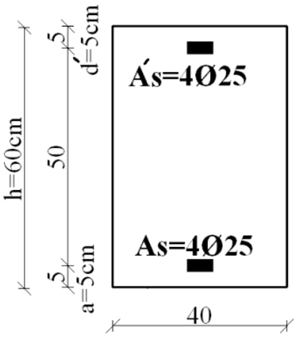
تطبيقات على الضغط اللامركزي - مخططات الترابط

التطبيق /1/:

لدينا عنصر بيتوني مسلح، مقطعه مستطيل: $b \times h = 40 \times 60cm$، ومسلح بشكل متناظر كما هو مبين في الشكل المرفق: $A_s = A'_s = 4\phi 25mm = 4 \times 491 = 1964mm^2$

باعتبار أن مقاومات المواد: $f_y = 240MPa\,;\; f'_c = 20MPa$ ، يطلب تحديد النقاط الثلاثة التالية العائدة لمخطط الترابط الخاص بهذا المقطع.

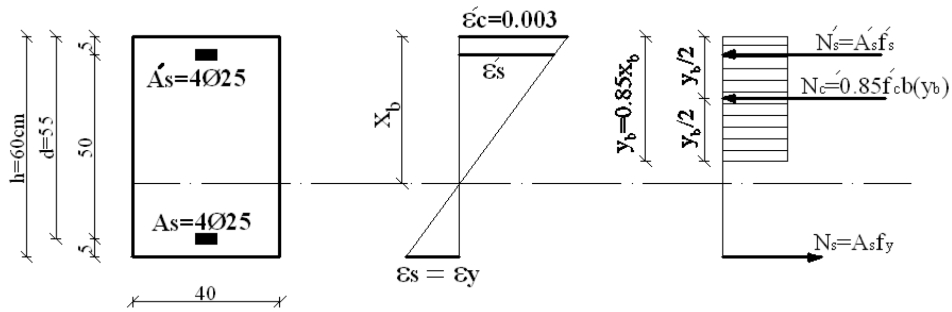


- $\left(\frac{N'_{ub}}{\Omega}, \frac{M_{ub}}{\Omega}\right)$ - الحالة التوازنية
- $\left(\frac{N'_u}{\Omega}, \frac{M_{u\max}}{\Omega}\right)$ - حالة العزم الأعظمي
- $\left(\frac{N'_u}{\Omega}, \frac{M_u}{\Omega}\right)$ - الموافقة للامركزية تساوي $e = \frac{M_u}{N'_u} = 0.6m$

الحل:

أولاً – دراسة الحالة التوازنية

1- تحديد موقع المحور المحايد للحالة التوازنية x_b:



$$\frac{x_b}{d} = \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_y + \varepsilon'_c}$$

$$E_s = 210000MPa \Rightarrow$$

$$\frac{x_b}{d} = \frac{0.003}{f_y / E_s + 0.003} = \frac{630}{f_y + 630}$$

$$\Rightarrow x_b = \frac{630}{f_y + 630} d = \frac{630 \times 550}{240 + 630} = 398.3mm$$

$$\therefore y_b = 0.85 x_b = 0.85 \times 398.3 = 338.6mm$$

2- تحديد قيمة الاجهادات في التسليح المضغوط:

$$f_s' = 630\left(\frac{y_b - 0.85d'}{y_b}\right) \le f_y$$

$$f_s' = 630\left(\frac{338.6 - 0.85\times 50}{338.6}\right) = 551MPa > f_y = 240MPa$$

$$\therefore\ f_s = f_s' = f_y = 240MPa$$

3- تحديد $\left(\frac{N'_{ub}}{\Omega}, \frac{M_{ub}}{\Omega}\right)$:

