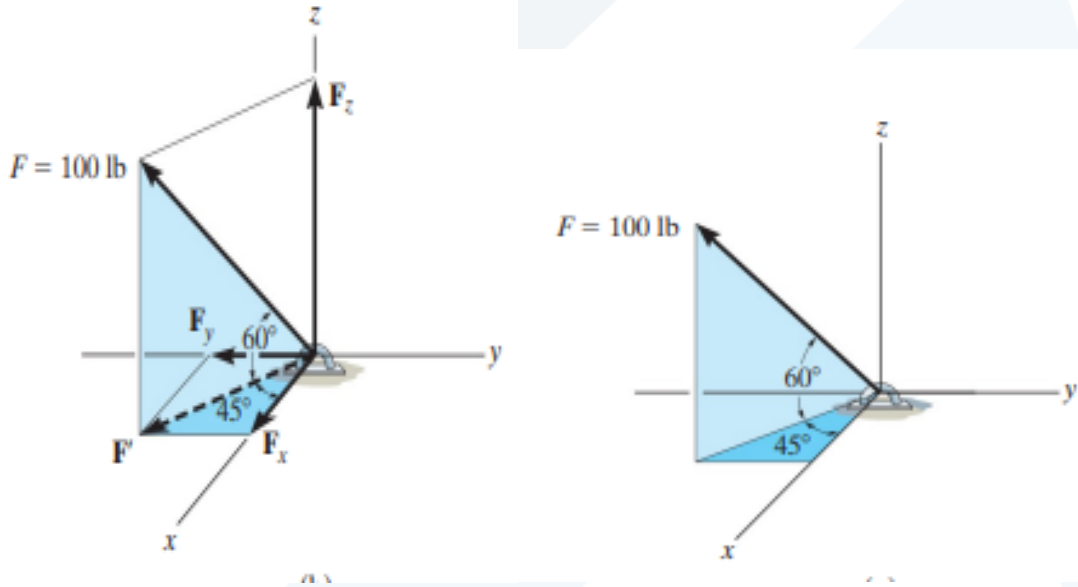


الجلسة الثانية - ميكانيك النقطة المادية – الأشعة الديكارتية –

د.نزار عبد الرحمن

مسألة 1-2: اكتب القوة F وفق الشعاع الديكارتية وأوجد الطويلة وزوايا الاتجاه.



الحل: الزاويتين 60 و 45 للقوة F ليستا زوايا الاتجاه . نطبّق قاعدة متوازي الأضلاع مرتين ، حيث توجد حاجة لتحليل القوة F إلى مركبات وفق المحاور X, Y, Z ، أولاً نحلّل

$$F = F' + F_z$$

$$F' = F_x + F_y \text{ وبعدها}$$

$$F_z = 100 \sin 60 = 86.6 \text{ lb}$$

$$F' = 100 \cos 60 = 50 \text{ lb}$$

$$F_x = F' \cos 45 = 50 \cos 45 = 35.4 \text{ lb}$$

$$F_y = F' \sin 45 = 50 \sin 45 = 35.4 \text{ lb}$$

مع ملاحظة أن منحنى القوة F_y هو عكس الاتجاه الموجب للمحور y

$$\mathbf{F} = \{35.4\mathbf{i} - 35.4\mathbf{j} + 86.6\mathbf{k}\} \text{ lb}$$

من أجل حساب طول الشعاع F يجب أن تساوي 100 lb

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{(35.4)^2 + (35.4)^2 + (86.6)^2} = 100 \text{ lb}$$

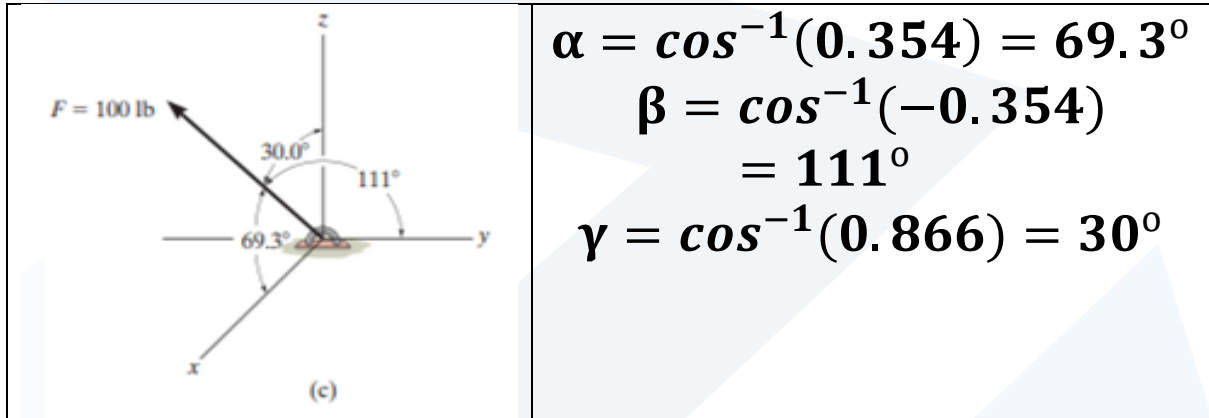
من أجل حساب زوايا المنحنى للقوة F يمكن تعريفها عن طريق الأشعة الواحدة المؤثرة باتجاه القوة:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{F_x}{F} \mathbf{i} + \frac{F_y}{F} \mathbf{j} + \frac{F_z}{F} \mathbf{k}$$

