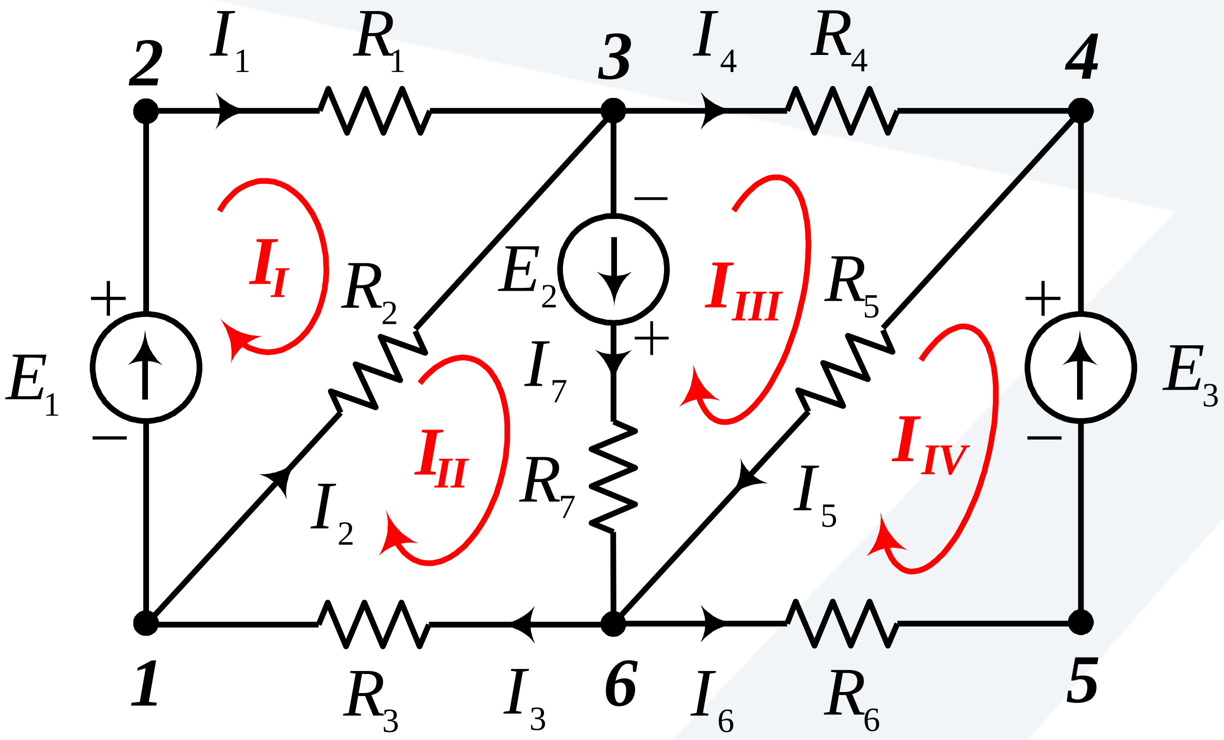


$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = i_1, \qquad I_2 = i_2, \qquad I_3 = i_1 - i_2$$

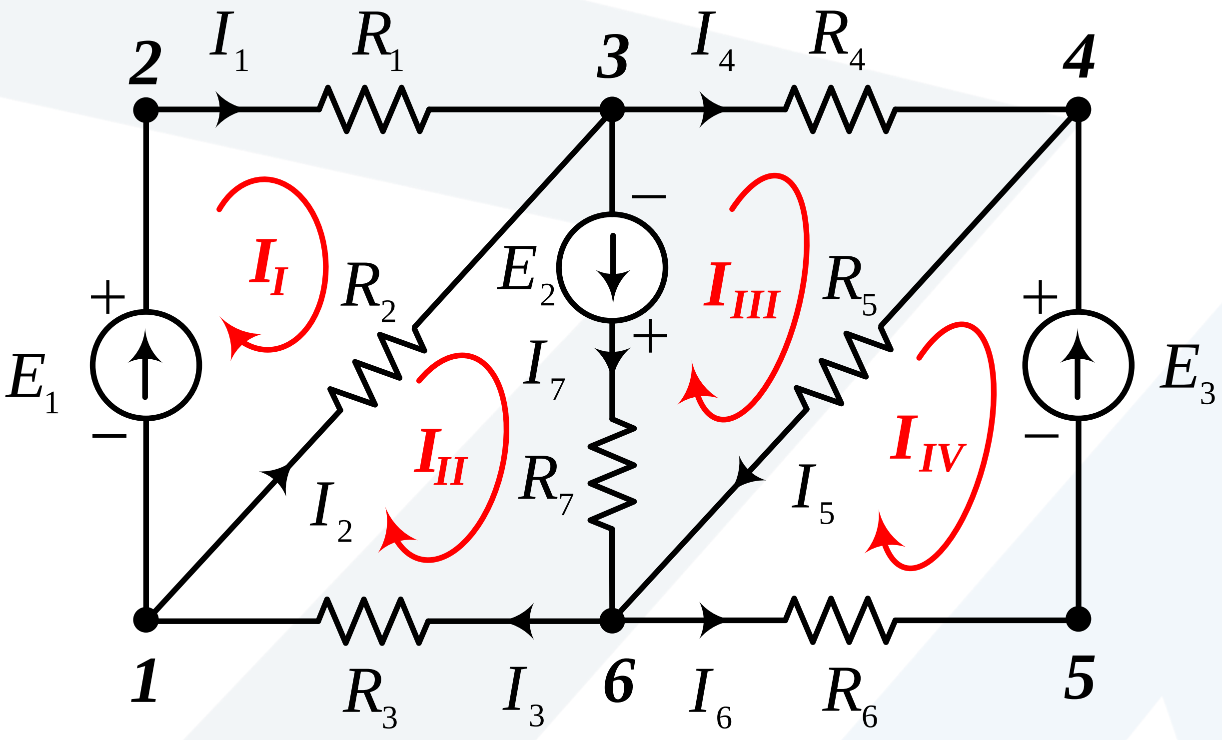


نفرض تيارات حلقية داخل الحلقات المستقلة.



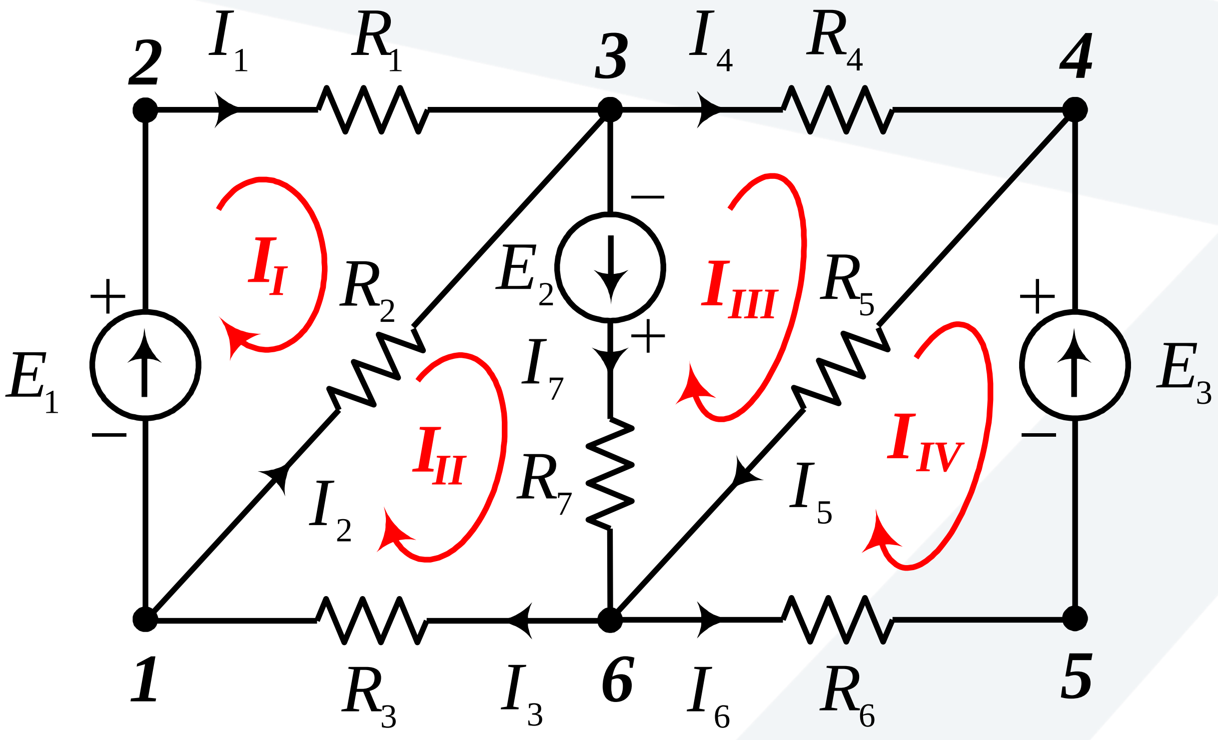
يمكن من خلال الشكل ملاحظة أن الفروع المستقلة في الدارة تكون مشتركة بين حلقتين متجاورتين، وبالتالي تتحد القيمة الفعلية للتيار في مثل هذه الفروع من خلال الجمع الجبري للتيارات الحلقية المتجاورة في الحلقات المشتركة بهذا الفرع. مثلاً: يدخل الفرع 1-3 ذي المقاومة R_2 في مجال الحلقتين المتجاورتين I و II، فالتيار الفعلي I_2 الذي يسري في هذا الفرع يساوي المجموع الجبري للتيارات الحلقية للحلقتين I و II، أي:

$$I_2 = I_{II} - I_I$$



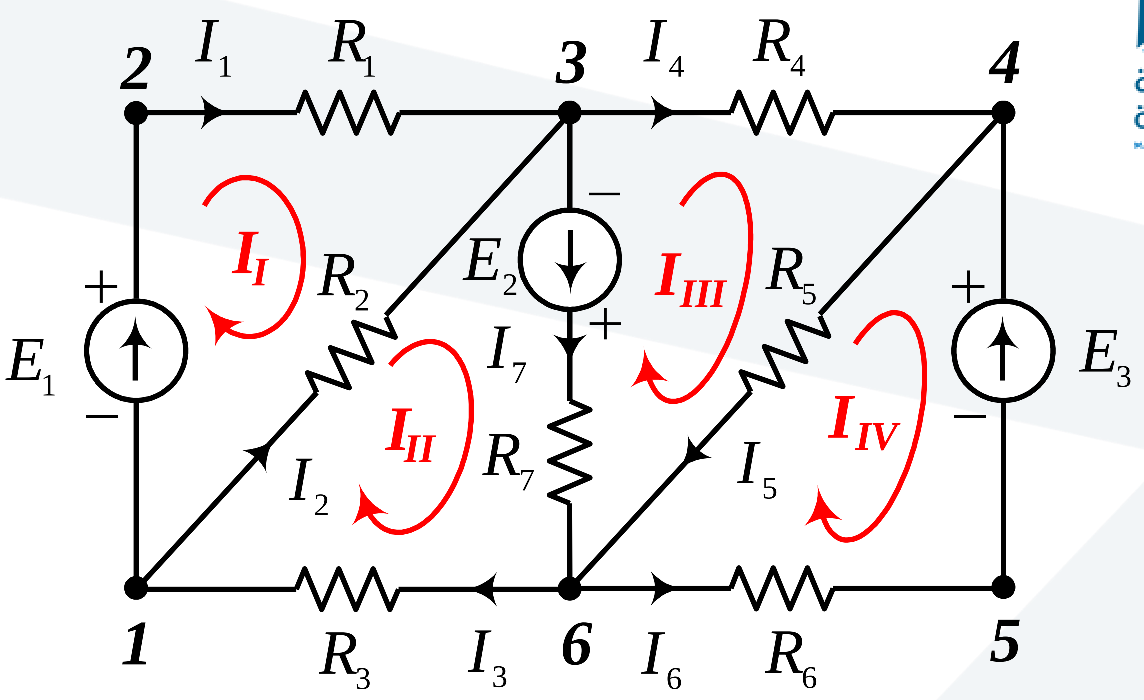
التيار الفعلي المار في المقاومة R_1 هو قيمة التيار الحلقي I_I نفسه، أي:

$$I_1 = I_I$$



ويتم بالطريقة نفسها تحديد باقي التيارات في الفروع، فنجد أن:

$$I_2 = I_{II} - I_I$$
$$I_3 = I_{II}$$
$$I_4 = I_{III}$$
$$I_5 = I_{III} - I_{IV}$$
$$I_6 = -I_{IV}$$
$$I_7 = I_{II} - I_{III}.$$



تُكتب المعادلات المعتمدة على التيارات الحلقية وفق قانون كيرشوف الثاني كما يأتي:

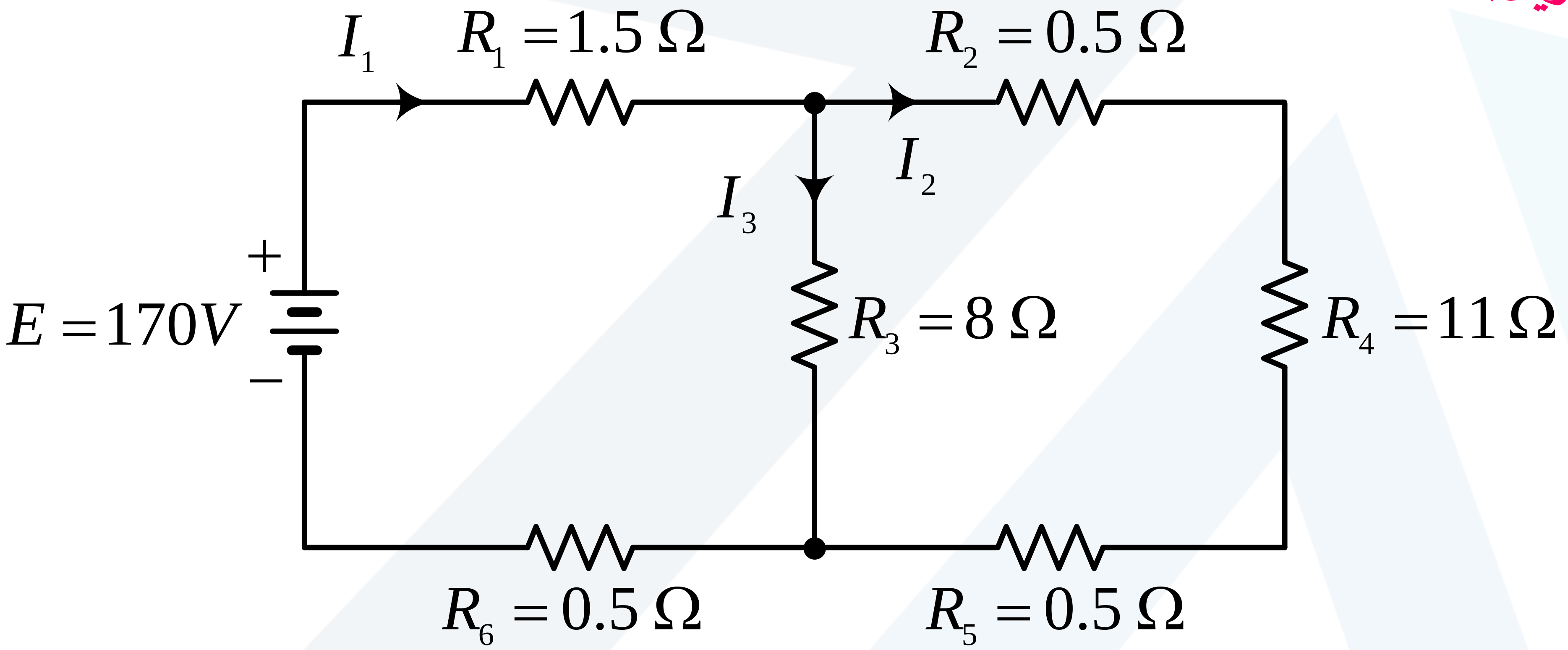
في الحلقة I:
$$E_1 = I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2$$