- من معادلة توازن القوى:

$$\frac{N'_{ub}}{\Omega} = N_c' + N_s' - N_s$$

$$\frac{N'_{ub}}{\Omega} = 0.85 f_c' b\, y_b + A_s' f_s' - A_s f_y$$

$$\frac{N'_{ub}}{\Omega} = 0.85\times 20\times 400\times 338.6 + 1964\times 240 - 1964\times 240 = 2302.5\,kN$$

- من معادلة العزوم بالنسبة لمركز ثقل المقطع:

$$\frac{M_{ub}}{\Omega} = 0.85 f_c' b\, y_b\left(\frac{h}{2} - \frac{y_b}{2}\right) + A_s' f_s'\left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_y\left(\frac{h}{2} - a\right)$$

$$= 0.85\times 20\times 400\times 338.6\left(\frac{600}{2} - \frac{338.6}{2}\right) + 2\times 1964\times 240\left(\frac{600}{2} - 50\right)$$

$$= 536.61kN.m$$

بالتالي: $\left(\frac{N'_{ub}}{\Omega}, \frac{M_{ub}}{\Omega}\right) : \left(\frac{2302.5}{\Omega}kN, \frac{536.61}{\Omega}kN.m\right)$

4- حساب اللامركزية التوازنية :

$$e_b = \frac{M_{ub}}{N'_{ub}} = \frac{536.61}{2302.5}\times 10^3 = 233.1mm$$

ثانياً – دراسة حالة العزم الأعظمي

1- تحديد ارتفاع مستطيل الضغط الموافق للعزم الأعظمي y:

$$\frac{M_u}{\Omega}=0.85f_c'\,b\,y\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)+A_s'\,f_s'\left(\frac{h}{2}-d'\right)+A_s\,f_y\left(\frac{h}{2}-a\right)$$

$$=0.85f_c'\,b\,y\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)+2A_s\,f_y\left(\frac{h}{2}-a\right)$$

$$\frac{\partial M_u}{\partial y}=0.85f_c'\,b\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{2}(0.85f_c'b\,y)=0$$

$$\Rightarrow 0.85f_c'\,b\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)=0\Rightarrow y=\frac{h}{2}$$

$$\therefore\ y=\frac{h}{2}\Leftrightarrow\frac{M_u}{\Omega}=\left(\frac{M_{u\max}}{\Omega}\right)$$

2- تحديد العزم الأعظمي $\frac{M_{u\max}}{\Omega}$:

$$y=\frac{h}{2}\Leftrightarrow\frac{M_u}{\Omega}=\left(\frac{M_{u\max}}{\Omega}\right)$$

$$\frac{M_{u\max}}{\Omega}=0.85f_c'\,b\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{4}\right)+2A_s\,f_y\left(\frac{h}{2}-a\right)$$

$$=0.85\times20\times400\times300(300-150)+2\times1964\times240(300-50)$$

$$=541.68kN.m$$

3- تحديد $\frac{N_u'}{\Omega}$ الموافقة للعزم الأعظمي $\frac{M_{u\max}}{\Omega}$:

$$\frac{N_u'}{\Omega}=0.85f_c'\,b\frac{h}{2}$$

$$=0.85\times20\times400\times300=2040kN$$

4- التحقق من وصول الاجهادات إلى حد السيلان:

$$f_s'=630\left(\frac{y-0.85d'}{y}\right)=630\times\left(\frac{300-0.85\times50}{300}\right)$$

$$=540.75MPa>f_y=240MPa$$

$$f_s=630\left(\frac{0.85d-y}{y}\right)=630\times\left(\frac{0.85\times550-300}{300}\right)$$

$$=351.75MPa>f_y=240MPa$$

$$\therefore\ f_s=f_s'=f_y=240MPa\quad O.K.$$

بالتالي: $\left(\frac{N'_u}{\Omega}, \frac{M_{u\max}}{\Omega}\right) : \left(\frac{2040}{\Omega} kN, \frac{541.68}{\Omega} kN.m\right)$

5- حساب اللامركزية : $e = \frac{M_{u\max}}{N'_u} = \frac{541.68}{2040} \times 10^3 = 265.53 mm$