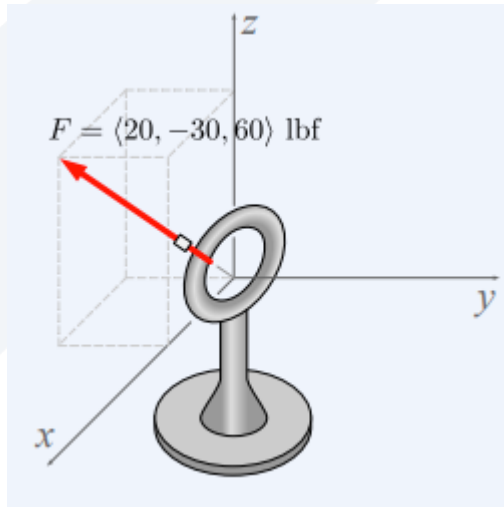
$$= \frac{35.4}{100} \mathbf{i} - \frac{35.4}{100} \mathbf{j} + \frac{86.6}{100} \mathbf{k}$$

$$= 0.354\mathbf{i} - 0.354\mathbf{j} + 0.866\mathbf{k}$$

ينتج لدينا الزوايا:



مسألة 2-2: تعطى القوة F المؤثرة على الحلقة $F(20, -30, 60)$ lb. احسب طولية القوة ومنحى زوايا التجيب θ_x ، θ_y ، θ_z .



الحل: حيث أن مركبات القوة متعامدة، نستطيع حساب طولية القوة بتطبيق نظرية فيثاغورث:

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + (-30)^2 + 60^2} \text{ lbf}$$

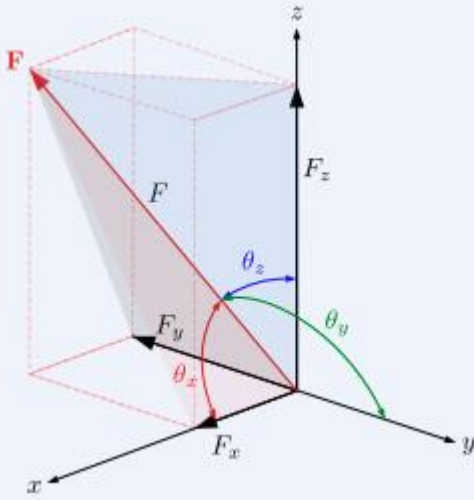
$$= 70 \text{ lbf}$$

منحى زوايا التجيب:

$$\theta_x = \cos^{-1} \left(\frac{F_x}{|\mathbf{F}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{20}{70} \right) = 73.4^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \left(\frac{F_y}{|\mathbf{F}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-30}{70} \right) = 115.38^\circ$$

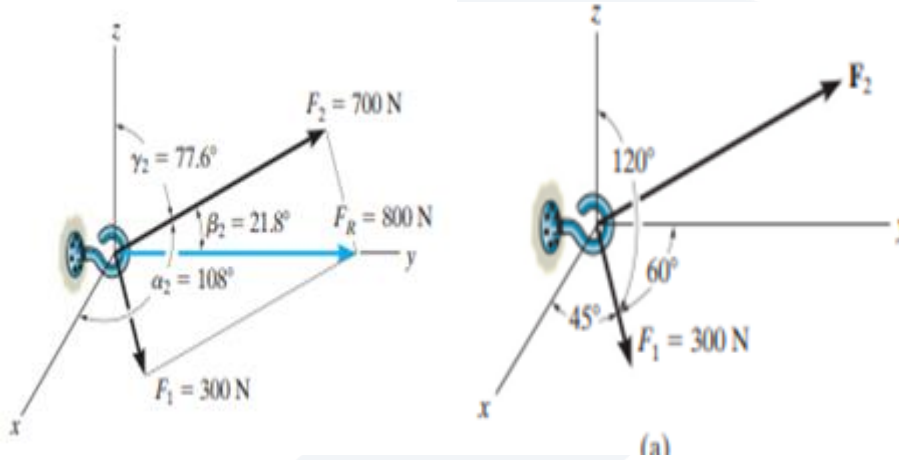
$$\theta_z = \cos^{-1} \left(\frac{F_z}{|\mathbf{F}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{60}{70} \right) = 31.0^\circ$$



حيث أن منحنى زوايا التجيب يكون مقاساً من الاتجاه الموجب للمحاور x, y, z

تدل الإشارة السالبة للمركبة F_y على أن الزاوية $\theta_y > 90^\circ$ ، والزاويتين θ_x ، θ_z أصغر من 90° أي أن المركبتين وفق x, y موجبتين K .

مسألة 2-3: قوتان F_1, F_2 تؤثران على الحلقة . احسب طولية F_2 وزوايا المنحنى من أجل أن تكون طولية المحصلة F_R تساوي 800 نيوتن ، ومتجهة على امتداد الاتجاه الموجب للمحور Y .