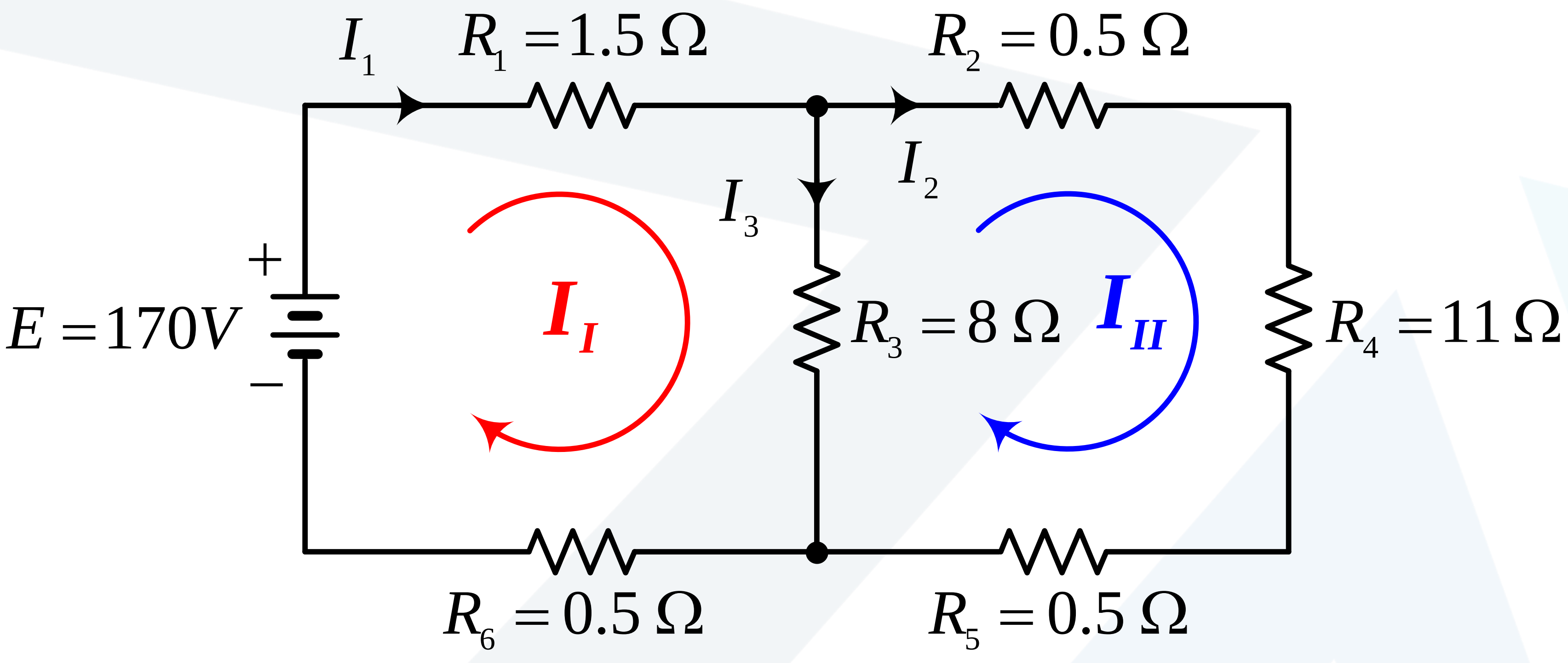
في الحلقة II:
$$E_2 = -I_I \cdot R_2 + I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_7) - I_{III} \cdot R_7$$

في الحلقة III:
$$-E_2 = -I_{II} \cdot R_7 + I_{III} \cdot (R_4 + R_5 + R_7) - I_{IV} \cdot R_5$$

في الحلقة IV:
$$-E_3 = I_{IV} \cdot (R_5 + R_6) - I_{III} \cdot R_5$$

مثال: احسب قيم التيارات في الدارة المبينة بالشكل، وذلك باستخدام طريقة التيارات الحلقية (ماكسويل).

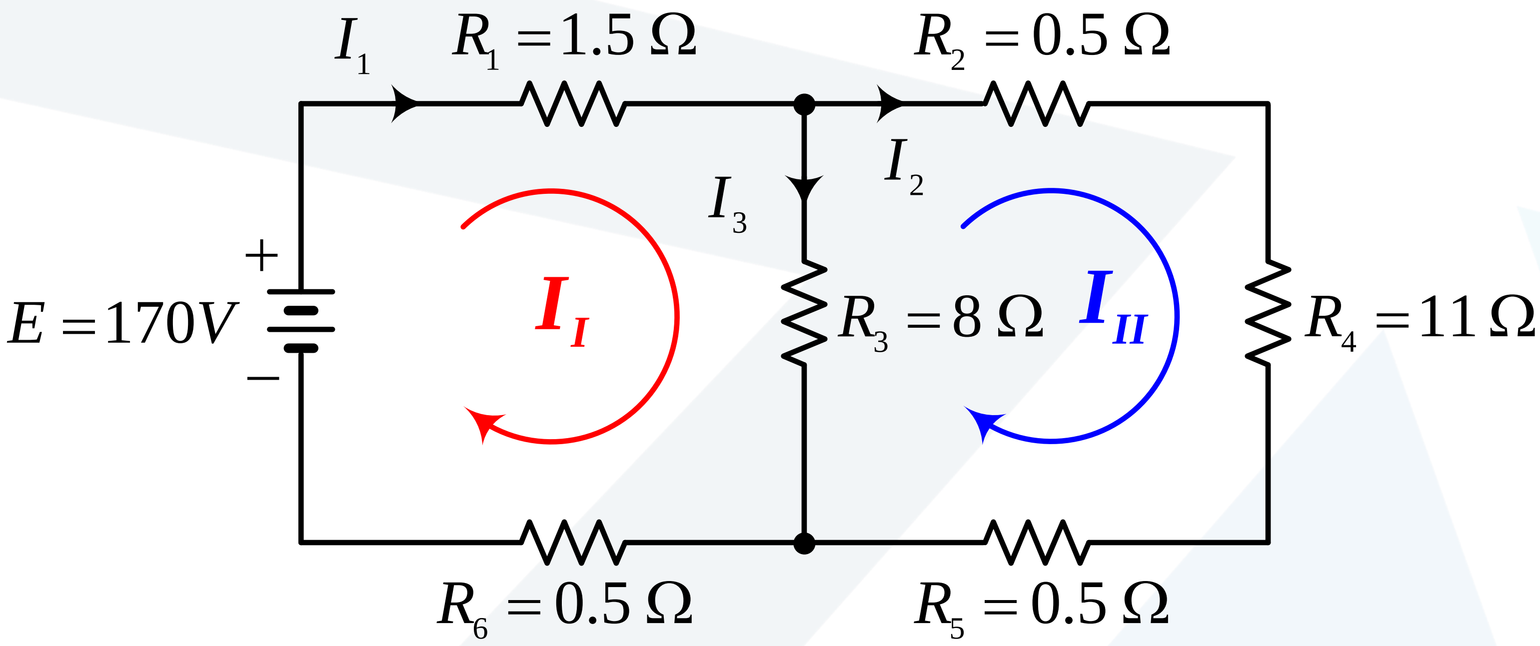




معادلة الحلقة الأولى I:

$$E = I_I \cdot (R_1 + R_3 + R_6) - I_{II} \cdot R_3$$

$$170 = 10I_I - 8I_{II} \qquad (1)$$



معادلة الحلقة الثاني II:

$$0 = I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_I \cdot R_3$$

$$0 = 20I_{II} - 8I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

$$170 = 10I_I - 8I_{II} \qquad (1)$$

$$0 = 20I_{II} - 8I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1):

$$170 = 10 \cdot \frac{20}{8} \cdot I_{II} - 8I_{II} \Rightarrow I_{II} = \frac{170}{17} = 10[A] \Rightarrow I_2 = 10[A]$$

نعوض في (2):

$$I_I = \frac{20}{8} \times 10 = \frac{200}{8} = 25[A] \Rightarrow I_1 = 25[A]$$

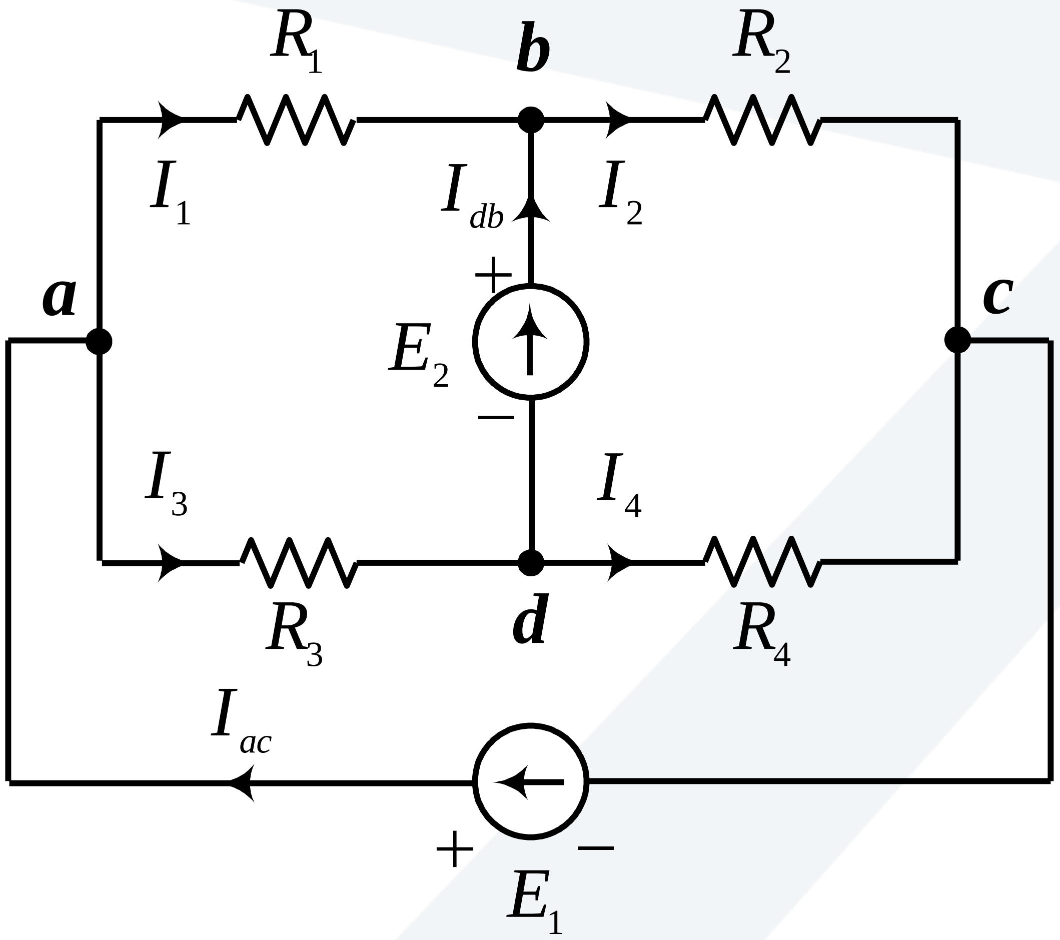
التيارفي الفرع المشترك I_3 يساوي:

$$I_3 = I_I - I_{II} = 25 - 10 = 15[A]$$

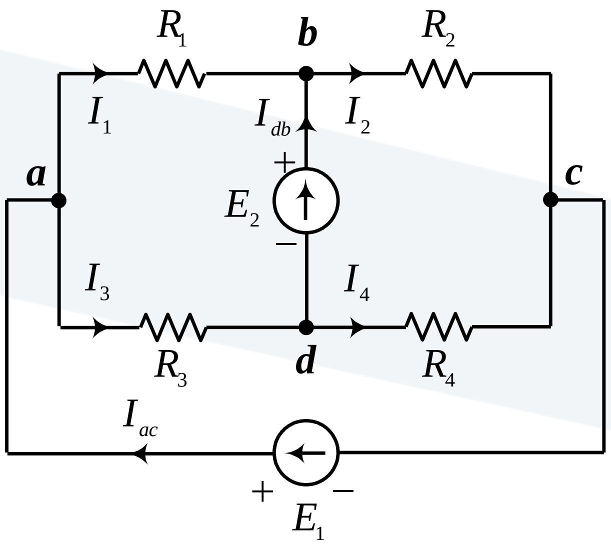
نظرية التنضّد (التراكب) (التراكم) Superposition Theorem:

أثناء إجراء الحساب باستخدام مبدأ التنضّد للدارة المدروسة ذات عدة منابع تغذية يتم استبدالها بعدة دارات حسابية كهربائية كلٍ منها تعمل بمنبع تغذية واحد من المنابع الموجودة في الدارة الأساسية. أي أن عدد الدارات التي سندرسها يساوي عدد منابع التغذية في الدارة الأساسية. في هذه الحالة يتم قصر (Short Circuit) منابع الجهد الموجودة وغير المدروسة في الدارة (استبدالها بسلك عديم المقاومة)، في حين يتم حذف منابع التيار غير المدروسة بفتح الدارة (An Open Circuit) في مكان وجوده (مقاومة لا نهائية)، ويبقى في الدارة فقط المنبع الذي نريد دراسة تأثيره فيها.

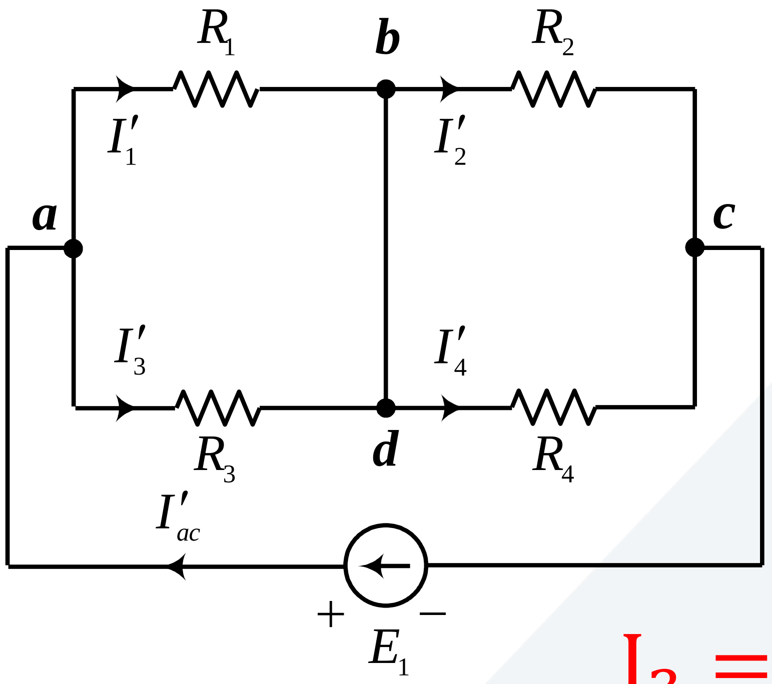
نتيجة الحساب فإن كل دارة من الدارات الحاوية على منبع واحد تعطي مركبة التيارات الناتجة عن المنبع بمفرده. وتتحدّد قيم التيارات الفعلية بالجمع الجبري لمركبات التيارات في كل فرع من الدارات الحاوية على المنابع المنفردة.

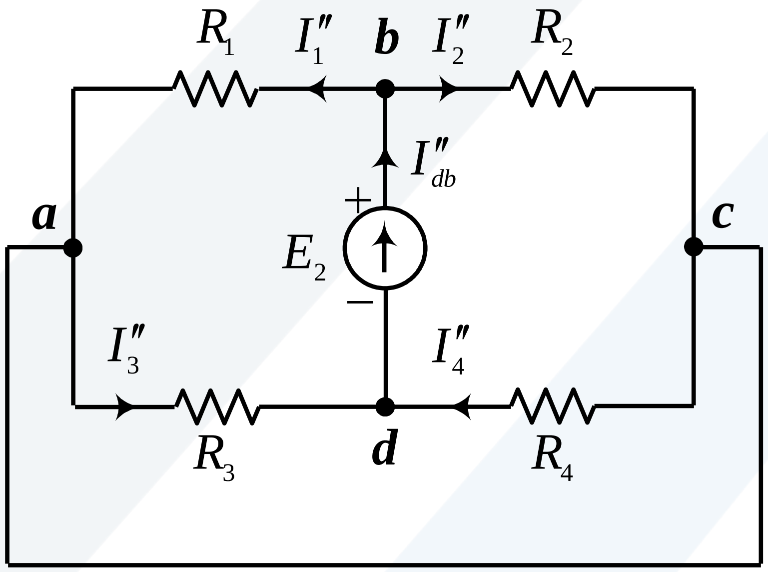


فمن أجل الدارة المبينة بالشكل الحاوية على منبعي تغذية، فإن الدارة تتحول إلى دارتين كلٍ منهما تحتوي على منبع تغذية واحد، أما الثاني فيتم قصره واستبعاده من الدارة.