ثالثاً – دراسة الحالة الموافقة لـ: $e = \frac{M_u}{N'_u} = 0.6 m$

1- تحديد ارتفاع مستطيل الضغط y:

يمكن تحديد نوع اللامركزية عن طريق معرفة موقع محصلة الضغط بالنسبة لمركز الثقل:

$$e - \frac{h}{2} = 600 - \frac{600}{2} = 300 mm$$

بالتالي تمر محصلة الضغط خارج المقطع، ويمكن القول بأن اللامركزية كبيرة والشد هو المسيطر.

وفي البداية، نفرض أن: $f_s = f'_s = f_y$

- معادلة القوى:

$$\frac{N'_u}{\Omega} = 0.85 f'_c b \frac{h}{2} + 0$$
$$= 0.85 \times 20 \times 400 y = 6800 y$$

- معادلة العزوم بالنسبة لمركز الثقل:

$$\frac{M_u}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right) + 2A_s\, f_y \left(\frac{h}{2} - a\right)$$
$$= 0.85 \times 20 \times 400 y \left(300 - \frac{y}{2}\right) + 2 \times 1964 \times 240 (300 - 50)$$
$$\therefore \quad \frac{M_u}{\Omega} = 6800 y \left(300 - \frac{y}{2}\right) + 235680000$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y:

$$\frac{N'_u e}{\Omega} = \frac{M_u}{\Omega}$$

$$6800 y \times 600 = 6800 y \left(300 - \frac{y}{2}\right) + 235680000 \Rightarrow y = 99.1 mm$$

2- التحقق من وصول الاجهادات إلى حد السيلان:

$$f'_s = 630\left(\frac{y-0.85d'}{y}\right) = 630\times\left(\frac{99.1-0.85\times 50}{99.1}\right)$$

$$= 360MPa > f_y = 240MPa$$

$$f_s = 630\left(\frac{0.85d-y}{y}\right) = 630\times\left(\frac{0.85\times 550-99.1}{99.1}\right)$$

$$= 2342MPa >> f_y = 240MPa$$

$$\therefore\ f_s = f'_s = f_y = 240MPa \quad O.K.$$

$$\frac{N'_u}{\Omega} = 6800y = 6800\times 99.1 = 673880N$$

$$\frac{M_u}{\Omega} = 673880\times 600 = 404328000N.m$$

$$\left(\frac{N'_u}{\Omega}, \frac{M_u}{\Omega}\right):\left(\frac{673.88}{\Omega}kN, \frac{404.33}{\Omega}kN.m\right)$$

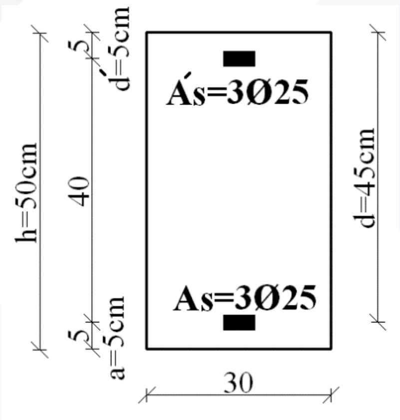
التطبيق /2/ :

لدينا عنصر بيتوني مسلح، مقطعه مستطيل: $b\times h = 30\times 50cm$، ومسلح بشكل متناظر كما هو مبين في الشكل

المرفق: $A_s = A'_s = 3\phi 25mm = 3\times 491 = 1473mm^2$

باعتبار أن مقاومات المواد: $f_y = 240MPa\,;\ f'_c = 20MPa$

يطلب رسم مخطط الترابط الخاص بهذا المقطع، والتحقق من تحمل المقطع للحالات التالية:



1- $\left(\frac{N'_u}{\Omega} = 3000kN\,, \frac{M_u}{\Omega} = 200kN.m\right)$

2- $\left(\frac{N'_u}{\Omega} = 1500kN\,, \frac{M_u}{\Omega} = 200kN.m\right)$

3- $\left(\frac{N'_u}{\Omega} = 500kN\,, \frac{M_u}{\Omega} = 200kN.m\right)$

الحل:

مخطط الترابط هو المنحني الذي يمثل العلاقة بين القوة الناظمية الحدية والعزم الحدي، ويمكن رسمه بعد تحديد عدة نقاط مميزة، تمثل حالات متباينة.