الحل :

من أجل الحل يجب كتابة المحصلة وفق مركباتها F_1 و F_2 وفق الشكل الديكارتي ،
أي أن :

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

باستخدام المعادلة :

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \cos\alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cdot \cos\beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cdot \cos\gamma_1 \mathbf{k}$$

$$= 300\cos45\mathbf{i} + 300\cos60\mathbf{j} + 300\cos120\mathbf{k}$$

$$N = \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x} \cdot \mathbf{i} + F_{2y} \cdot \mathbf{j} + F_{2z} \cdot \mathbf{k}$$

حيث أن طول المحصلة = 800 N في الاتجاه الموجب للمحور Y نكتب :

$$\mathbf{F}_R = (800N)(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\}N$$

نكتب :

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$800\mathbf{j} = \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k} + F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}\}$$

$$800\mathbf{j} = (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} - (150 + F_{2z})\mathbf{k}$$

عن طريق مساواة مركبات الأشعة الواحدة في طرفي المعادلة ينتج:

$$0 = 212.1 + F_{2x} \quad , \quad F_{2x} = -212.1\text{N}$$

$$800 = 150 + F_{2y} \quad , \quad F_{2y} = 650\text{N}$$

$$0 = -150 + F_{2z} \quad , \quad F_{2z} = 150\text{N}$$

ينتج طول القوة F_2 :

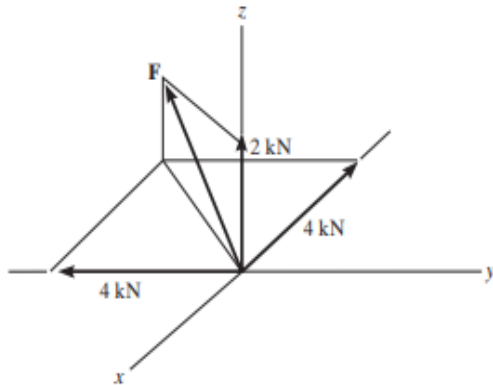
$$F_2 = \sqrt{(-212\text{N})^2 + (650\text{N})^2 + (150\text{N})^2} = 700\text{N}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{-212.1}{700}, \alpha_2 = 108^\circ \text{ نحسب زوايا المنحى:}$$

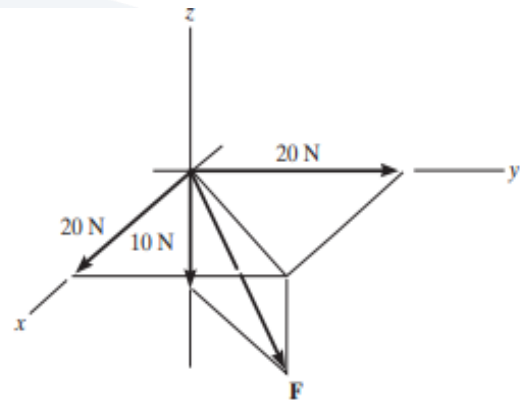
$$\cos\beta_2 = \frac{650}{700}, \beta_2 = 21.8^\circ$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{150}{700}, \gamma_2 = 77.6^\circ$$

مسألة 2- 4: اكتب القوة F كشعاع ديكارتي ، واحسب زاوية المنحى β .



(a)



(b)

a) $\mathbf{F} = \{-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ kN}$

$$F = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = 6 \text{ kN}$$

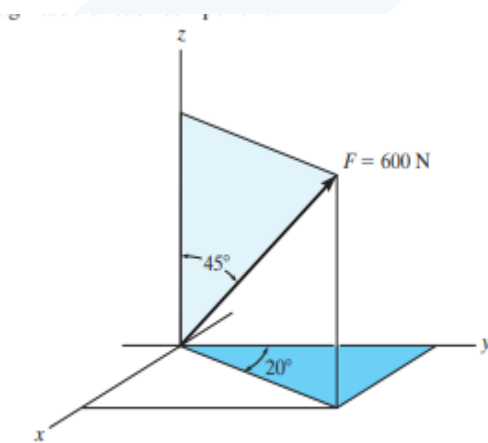
$$\cos \beta = \frac{-2}{3}$$

b) $\mathbf{F} = \{20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\} \text{ N}$

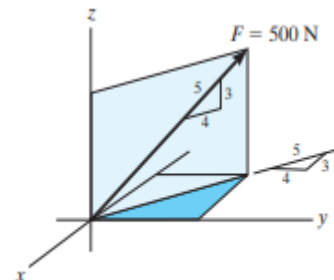
$$F = \sqrt{(20)^2 + (20)^2 + (-10)^2} = 30 \text{ N}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}$$

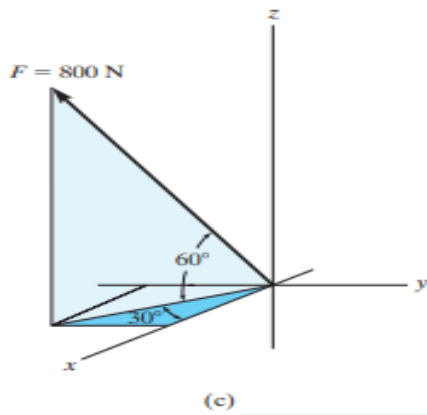
مسألة 2-5: حلل كل قوة إلى مركبات وفق المحاور X,Y,Z واحسب طويلة كل مركبة.