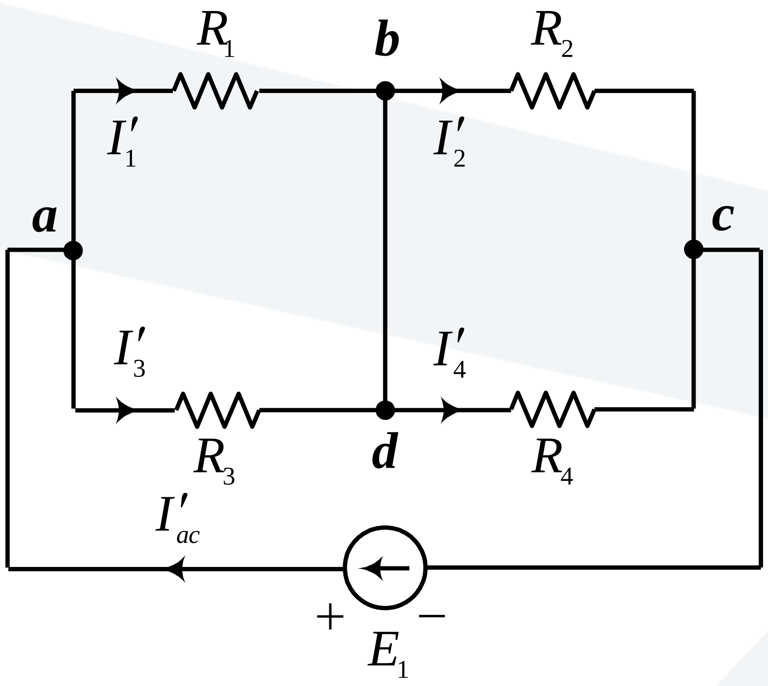


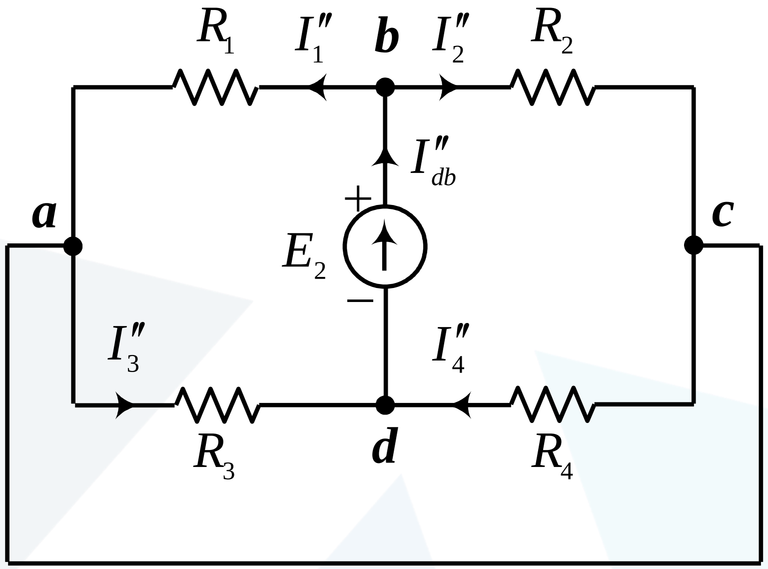
لحساب الدارة وفق مبدأ التنضّد يتم إنشاء دارتين من الدارة الأساسية (حسب عدد منابع التغذية) كل منهما بمنبع تغذية واحد، كما في الشكل.





$$I_3 = I_3' + I_3'', I_2 = I_2' + I_2'', I_1 = I_1' - I_1''$$



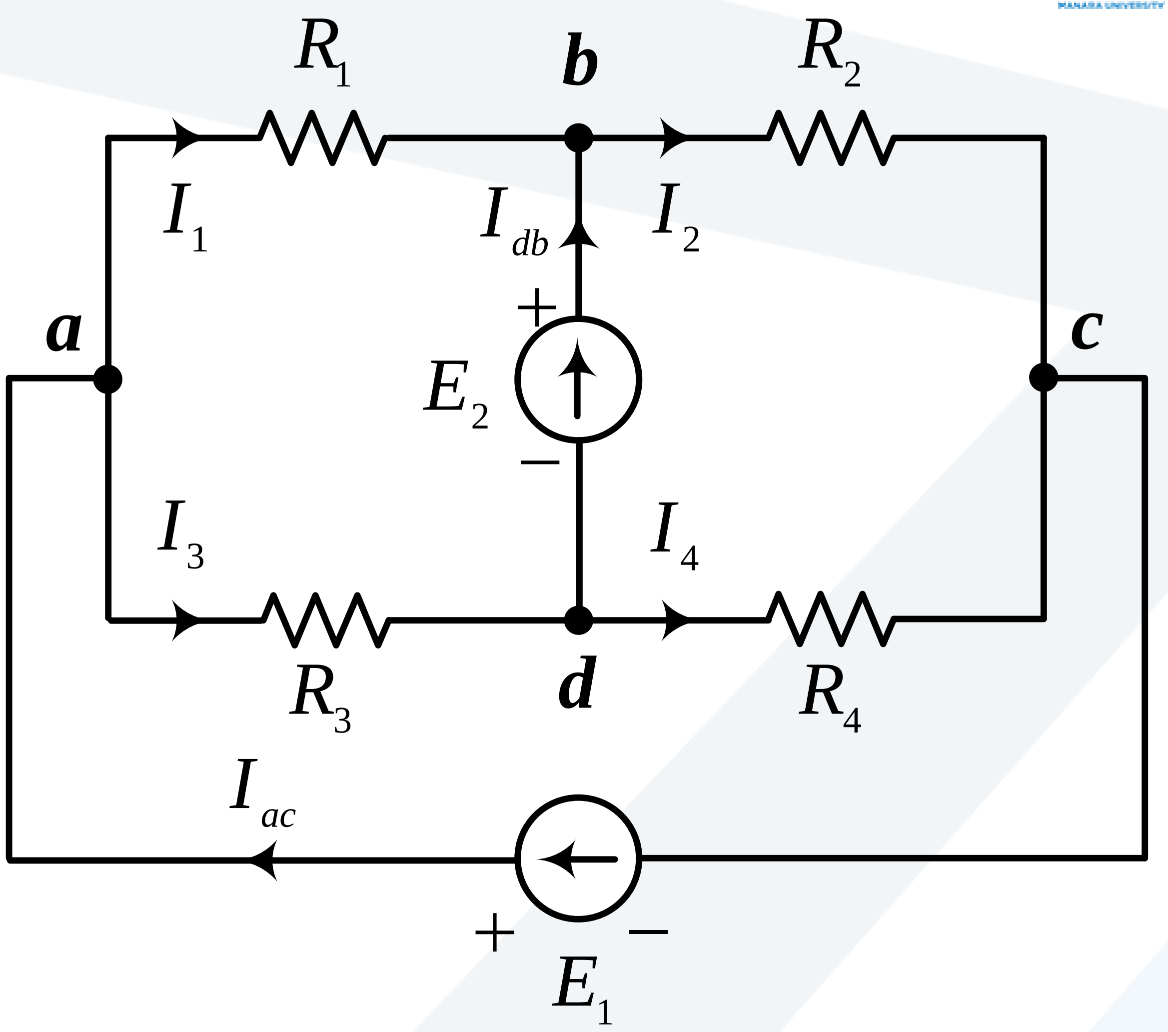


يتم حساب كل دارة من الدارات الفرعية الحاوية على منبع تغذية واحد فقط باستخدام طرق التبسيط المعروفة سابقاً. بعد ذلك تتحدّد التيارات في كل فرع من فروع الدارة الأساسية بالجمع الجبري للتيارات الجزئية للفرع نفسه، مثلاً:

$$I_3 = I_3' + I_3'', \quad I_2 = I_2' + I_2'', \quad I_1 = I_1' - I_1''$$

مثال:

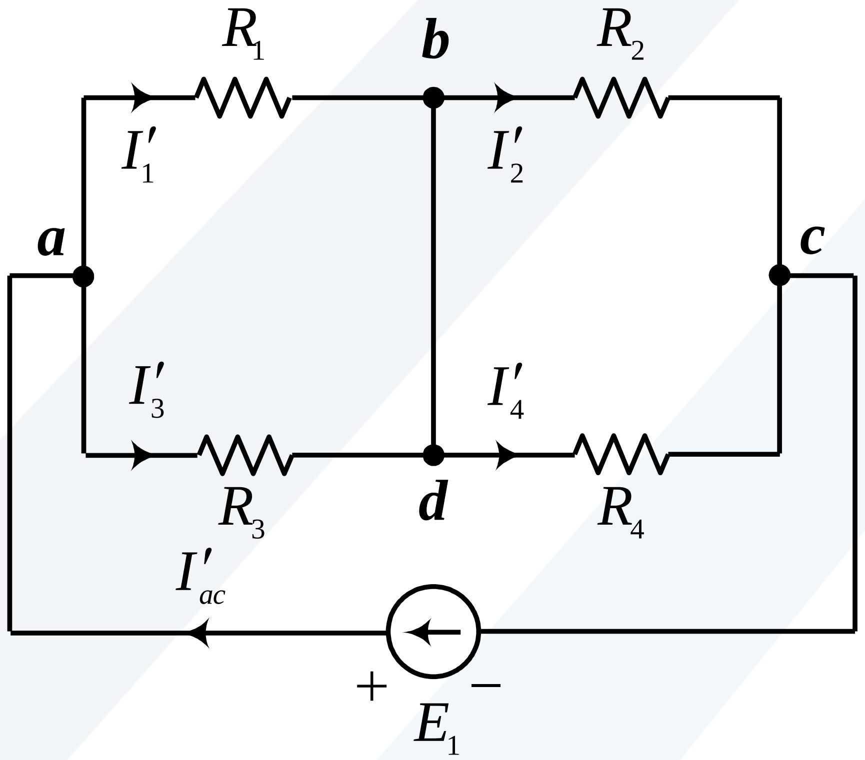
احسب قيمة التيارات في الدارة المبينة بالشكل، وذلك باستخدام نظرية التنضّد، علماً بأن:

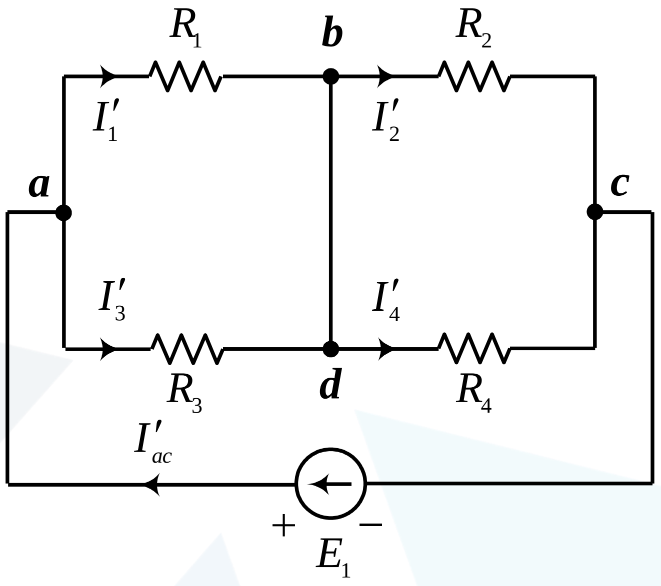


$$E_1 = 120[V]$$
$$E_2 = 100[V]$$
$$R_1 = R_2 = 20[\Omega]$$
$$R_3 = R_4 = 30[\Omega]$$

الحل:

كما ذكرنا سابقاً، بما أن الدارة تحوي منبعي جهد، فسنشكل منها دارتين كل منها بمنبع جهد واحد، حيث سندرس تأثير كل منبع على حده في الدارة. نَجعل في الدارة الأولى $E_2=0$ وندرس تأثير المنبع E_1، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثير هذا المنبع:

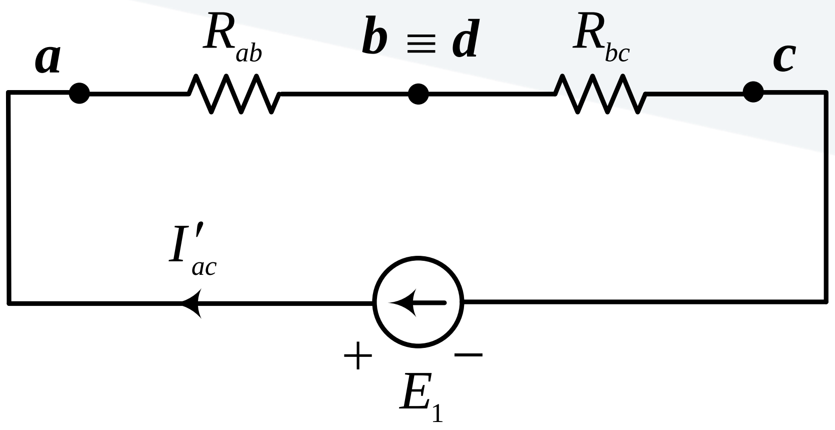


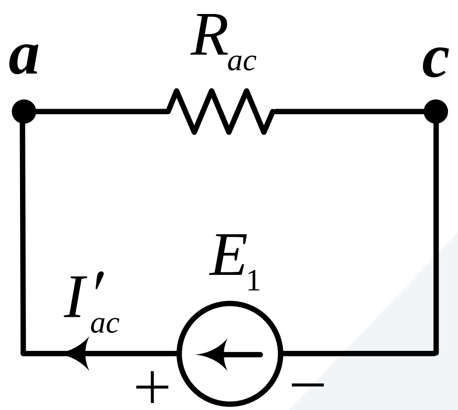


$$\left.\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12[\Omega] \\ R_{bc} &= \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12[\Omega] \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{ac} = R_{ab} + R_{bc} = 12 + 12 = 24[\Omega]$$

$$\Rightarrow I'_{ac} = \frac{E_1}{R_{ac}} = \frac{120}{24} = 5[A].$$

أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة كما هو موضّح في الشكل التالي:





المقاومتان بين العقدتين **a** و **b** وبين **b** و **c** متساويتان (12 [Ω])، ولذلك يكون الجهد بين العقدتين **a** و **b** وبين **b** و **c** متساويان أيضاً، أي:

$$V'_{ab} = V'_{bc} = I'_{ac} \cdot R_{ab} = I'_{ac} \cdot R_{bc} = 5 \times 12 = 60[V]$$

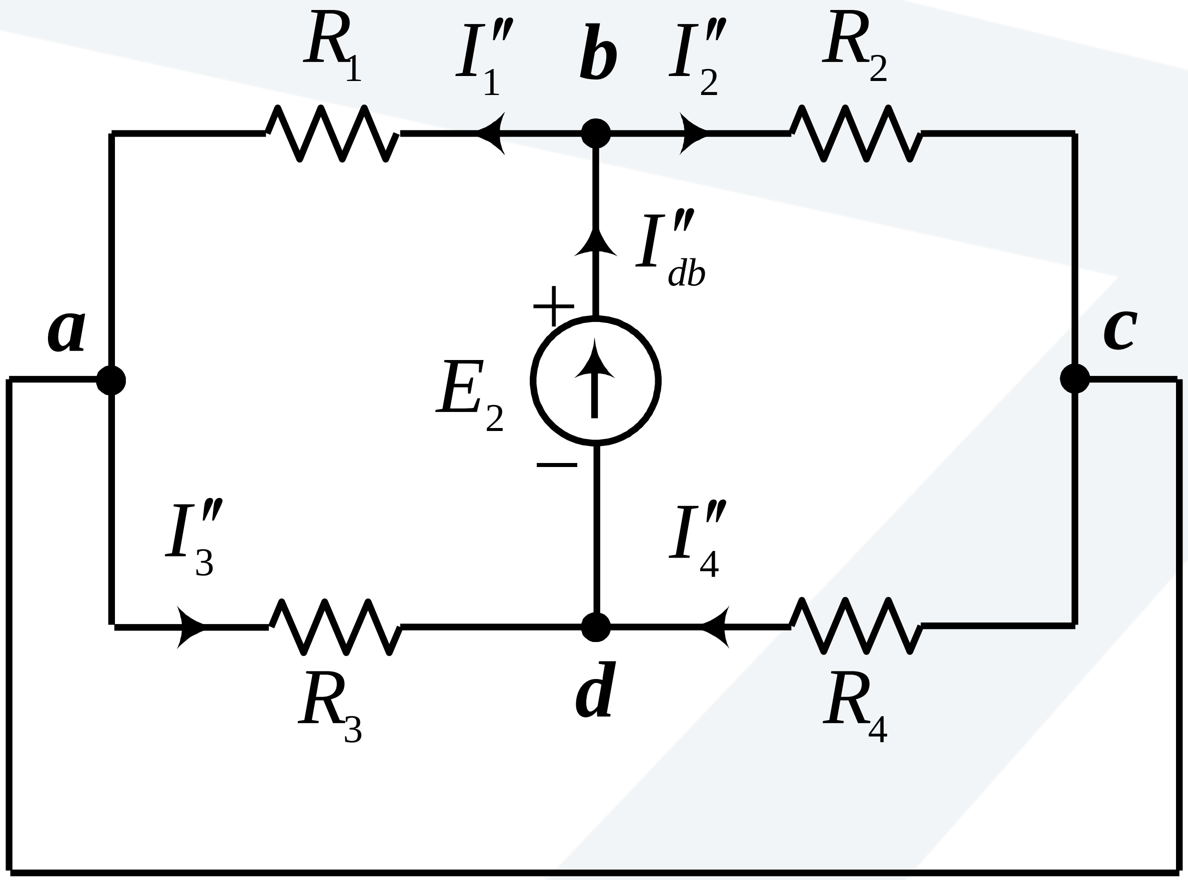
بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

$$I'_1 = \frac{V'_{ab}}{R_1} = \frac{60}{20} = 3[A]$$

$$I'_2 = \frac{V'_{bc}}{R_2} = \frac{60}{20} = 3[A]$$

$$I'_3 = \frac{V'_{ab}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2[A]$$