1- حالة الضغط البسيط: $\frac{M_u}{\Omega}=0 \Rightarrow e=0$

$$\frac{N'_u}{\Omega}=0.85f'_c bh+A'_s f_y+A_s f_y$$
$$=0.85\times 20\times 300\times 500+2\times 1473\times 240=3257kN$$

2- حالة الانعطاف البسيط: $\frac{N'_u}{\Omega}=0 \Rightarrow e=\infty$

لتسهيل المسألة، نفترض أن قوة الضغط في البيتون منطبقة على قوة الضغط في فولاذ التسليح المضغوط، ومن ثم نحسب العزم بالنسبة للمحور المار من مركز ثقل التسليح المضغوط، وهذا التقريب مقبول.

$$\frac{M_u}{\Omega}=N_s z=A_s f_y(d-d')=1473\times 240\times(450-50)=141.41kN.m$$

3- الحالة التوازنية:

$$\frac{x_b}{d}=\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_y+\varepsilon'_c}$$
$$E_s=210000MPa \Rightarrow$$
$$\frac{x_b}{d}=\frac{0.003}{f_y/E_s+0.003}=\frac{630}{f_y+630}$$
$$\Rightarrow x_b=\frac{630}{f_y+630}d=\frac{630\times 450}{240+630}=325.9mm$$
$$\therefore y_b=0.85x_b=0.85\times 325.9=277mm$$

- التحقق من الاجهادات في التسليح المضغوط:

$$f'_s=630\left(\frac{y_b-0.85d'}{y_b}\right)\le f_y$$
$$f'_s=630\left(\frac{277-0.85\times 50}{277}\right)=533.3MPa>f_y=240MPa$$
$$\therefore f_s=f'_s=f_y=240MPa$$

- تحديد $\left(\frac{N'_{ub}}{\Omega},\frac{M_{ub}}{\Omega}\right)$:

- من معادلة توازن القوى:

$$\frac{N'_{ub}}{\Omega} = N'_c + N'_s - N_s$$

$$\frac{N'_{ub}}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y_b + A'_s f'_s - A_s f_y$$

$$= 0.85 \times 20 \times 300 \times 277 + 0 = 1412.7\, kN$$

- من معادلة العزوم بالنسبة لمركز ثقل المقطع:

$$\frac{M_{ub}}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y_b \left(\frac{h}{2} - \frac{y_b}{2}\right) + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - a\right)$$

$$= 0.85 \times 20 \times 300 \times 277 \left(\frac{500}{2} - \frac{277}{2}\right) + 2 \times 1473 \times 240 \left(\frac{500}{2} - 50\right)$$

$$= 298.9\, kN.m$$

بالتالي:

$$\left(\frac{N'_{ub}}{\Omega}, \frac{M_{ub}}{\Omega}\right) : \left(\frac{1412.7}{\Omega} kN, \frac{298.9}{\Omega} kN.m\right)$$

$$e_b = \frac{M_{ub}}{N'_{ub}} = \frac{298.9}{1412.7} \times 10^3 = 211.6\, mm$$

4- حالة الضغط هو المسيطر (لامركزية صغيرة):

$$e \le e_b = 211.6\, mm$$

نختار لامركزية معينة، أصغر من اللامركزية التوازنية، ومن ثم نحسب كل من العزم والقوة الموافقين، ولتكن $e = 100mm \le e_b = 211.6mm$.