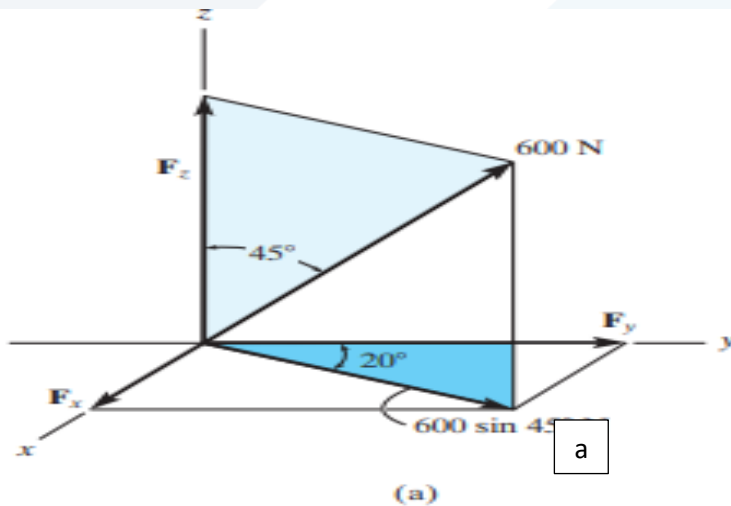
(a)



(b)



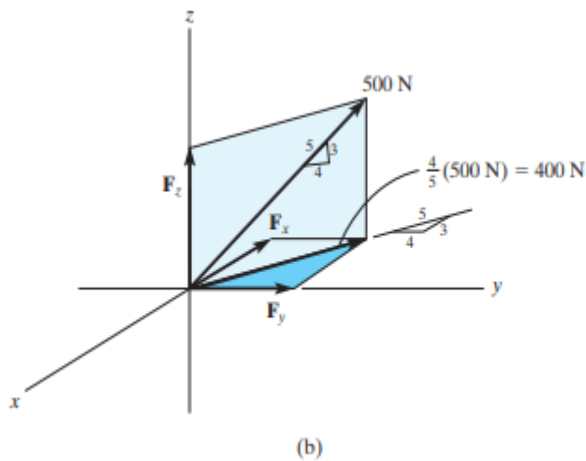
الحل:



$$F_x = (600 \sin 45^\circ) \sin 20^\circ \text{ N}$$

$$F_y = (600 \sin 45^\circ) \cos 20^\circ \text{ N}$$

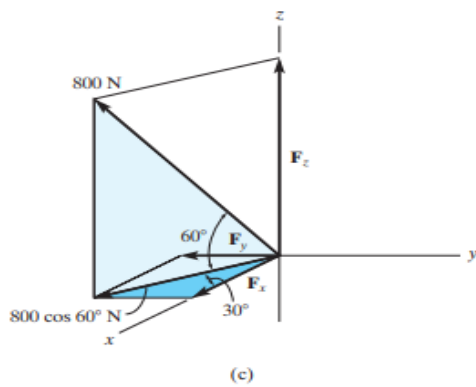
$$F_z = 600 \cos 45^\circ \text{ N}$$



$$F_x = -\frac{3}{5}(400) \text{ N}$$

$$F_y = \frac{4}{5}(400) \text{ N}$$

$$F_z = \frac{3}{5}(500) \text{ N}$$

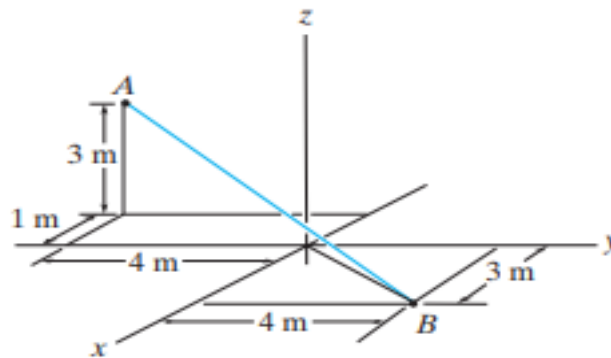


$$F_x = 800 \cos 60^\circ \cos 30^\circ \text{ N}$$

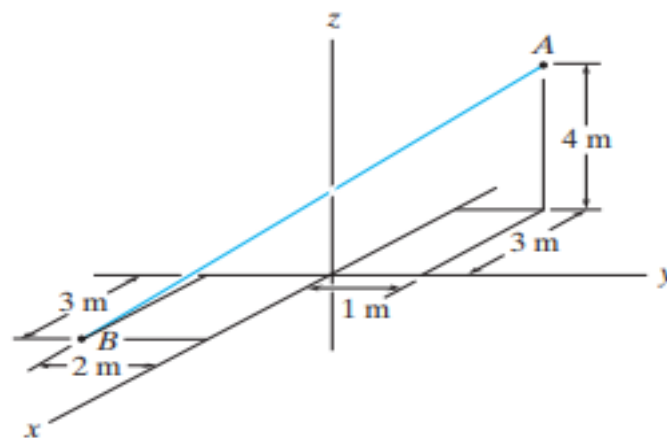
$$F_y = -800 \cos 60^\circ \sin 30^\circ \text{ N}$$

$$F_z = 800 \sin 60^\circ \text{ N}$$

مسألة 2-6: حدد الشعاع المتجه من A إلى B.