$$I'_4 = \frac{V'_{bc}}{R_4} = \frac{60}{30} = 2[A]$$

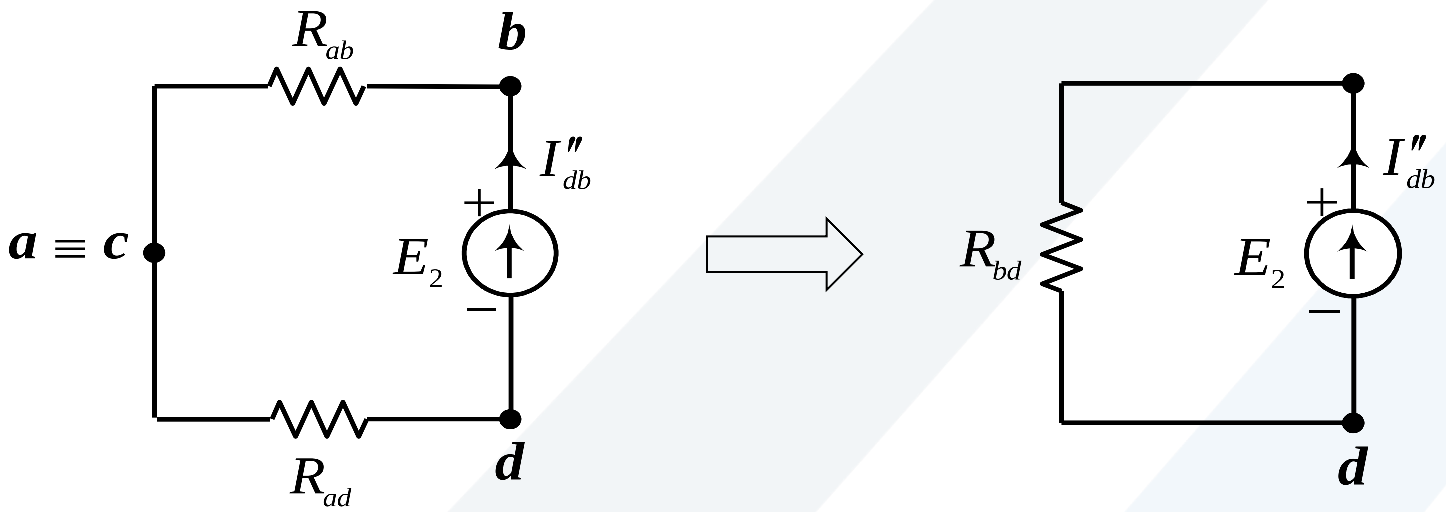


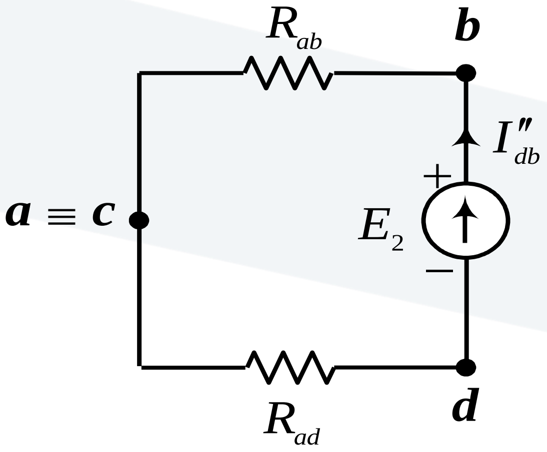
في الدارة الثانية نجعل $E_1=0$ وندرس تأثير المنبع E_2، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثيرهذا المنبع:

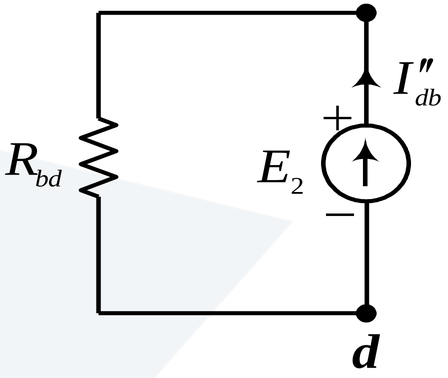
$$
\left.\begin{aligned}
R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 10[\Omega] \\
R_{ad} &= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 \times 30}{30 + 30} = 15[\Omega]
\end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{db} = R_{ab} + R_{ad} = 10 + 15 = 25[\Omega]
$$

$$
\Rightarrow I''_{db} = \frac{E_2}{R_{db}} = \frac{100}{25} = 4[A].
$$

أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة
كما هو موضّح في الشكل التالي:







الجهد بين العقدتين a و b:

$$V''_{ab} = I''_{db} \cdot R_{ab} = 4 \times 10 = 40[V]$$

الجهد بين العقدتين a و d:

$$V''_{ad} = I''_{db} \cdot R_{ad} = 4 \times 15 = 60[V]$$

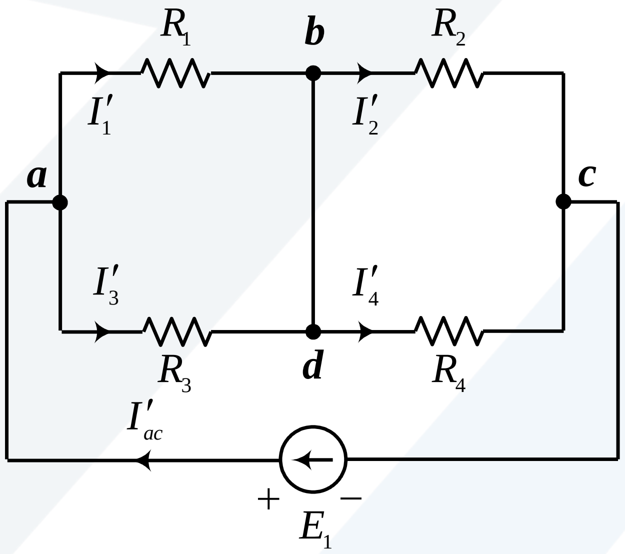
بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

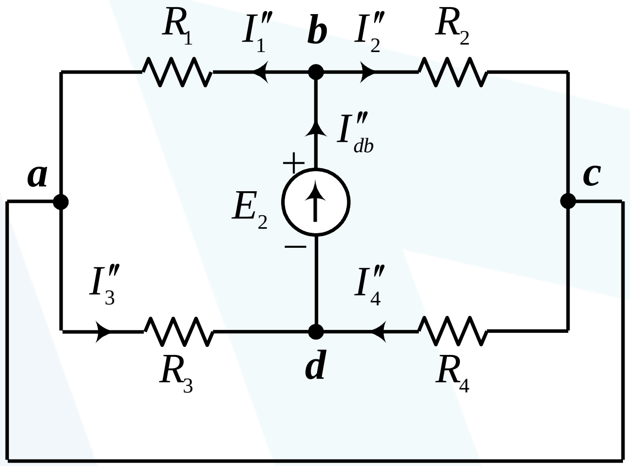
$$I''_1 = \frac{V''_{ab}}{R_1} = \frac{40}{20} = 2[A], I''_2 = \frac{V''_{ab}}{R_2} = \frac{40}{20} = 2[A]$$

$$I''_3 = \frac{V''_{ad}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2[A], I''_4 = \frac{V''_{ad}}{R_4} = \frac{60}{30} = 2[A]$$

وفقاً لذلك تكون قيم التيارات في الدارة الأساسية كما يأتي:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 3 - 2 = 1[A]$$
$$I_2 = I_2' + I_2'' = 3 + 2 = 5[A]$$
$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4[A]$$
$$I_4 = I_4' - I_4'' = 2 - 2 = 0[A]$$
$$I_{ac} = I_{ac}' = 5[A], I_{ac}'' = 0[A]$$
$$I_{db} = I_{db}'' = 4[A], I_{db}' = 0[A]$$





طريقة كمون العقدة Node Voltage Method:

لتطبيق هذه الطريقة نتّبع الخطوات الآتية:

1. نحدد اتجاه التيارات الموجبة (افتراضياً) في مختلف فروع الدارة.
2. نوصل إحدى عقد الدارة إلى الأرض (نؤرضها، أي أن كمونها أصبح مساوٍ للصفر).
3. نطبق علاقة فرق الكمون في العقدة، وهي:

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{R_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i}{R_i}+\sum_{i=1}^{n}I_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}E_i\cdot g_i+\sum_{i=1}^{n}V_i\cdot g_i+\sum_{i=1}^{n}I_i}{\sum_{i=1}^{n}g_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{R_i}=\sum_{i=1}^{n}E_i\cdot g_i$$ المجموع الجبري لجداء القوى المحركة الكهربائية بناقليات فروع الدارة.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i}{R_i}=\sum_{i=1}^{n}V_i\cdot g_i$$ المجموع الجبري لجداء الجهود بناقليات فروع الدارة.

$$\sum_{i=1}^{n}I_i$$ المجموع الجبري لتيارات منابع التيارفي الدارة إن وجدت.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}=\sum_{i=1}^{n}g_i$$ المجموع الجبري لناقليات فروع الدارة.

4. نحل هذه المعادلة فنحصل على قيمة كمون العقدة المدروسة، وبالتالي نستطيع تحديد الجهد بين أيٍ من عقد الدارة وهذه العقدة.

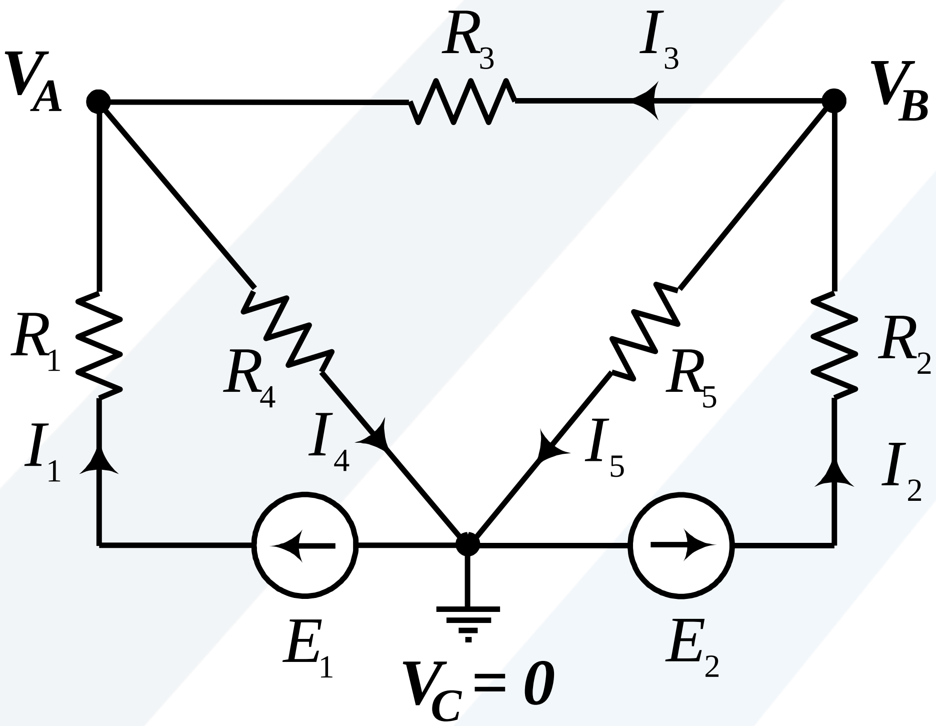
5. نحدّد قيم التيارات في مختلف فروع الدارة حسب قانون كيرشوف الثاني، وذلك بمعرفة الجهد وفق العلاقة السابقة، وبمعرفة القوى المحركة الكهربائية العاملة في الدارة.

ملاحظة 1: عند حساب الدارات الكهربائية حسب طريقة كمون العقدة يتم اعتماد اتجاه موجب للجهد المدروس، والمحسوب بالعلاقة السابقة، وعندها يتم تحديد ناقليات جميع الفروع باختيار اتجاه افتراضي موجب للتيار في الفروع.

ملاحظة 2: لتحديد قيم التيارات في الفروع، نشكل حلقة مغلقة بين الفرع المراد حساب التيار فيه، وشعاع الجهد بين طرفيه. يتم بعدها اختيار اتجاه دوران الحلقة ومن ثم تطبيق قانون كيرشوف الثاني. في هذه الحالة تُعدّ القوى المحركة الكهربائية والجهود وتيارات منابع التيار موجبة إذا كان اتجاهها موافقاً لاتجاه دوران الحلقة، وسالبة إذا كان معاكساً له.

مثال: احسب قيم التيارات في جميع فروع الدارة المبينة بالشكل باستخدام طريقة كمون العقدة، علماً بأن:

$$R_1 = R_2 = 1[\Omega], R_3 = R_4 = R_5 = 2[\Omega], E_1 = E_2 = 12[V]$$



الحل:

نحسب ناقليات الفروع:

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1[S], g_3 = g_4 = g_5 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} = 0.5[S]$$

لتطبيق طريقة كمون العقدة نوصل العقدة C مع الأرض (نؤرضها) ونكتب المعادلات كما يأتي:

$$V_A = \frac{E_1 \cdot g_1 + V_B \cdot g_3}{g_1 + g_3 + g_4} = \frac{12 \times 1 + 0.5 \cdot V_B}{1 + 0.5 + 0.5} = \frac{12 + 0.5 \cdot V_B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot V_A - 0.5 \cdot V_B = 12 \qquad (1)$$

$$V_B = \frac{E_2 \cdot g_2 + V_A \cdot g_3}{g_2 + g_3 + g_5} = \frac{12 \times 1 + 0.5 \cdot V_A}{1 + 0.5 + 0.5} = \frac{12 + 0.5 \cdot V_A}{2}$$

$$\Rightarrow -0.5 \cdot V_A + 2 \cdot V_B = 12 \qquad (2)$$

تحتوي المعادلتان (1) و (2) على مجهولين V_A وV_B، ونحصل على قيمتهما بحل هاتين المعادلتين بأية طريقة رياضية ولتكن بطريقة المصفوفات:

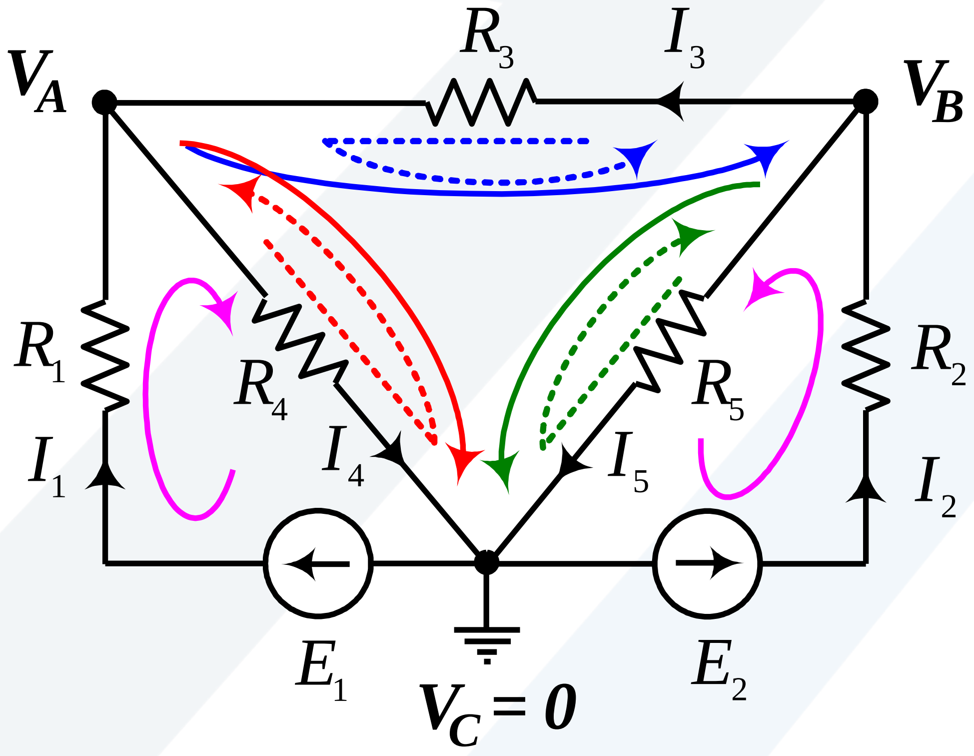
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-0.5 \times -0.5) = 4 - 0.25 = 3.75$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -0.5 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12 \times 2 - (-0.5 \times 12) = 24 + 6 = 30$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -0.5 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times 12 - (-0.5 \times 12) = 24 + 6 = 30$$

$$V_A = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{3.75} = 8[V], V_B = \frac{D_2}{D} = \frac{30}{3.75} = 8[V], V_C = 0[V]$$

يتم حساب قيم التيارات في الفروع وفقاً لقانون كيرشوف الثاني، حيث يتم تشكيل حلقات، كلٍ منها مكونة من الفرع الذي نريد حساب التيار الذي يسري فيه، ومن شعاع الجهد بين طرفي هذا الفرع بعد اعتماد اتجاه دوران للحلقة، كما هو مبين في الشكل.



وفقاً لذلك يتم كتابة معادلات الحلقات وحساب التيارات كما يأتي:

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 + (V_A - V_C) \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - (V_A - V_C)}{R_1} = \frac{12 - 8}{1} = 4[A]$$

$$E_2 = I_2 \cdot R_2 + (V_B - V_C) \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - (V_B - V_C)}{R_2} = \frac{12 - 8}{1} = 4[A]$$

$$0 = I_3 \cdot R_3 + (V_A - V_B) \Rightarrow I_3 = \frac{V_B - V_A}{R_3} = \frac{8 - 8}{2} = 0[A]$$

$$0 = I_4 \cdot R_4 - (V_A - V_C) \Rightarrow I_4 = \frac{V_A - V_C}{R_4} = \frac{8}{2} = 4[A]$$

$$0 = I_5 \cdot R_5 - (V_B - V_C) \Rightarrow I_5 = \frac{V_B - V_C}{R_5} = \frac{8}{2} = 4[A]$$