$$f'_s = f_y = 240MPa$$

$$f_s = 630\left(\frac{0.85d - y}{y}\right) = 630 \times \left(\frac{0.85 \times 450 - y}{y}\right) = 630 \times \left(\frac{382.5 - y}{y}\right)$$

- نعوض قيم الاجهادات في معادلة توازن القوى:

$$\frac{N'_u}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y + A'_s f'_s - A_s f_s$$

$$= 0.85 \times 20 \times 300 \times y + 1473 \times 240 - 1473 \times 630 \left(\frac{382.5 - y}{y}\right)$$

$$\frac{N'_u}{\Omega} = 5100y + 353520 - 927990 \left(\frac{382.5 - y}{y}\right)$$

- وأيضاً في معادلة العزوم بالنسبة لمركز ثقل المقطع:

$$\frac{M_u}{\Omega}=0.85 f_c' b\, y\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{2}\right)+A_s' f_s'\left(\frac{h}{2}-d'\right)+A_s f_s\left(\frac{h}{2}-a\right)$$
$$=0.85\times 20\times 300\times y\left(\frac{500}{2}-\frac{y}{2}\right)+1473\times 240\left(\frac{500}{2}-50\right)$$
$$+1473\times 630\left(\frac{382.5-y}{y}\right)\left(\frac{500}{2}-50\right)$$

- ومن ثم نكتب المعادلة: $\frac{N_u'}{\Omega}e=\frac{M_u}{\Omega}$

حيث $e=100mm$ ، لنحصل على معادلة من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ y ، وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$y\approx 358.5\,mm$$

$$f_s=630\left(\frac{0.85d-y}{y}\right)=630\times\left(\frac{382.5-358.5}{358.5}\right)=42.2\,MPa$$

وبعد التعويض، نحصل:

$$\frac{N_u'}{\Omega}=5100y+353520-927990\left(\frac{382.5-y}{y}\right)=2119.7\,kN$$
$$\frac{M_u}{\Omega}=\frac{N_u'}{\Omega}e=2119.7\times 0.1=211.97\,kN.m$$

بالتالي: $\left(\frac{N_u'}{\Omega},\frac{M_u}{\Omega}\right):\left(\frac{2119.7}{\Omega}kN\,,\,\frac{211.97}{\Omega}kN.m\right)$

$$e=\frac{M_u}{N_u'}=100mm$$

5- حالة الشد هو المسيطر (لامركزية كبيرة): $e>e_b=211.6mm$

نختار لامركزية معينة، أكبر من اللامركزية التوازنية، ونحسب كل من العزم والقوة الموافقين، ولتكن $e=300mm>e_b=211.6mm$.

- بافتراض: $f_s=f_s'=f_y=240MPa$
- نعوض قيم الاجهادات في معادلة توازن القوى:

$$\frac{N_u'}{\Omega}=0.85 f_c' b\, y+A_s' f_s'-A_s f_s$$
$$=0.85\times 20\times 300\times y+1473\times 240-1473\times 240=5100y$$

- وأيضاً في معادلة العزوم بالنسبة لمركز ثقل المقطع:

$$\frac{M_u}{\Omega} = 0.85 f_c' b\, y\left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right) + 2A_s\, f_y\left(\frac{h}{2} - a\right)$$
$$= 0.85\times 20\times 300\times y\left(\frac{500}{2} - \frac{y}{2}\right) + 2\times 1473\times 240\left(\frac{500}{2} - 50\right)$$
$$= 5100y(250 - y/2) + 141408000$$

- ومن ثم نكتب المعادلة: $\frac{N_u'}{\Omega}e = \frac{M_u}{\Omega}$

حيث $e = 300mm$ ، لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y ، وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$y \approx 190.7\,mm$$

$$f_s' = 630\left(\frac{y - 0.85d'}{y}\right) = 630\times\left(\frac{190.7 - 0.85\times 50}{190.7}\right)$$
$$= 489.6 > 240\,MPa \quad O.K.$$