(b)

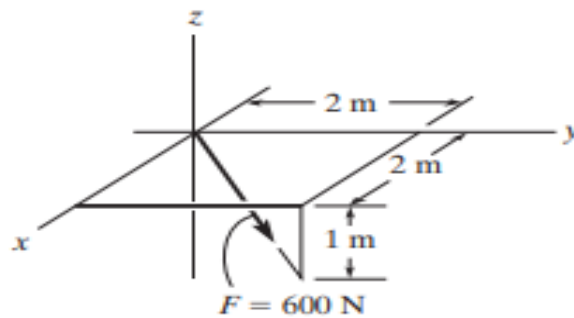


(c)

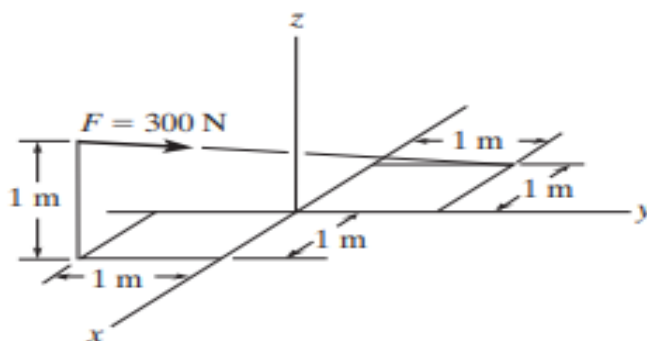
$$b) \mathbf{r}_{AB} = \{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$c) \mathbf{r}_{AB} = \{6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}$$

مسألة 7-2 : اكتب القوة F كشعاع ديكارتي .



(b)

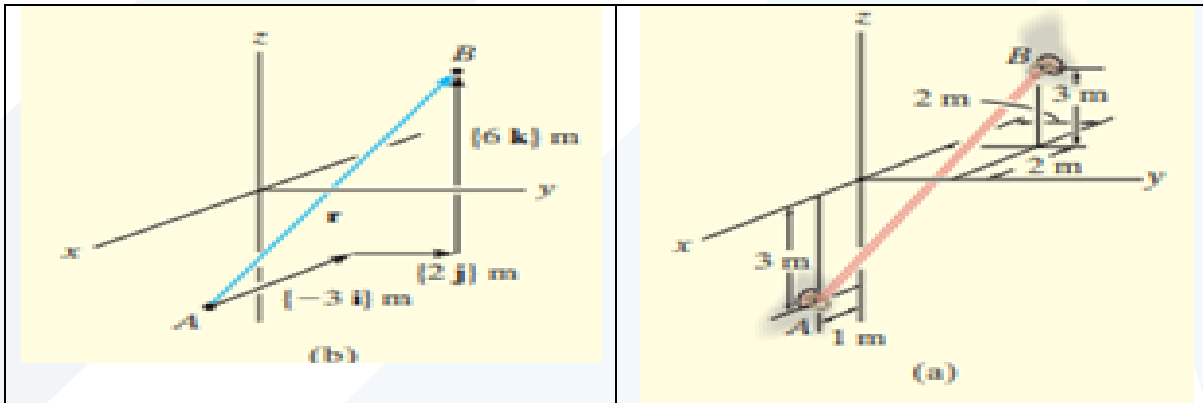


(c)

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbf{F} &= 600 \text{ N} \left(\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} - \frac{1}{3} \mathbf{k} \right) \\ &= \{400\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathbf{F} &= 300 \text{ N} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} - \frac{1}{3} \mathbf{k} \right) \\ &= \{-200\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 100\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

مسألة 2-8: حبل من المطاط يصل بين النقطتين A,B. احسب طول الحبل و زوايا المنحى مقاسة من A باتجاه B.



الحل :

نحدد أولاً شعاع الموقع من A إلى B. احداثيات نقطة الذيل A(1m,0,-3m).

احداثيات نقطة الرأس B(-2m,2m,3m)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{-2m - 1m\} \mathbf{i} + \{2m - 0\} \mathbf{j} + \{3m - (-3m)\} \mathbf{k} \\ &= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\} m \end{aligned}$$

يمكن الحصول على هذه الاحداثيات مباشرة عن طريق تنفيذ الاتجاه والمنحى ، حيث يجب التحرك مسافة محددة على كل محور من نقطة البداية للوصول إلى

نقطة النهاية، نتحرك بالترتيب مسافة $3i$ m على امتداد المحور x ، ومسافة $2j$ على امتداد المحور y ، وأخيرا مسافة $6k$ على امتداد المحور z