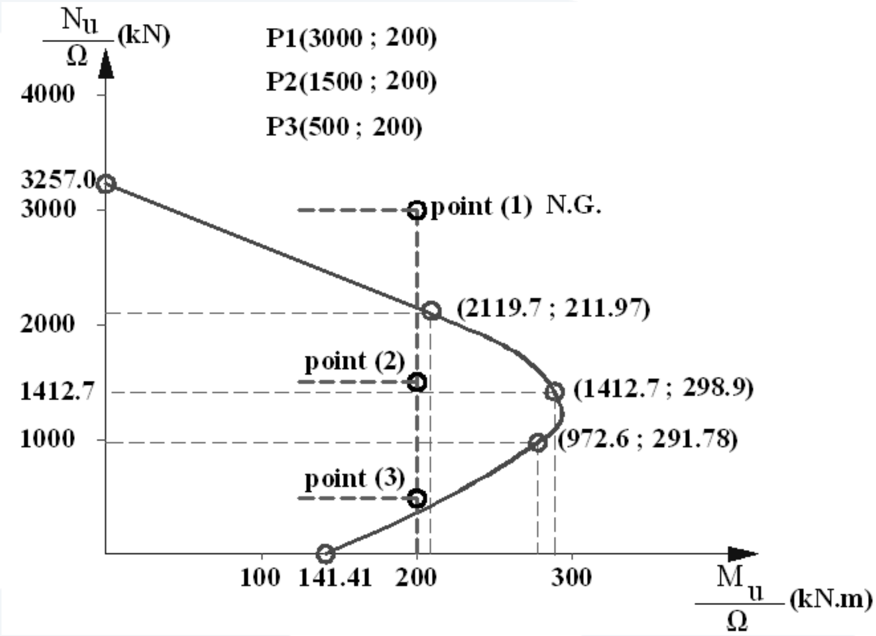
وبعد التعويض، نحصل:

$$\frac{N_u'}{\Omega} = 5100y = 5100\times 190.7 = 972.6kN$$
$$\frac{M_u}{\Omega} = \frac{N_u'}{\Omega}e = 972.6\times 0.3 = 291.78kN.m$$

بالتالي: $\left(\frac{N_u'}{\Omega}, \frac{M_u}{\Omega}\right) : \left(\frac{972.6}{\Omega}kN, \frac{291.78}{\Omega}kN.m\right) \Rightarrow e = \frac{M_u}{N_u'} = 300mm$

6- رسم مخطط الترابط وإجراء التحقيق (التقويم) للحالات المفروضة في المسألة:

نستنتج أن المقطع قادر لتحمل الحالتين الثانية والثالثة، وغير محقق للحالة الأولى.

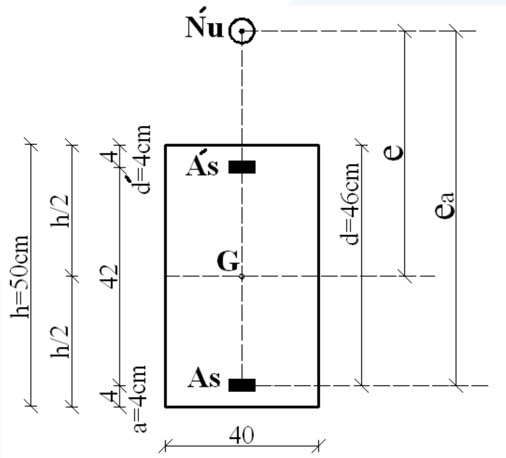


مخطط الترابط الخاص بالمقطع المدروس

$$f_y = 240MPa \ - \ f'_c = 20MPa \ - \ A_s = A'_s = 3\phi 25mm \ - \ b \times h = 30 \times 50cm$$

التطبيق /3/ :

لدينا مقطع بيتوني $b \times h = 40 \times 50cm$ ، خاضع لحمولات ناظمية إضافية (استثمارية) تساوي $P = 150kN$ ، وأخرى دائمة مقدارها $G = 200kN$ ، وأيضاً لعزوم انعطاف استثمارية ناجمة عن هذه الحمولات: $M_G = 80kN.m$ و $M_P = 50kN.m$.



بفرض أن المقطع مسلح بشكل متناظر

$A_s = A'_s$ ،

كما هو مبين في الشكل المرفق،

وإن مقاومات المواد:

$$f_y = 400MPa \, ; \, f'_c = 20MPa$$

يطلب حساب تسليحه.

الحل:

1- تحديد القوى الداخلية الحدية وحساب اللامركزية:

$$N'_u = 1.4 \times 200 + 1.7 \times 150 = 535kN$$

$$M_u = 1.4 \times 80 + 1.7 \times 50 = 197kN.m$$

$$e = \frac{M_u}{N'_u} = \frac{197}{535} = 368.42 \approx 370mm$$

يلاحظ أن $e = 370mm > \frac{h}{2} = \frac{500}{2} = 250mm$ ، بالتالي تكون اللامركزية كبيرة وأن الشد هو المسيطر.

2- حساب عامل تخفيض المقاومة Ω:

$$0,9 \geq \Omega = 0.9 - 0.5\left(\frac{N_u}{N_c}\right) \geq 0,65$$

$$N'_u = 535000N$$

$$N_c = 0.85 f'_c A'_c = 0.85 \times 20 \times 400 \times 500 = 3400000$$

$$\Rightarrow \Omega = 0.9 - 0.5\left(\frac{535000}{3400000}\right) = 0.821$$

3- الحالة التوازنية:

$$\frac{x_b}{d} = \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_y + \varepsilon'_c}$$

$$E_s = 210000MPa \Rightarrow$$

$$\frac{x_b}{d} = \frac{0.003}{f_y / E_s + 0.003} = \frac{630}{f_y + 630}$$

$$\Rightarrow x_b = \frac{630}{f_y + 630} d = \frac{630 \times 450}{400 + 630} = 275.24mm$$

$$\therefore y_b = 0.85 x_b = 0.85 \times 275.24 \approx 234mm$$

$$f'_s = 630\left(\frac{y - 0.85d'}{y}\right) = 630 \times \left(\frac{234 - 0.85 \times 40}{234}\right) = 538.5 > 400MPa \quad O.K.$$

4- حساب التسليح:

- بافتراض: $f_s = f'_s = f_y = 400MPa$
- من معادلة توازن القوى:

$$\frac{N'_u}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y + A'_s\, f'_s - A_s\, f_s = 0.85 f'_c b\, y \Rightarrow$$

$$\frac{535000}{0.821} = 0.85 \times 20 \times 400 \times y \Rightarrow y = 95.8mm < y_b = 234mm$$

نتحقق من الإجهادات f'_s :

$$f'_s = 630\left(\frac{y - 0.85d'}{y}\right) = 630 \times \left(\frac{95.8 - 0.85 \times 40}{95.8}\right) \approx 406 > 400MPa \quad O.K.$$

- لحساب التسليح، نأخذ معادلة العزوم بالنسبة لمركز ثقل التسليح المشدود:

$$\frac{N'_u e_a}{\Omega} = 0.85 f'_c b\, y\left(d - \frac{y}{2}\right) + A'_s\, f_y (d - d')$$

$$e_a = e + \frac{h}{2} - a = 370 + \frac{500}{2} - 40 = 580mm$$

$$\frac{535000 \times 580}{0.821} = 0.85 \times 20 \times 400 \times 95.8\left(460 - \frac{95.8}{2}\right) + A'_s \times 400(460 - 40)$$

$$\Rightarrow A'_s = 652mm^2$$

بالتالي، يكون التسليح المقاوم: $A_s = A'_s = 652\, mm^2$