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7m$$

نكتب صيغة شعاع الوحدة باتجاه r

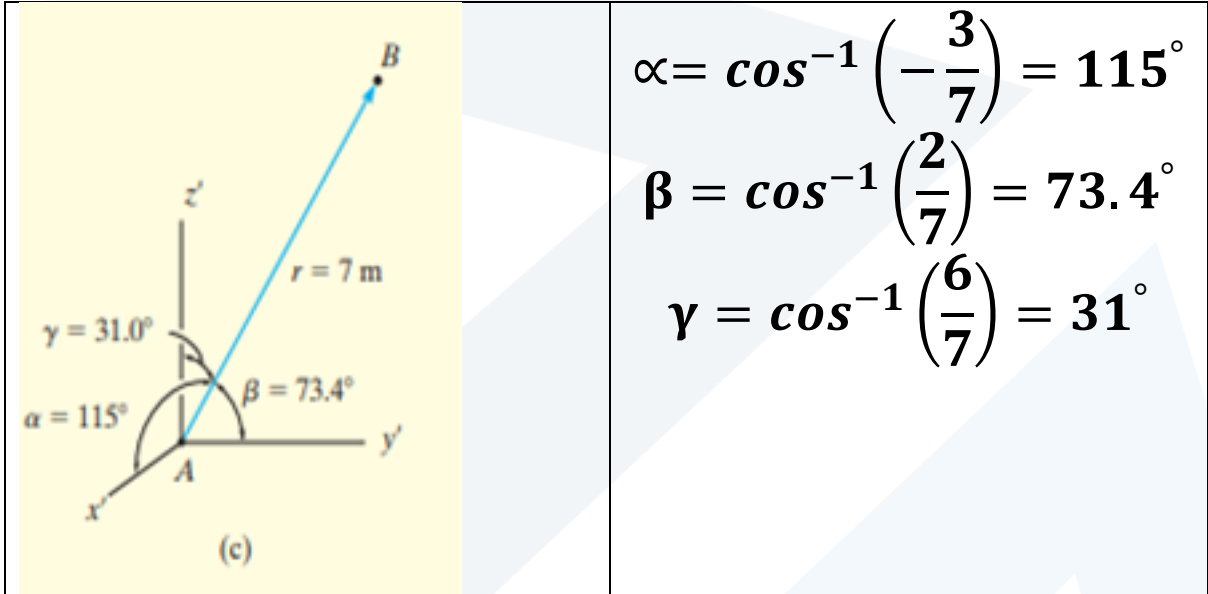
$$U = \frac{r}{r} = -\frac{3}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$$

مركبات شعاع الوحدة تعطي زوايا المنحى :

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31^\circ$$

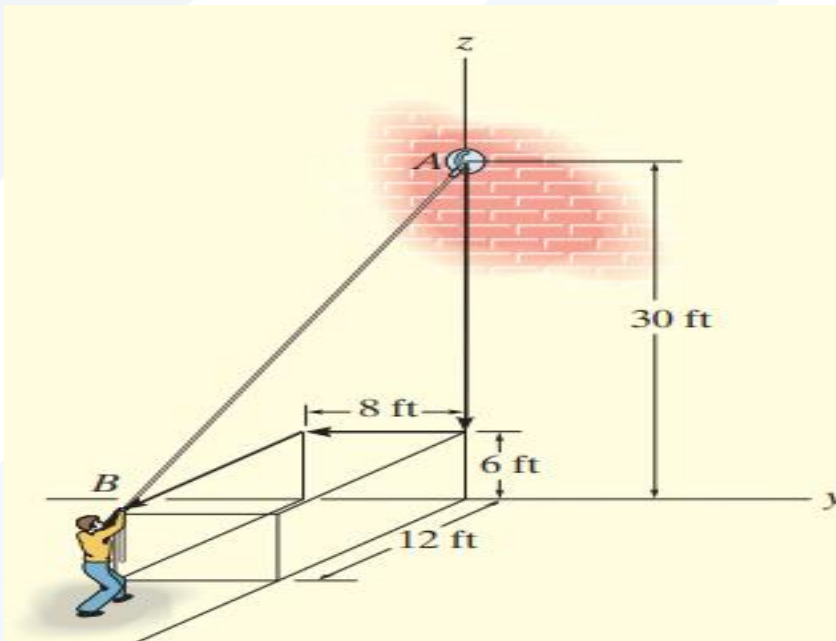


$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31^\circ$$

مسألة 9-2: يسحب رجل الحبل بقوة مقدارها 70 lb. اكتب هذه القوة وفق الشعاع الديكارتي واحسب المنحى .



الحل: يتم تحديد منحى القوة F من الشعاع r الذي يتجه من A إلى B ، يمكن حساب r مباشرة ، فمن أجل الذهاب من A إلى B ، يجب قطع مسافة مقدارها

{24K-}، وبعدها مسافة بمقدار {-8j}، وأخيراً مسافة {12i} من أجل الوصول إلى B.

أي أن:

$$\mathbf{r} = \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}$$

طويلة الشعاع r تمثل طول الحبل AB

$$r = \sqrt{(12)^2 + (-8)^2 + (-24)^2} = 28 \text{ ft}$$

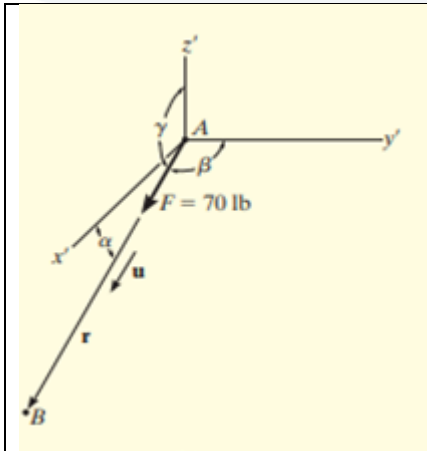
نكتب أشعة الواحدة التي تعرّف منحنى واتجاه كل من r و F

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

إذن القوة F التي تمتلك طولاً 70 lb ومنحنى معرف وفق شعاع الواحدة U

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = F\mathbf{U} &= 70\text{lb} \left(\frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k} \right) \\ &= \{30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}\text{lb} \end{aligned}$$

زوايا المنحنى المقاسة بين القوة F أو شعاع الموقع r ، والاتجاه الموجب للمحاور مع المبدأ عند النقطة A. من مركبات أشعة الواحدة نكتب:

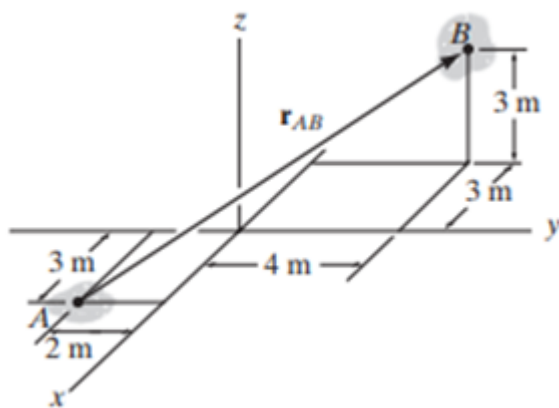


$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{12}{28} \right) = 64.6^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(-\frac{8}{28} \right) = 107^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{-24}{28} \right) = 149^\circ$$

مسألة 2-10: اكتب شعاع الموقع \mathbf{r}_{AB} كشعاع ديكارتي، واحسب طول الشعاع وزوايا الاتجاه.

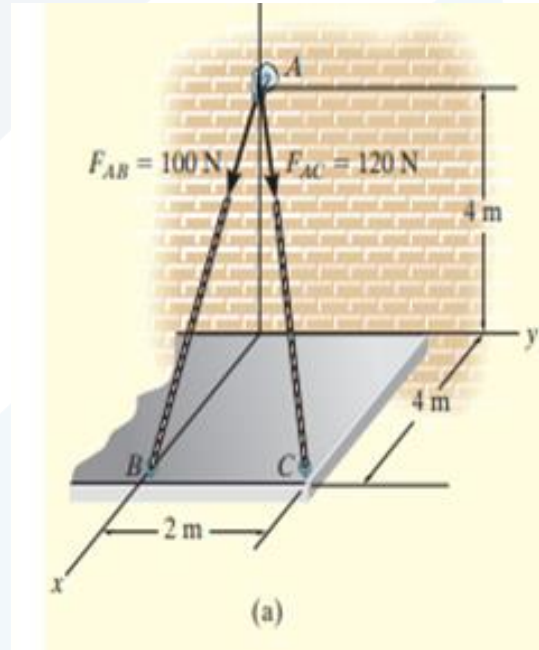
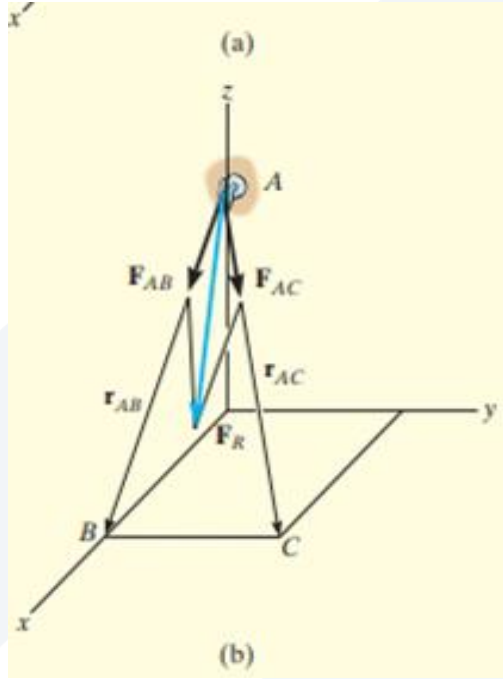


$$\mathbf{r}_{AB} = \{-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ m} \quad \text{Ans.}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-6 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} = 9 \text{ m} \quad \text{Ans.}$$

$$\alpha = 132^\circ, \quad \beta = 48.2^\circ, \quad \gamma = 70.5^\circ \quad \text{Ans.}$$

مسألة 11-2: رف معلق بواسطة كبلين. إذا كانت القوة المؤثرة في كل كبل $F_{AB}=100\text{N}$, $F_{AC}=120\text{N}$, عند نقطة التعليق A. احسب محصلة القوى المؤثرة عند A، واكتب هذه المحصلة كشعاع ديكارتي.



الحل: يمكن تمثيل المحصلة بيانيا وكتابتها وفق الشكل الديكارتي ، أولا عن طريق كتابة القوتين F_{AB} , F_{AC} وفق الشكل الديكارتي ، وكتابة الأشعة الواحدية U_{AC} على امتداد الكبل لأشعة الموقع r_{AC} , r_{AB} :
من أجل الذهاب من A إلى B يجب أن نتحرك مسافة $[-4k]m$ وبعدها مسافة m
[4j]

$$r_{AB} = \{4i - 4k\}m \text{ أي أن :}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66m$$

$$F_{AB} = F_{AB} \frac{r_{AB}}{r_{AB}} = (100N) \left(\frac{4}{5.66} i - \frac{4}{5.66} k \right)$$

$$F_{AB} = \{70.7i - 70.7k\}N$$

من أجل الذهاب من A إلى C يجب الذهاب مسافة 4K- وبعدها مسافة 2j وأخيرا مسافة 4i.

أي أن:

$$r_{AC} = \{4i + 2j - 4k\}m$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6m$$

$$F_{AC} = F_{AC} \left(\frac{r_{AC}}{r_{AC}} \right) = (120) \left(\frac{4}{6} i + \frac{2}{6} j - \frac{4}{6} k \right)$$

$$= \{80i + 40j - 80k\}$$

قيمة المحصلة:

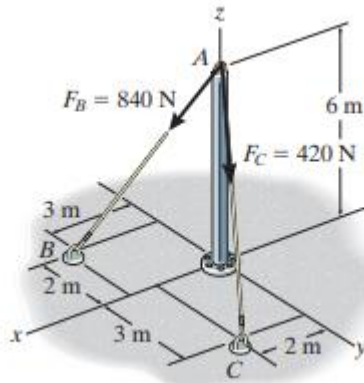
$$F_R = F_{AB} + F_{AC}$$

$$= \{70.7i - 70.7k\} + \{80i + 40j - 80k\}$$

$$= \{151i + 40j - 151k\}N$$

مسألة 2-12: احسب قيمة المحصلة واحداثيات زوايا الاتجاه لمحصلة القوى

المؤثرة على الحلقة عند A.



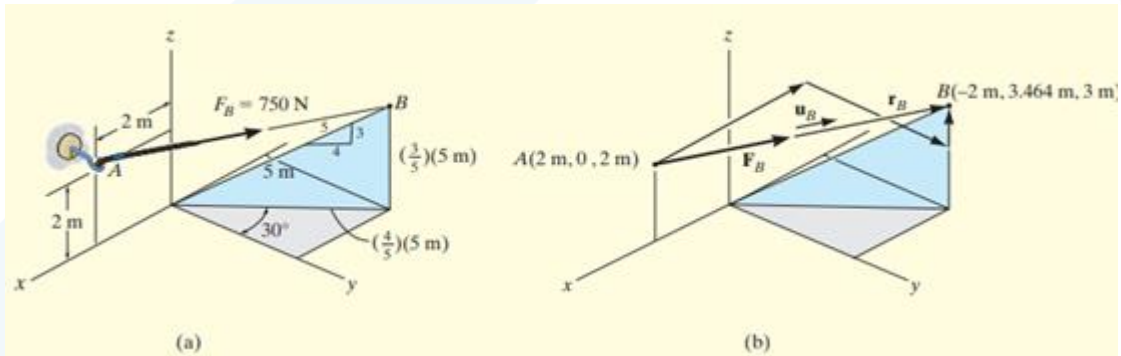
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= F_B \mathbf{u}_B \\ &= (840 \text{ N}) \left(\frac{3}{5} \mathbf{i} - \frac{2}{5} \mathbf{j} - \frac{6}{5} \mathbf{k} \right) \\ &= \{ 360 \mathbf{i} - 240 \mathbf{j} - 720 \mathbf{k} \} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= F_C \mathbf{u}_C \\ &= (420 \text{ N}) \left(\frac{3}{5} \mathbf{i} + \frac{3}{5} \mathbf{j} - \frac{6}{5} \mathbf{k} \right) \\ &= \{ 120 \mathbf{i} + 180 \mathbf{j} - 360 \mathbf{k} \} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(480 \text{ N})^2 + (-60 \text{ N})^2 + (-1080 \text{ N})^2} \\ &= 1.18 \text{ kN} \end{aligned}$$

Ans.

مسألة 2-13 : اكتب القوة المؤثرة عند الخطاف A وفق الشعاع الديكارتي .



احداثيات النقطتين A, B : $A(2m, 0, 2m)$

$B(-2m, 3.464m, 3m)$

من أجل الذهاب من A إلى B، يجب أن نتحرك $[-4\mathbf{i}]m$ وبعدها $[3.464\mathbf{j}]m$. وأخيرا $[1\mathbf{k}]m$.

نكتب شعاع الواحدة:

$$U_B = \frac{r_B}{r_B} = \frac{\{-4i + 3.464j + 1k\}}{\sqrt{(-4m)^2 + (3.464)^2 + (1)^2}}$$

$$= 0.428i + 0.463j + 0.185k$$

نكتب شعاع القوة F_B وفق الشكل الديكارتي:

$$\begin{aligned} F_B &= F_B \cdot U_B \\ &= (750N)(-0.7428i + 0.4633j + 0.185k) \\ &= \{-557i + 482j + 139k\}N \end{aligned}$$



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY