جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 7

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

الفصل الثالث: التوابع لعدة متحولات

Functions of Several Variables

١. مدخل إلى التوابع متعددة المتحولات Introduction to Functions of Several Variables

٢. النهايات والاستمرارية Limits and Continuity

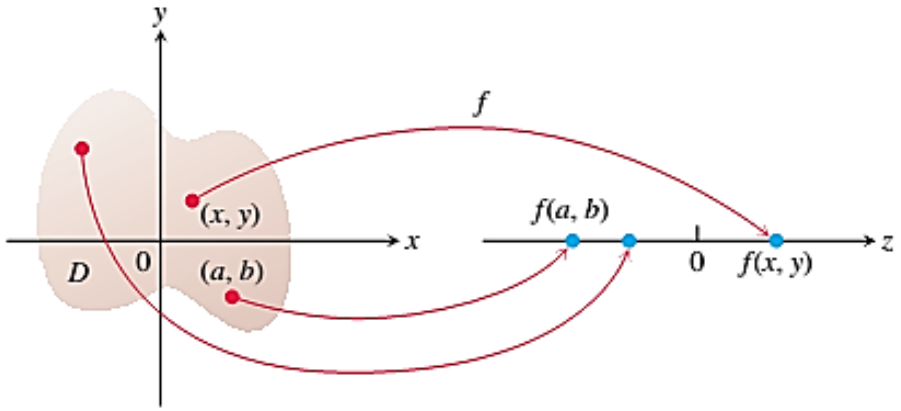
٣. المشتقات الجزئية Partial Derivatives

٤. القيم القصوى لتابع بمتحولين Extrema of Functions of Two Variables

التابع لمتحولين

تعريف: يقال عن f أنه تابع لمتحولين إذا كان يربط كل ثنائية مرتبة $(x\ ,y)$ من الأعداد الحقيقية من مجموعة ما D بعدد حقيقي وحيد، يكتب بالشكل $f\ (x\ ,y)$، تدعى D مجموعة تعريف التابع، أما المستقر الفعلي:

$$R(f\ )=\{f\ (x\ ,y\ )|(x\ ,y\ )\in D\}$$



ملاحظة: إن مجموعة تعريف التابع f هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ ، بينما مستقره الفعلي فهو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

مثال: أوجد مجموعة تعريف كل من التابعين الآتيين وارسمها:

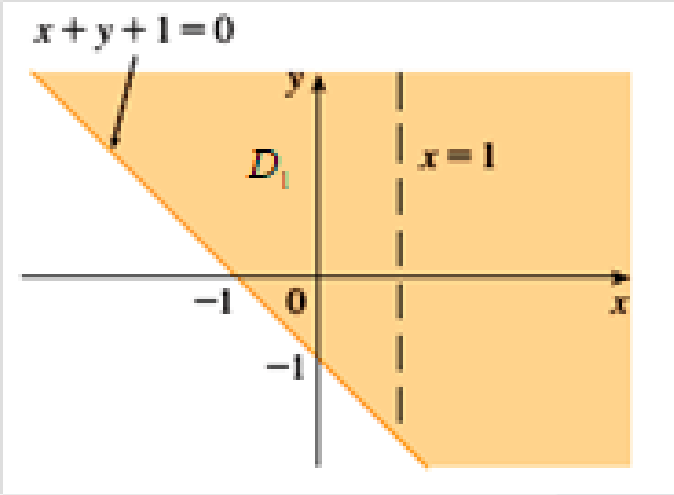
1) $f_1(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ 2) $f_2(x,y)=x\ln\left(y^2-x\right)$

الحل:

1) $f_1(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

مجموعة تعريفه هي:

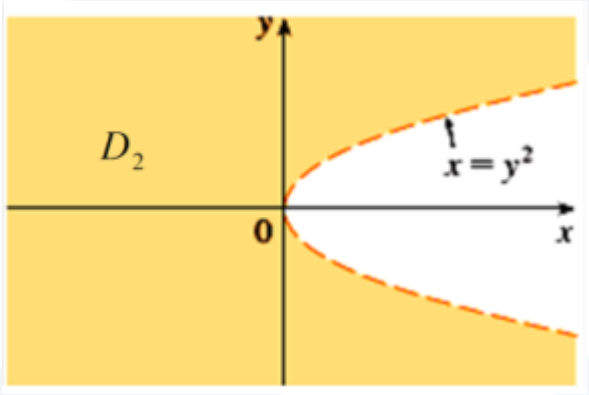
$$D_1=\{(x,y)|x+y+1\geq 0\ ,\ x\neq 1\}$$



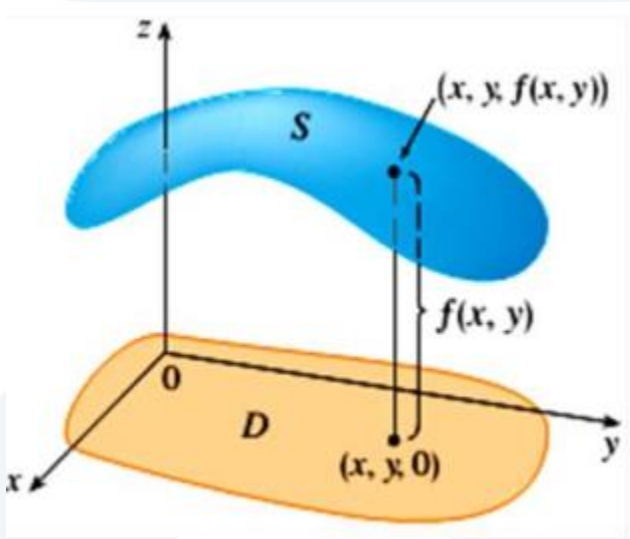
2) $f_2(x,y)=x\ln(y^2-x)$

مجموعة تعريفه هي:

$$D_2=\{(x,y)|y^2-x>0\}=\{(x,y)|y^2>x\}$$



بيان التابع لمتحولين: بفرض أن التابع f تابع لمتحولين x, y، ومجموعة تعريفه D، عندئذ فإن بيان التابع f هو المحل الهندسي لكل النقاط $(x, y, f(x, y))$ من $\mathbb{R}^3$



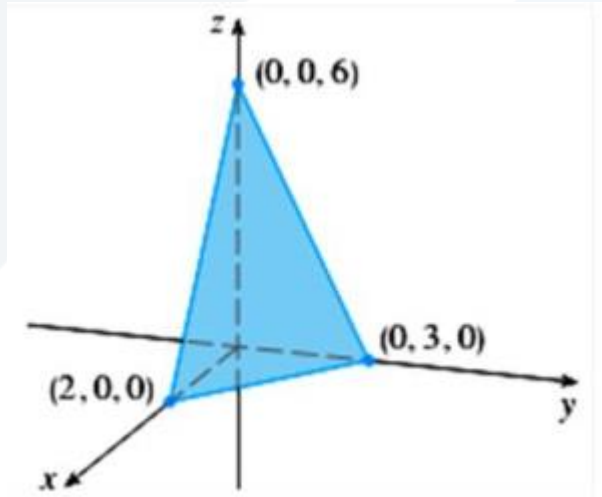
مثال: ارسم بيان التابع الآتي: $f(x,y)=6-3x-2y$

الحل:

$$z=f(x,y)=6-3x-2y \longrightarrow 3x+2y+z=6$$

وهي معادلة مستوي في الفراغ، ولرسم المستوي نوجد نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية ونصل بينها.

$$y=z=0 \Rightarrow x=2$$
$$x=z=0 \Rightarrow y=3$$
$$x=y=0 \Rightarrow z=6$$

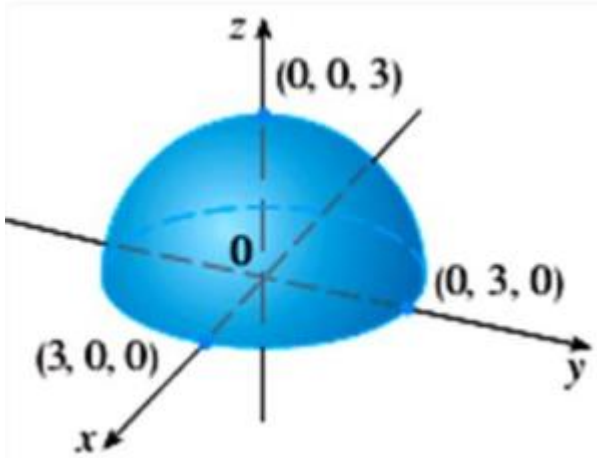


مثال: ارسم بيان التابع الآتي: $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

الحل:

$$z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \longrightarrow x^2+y^2+z^2=9$$

وهي معادلة كرة في الفراغ مركزها $C(0,0,0)$ ونصف قطرها $R=3$، وبما أن $z\geq 0$، فيكون بيان التابع المعطى عبارة عن نصف الكرة العلوي



ملاحظة: يمكن بطريقة مشابهة لتعريف التابع لمتحولين، تعريف التابع لثلاثة متحولات أو لـ n متحول.

تعريف: تدعى مجموعة النقاط (x, y) من المستوي، حيث يكون للتابع $f(x, y)$ قيمة ثابتة $f(x, y) = c$ بمنحني السوية.

مثال: ارسم بيان التابع: $f(x,y)=100-x^2-y^2$ وحدد منحنيات السوية $f(x,y)=0$ و $f(x,y)=51$ و $f(x,y)=75$ في مجموعة تعريف التابع في المستوي.

الحل:

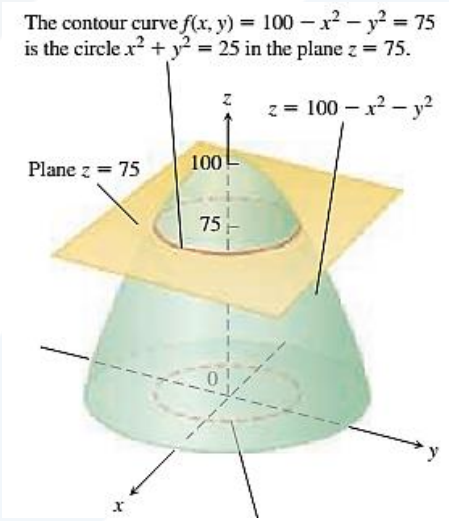
مجموعة تعريف التابع هي كامل المستوي xy

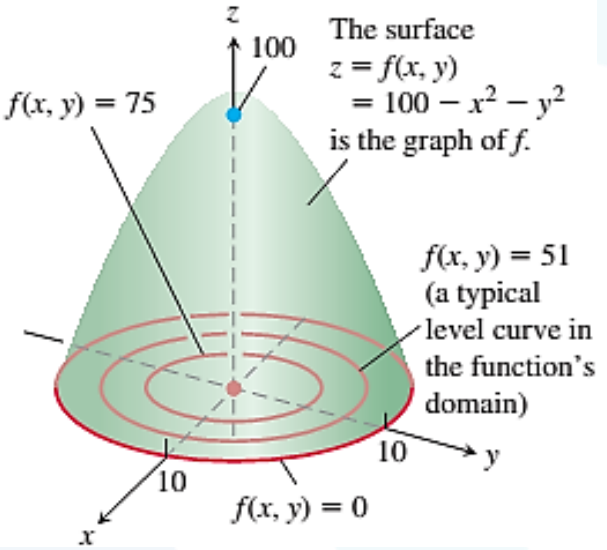
بيان هذا التابع هو مجسم القطع المكافئ $z=100-x^2-y^2$

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=0, \quad \text{or} \quad x^2+y^2=100,$$

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=51, \quad \text{or} \quad x^2+y^2=49$$

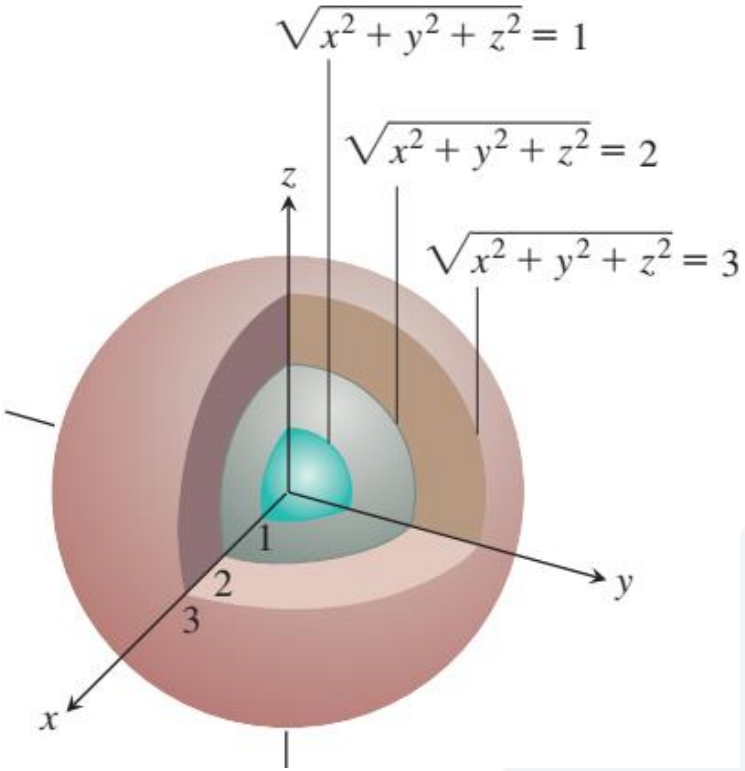
$$f(x,y)=100-x^2-y^2=75, \quad \text{or} \quad x^2+y^2=25$$





تعريف: تدعى مجموعة النقاط $(x\ ,y\ ,z)$ من الفراغ، حيث يكون للتابع $f\ (x\ ,y\ ,z\ )$ قيمة ثابتة $f\ (x\ ,y\ ,z\ )=c$ بسطح السوية.

مثال:



$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

تمارين

1 أوجد قيم التابع التالي في النقاط الموافقة

1. $f(x, y) = x^2 + xy^3$

a. $f(0, 0)$ **b.** $f(-1, 1)$

c. $f(2, 3)$ **d.** $f(-3, -2)$

2. $f(x, y) = \sin(xy)$

a. $f\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $f\left(-3, \frac{\pi}{12}\right)$

c. $f\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$ **d.** $f\left(-\frac{\pi}{2}, -7\right)$

الحل:

1. (a) $f(0, 0) = 0$ (b) $f(-1, 1) = 0$

(d) $f(-3, -2) = 33$

2. (a) $f\left(2, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $f\left(-3, \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $f\left(-\frac{\pi}{2}, -7\right) = -1$

تمارين

2 أوجد وارسم مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية:

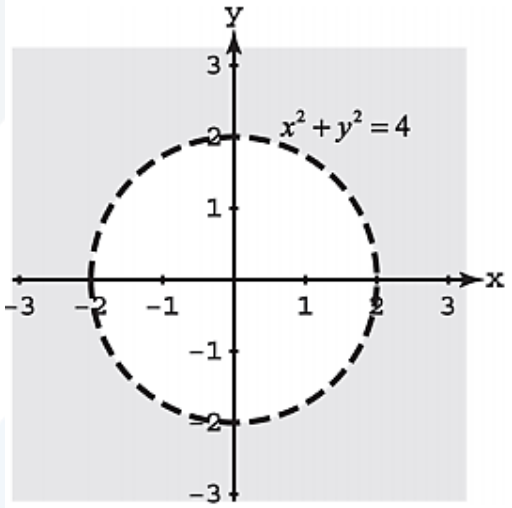
$$f(x,y)=\frac{1}{\ln(4-x^2-y^2)} \qquad f(x,y)=\ln(x^2+y^2-4) \qquad f(x,y)=\sqrt{y-x-2}$$

الحل:

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2-4)$$

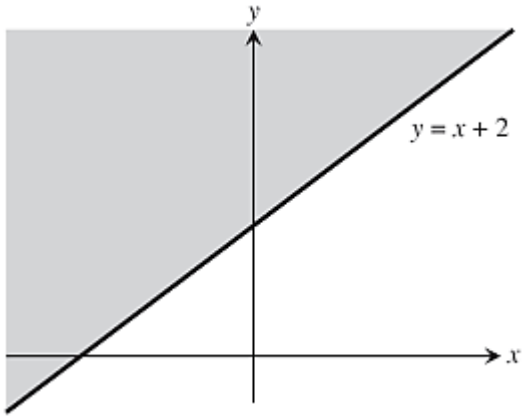
مجموعة التعريف هي مجموعة النقاط (x,y) خارج الدائرة

$$x^2+y^2=4$$



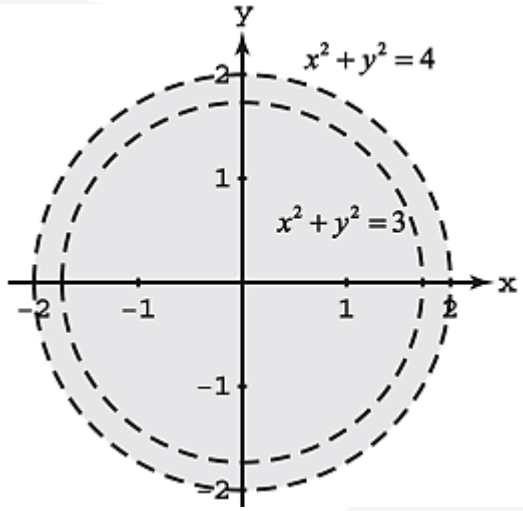
$$f(x,y)=\sqrt{y-x-2}$$

مجموعة التعريف هي مجموعة النقاط (x,y) على وفوق المستقيم $y=x+2$



تمارين

$$f(x,y)=\frac{1}{\ln(4-x^2-y^2)}$$



مجموعة التعريف هي مجموعة النقاط (x,y) التي تقع الدائرة $x^2+y^2=4$ والتي تحقق $x^2+y^2\neq 3$

3 أوجد معادلة منحني السوية للتابع الآتي المار بالنقطة المعطاة

$$f(x,y)=16-x^2-y^2,\quad (2\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$f(x,y)=\frac{2y-x}{x+y+1},\quad (-1,1)$$

الحل:

$$f(x,y)=16-x^2-y^2,\quad (2\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$(2\sqrt{2},\sqrt{2})\Rightarrow z=16-(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2=6 \longrightarrow 6=16-x^2-y^2 \longrightarrow x^2+y^2=10$$

تمارين

$$f(x,y)=\frac{2y-x}{x+y+1},\quad (-1,1)$$

$$(-1,1)\Rightarrow z=\frac{2(1)-(-1)}{(-1)+1+1}=3 \longrightarrow 3=\frac{2y-x}{x+y+1} \longrightarrow y=-4x-3$$

4 أوجد معادلة سطح السوية للتابع الآتي المار بالنقطة المعطاة

$$f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z,\quad (3,-1,1) \qquad f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y+z^2\right),\quad (-1,2,1)$$

الحل:

$$f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z,\quad (3,-1,1)$$

$$w=\sqrt{x-y}-\ln z \longrightarrow (3,-1,1)\Rightarrow w=\sqrt{3-(-1)}-\ln 1=2 \longrightarrow \sqrt{x-y}-\ln z=2$$

$$f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y+z^2\right),\quad (-1,2,1)$$

$$w=\ln\left(x^2+y+z^2\right) \longrightarrow (-1,2,1)\Rightarrow w=\ln(1+2+1)=\ln 4 \longrightarrow \ln 4=\ln\left(x^2+y+z^2\right)$$

$$\longrightarrow x^2+y+z^2=4$$

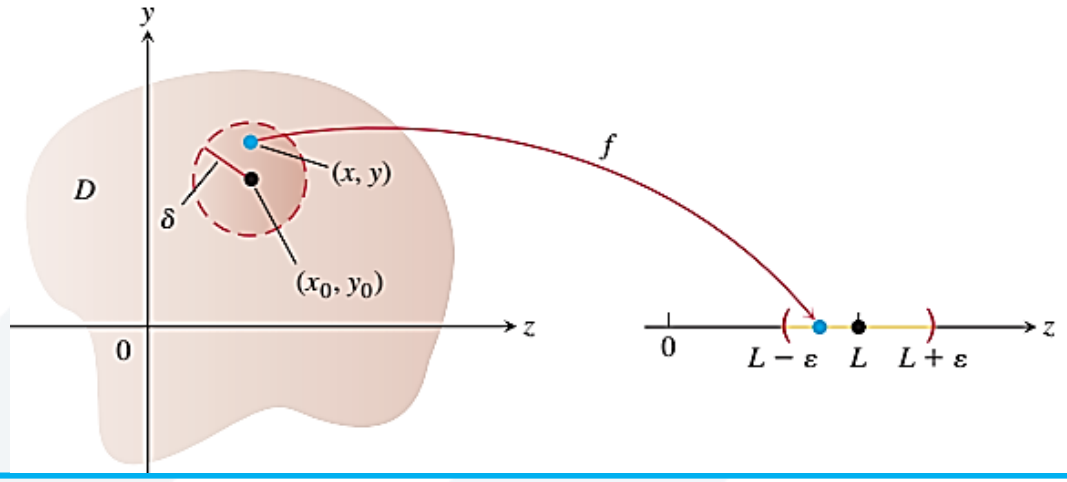
تعريف: ليكن f تابع لمتحولين، حيث أن مجموعة تعريفه D ولتكن (a,b) نقطة منها، عندئذ يقال

أن L هي نهاية $f(x,y)$ عندما تسعى النقطة (x,y) إلى النقطة (a,b)، ونكتب:

$$L=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

إذا وجد من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon>0$، عدد حقيقي $\delta>0$، يحقق أن:

$$\forall (x,y)\in D \ \& \ 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$



خواص النهايات

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

1. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$$ من أجل k عدد حقيقي

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)\cdot g(x,y)) = L\cdot M$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}, \qquad M \neq 0$$

6. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [\, f(x,y)\,]^n = L^n$$ من أجل n عدد صحيح موجب

7. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$$

من أجل n عدد صحيح موجب،
وإذا كان n عدد زوجي،
فنفرض أن $L > 0$

خواص النهايات

مثال: احسب النهايات الآتية

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0$$

معيار لعدم وجود النهاية : إذا كانت L_1 نهاية $f(x,y)$ عندما تسعى (x,y) إلى (a,b) وفق المسار C_1، وكانت L_2 نهاية $f(x,y)$ عندما تسعى (x,y) إلى (a,b) وفق المسار C_2، وكان $L_1 \neq L_2$، عندئذ فإن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة.

مثال: بيّن أن النهاية الآتية غير موجودة:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

الحل:

نجعل في البداية (x,y) تسعى نحو $(0,0)$ عبر المحور $x-$ أي أن $y=0$، بالتالي:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y=0\\x\to0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

لنجعل الآن (x,y) تسعى نحو $(0,0)$ عبر المحور $-y$ أي أن $x=0$، بالتالي:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

النهاية غير موجودة

الاستمرار

تعريف يقال عن تابع $f(x,y)$ إنه مستمر في النقطة (x_0,y_0) إذا كان:

1. f معرف عندها،
2. النهاية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ويقال عنه إنه مستمر إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفه.

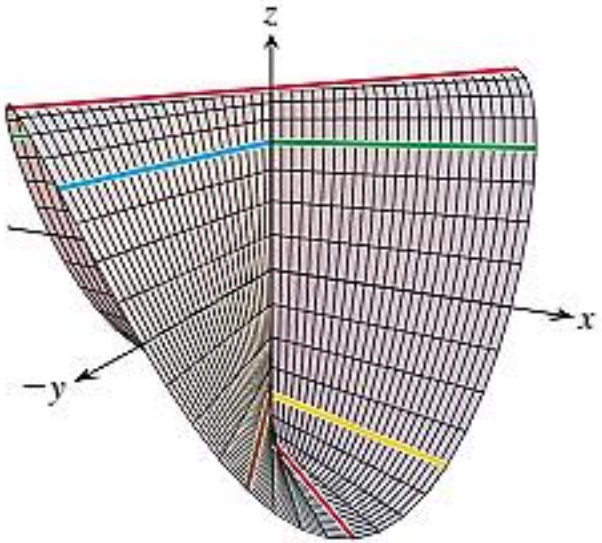
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

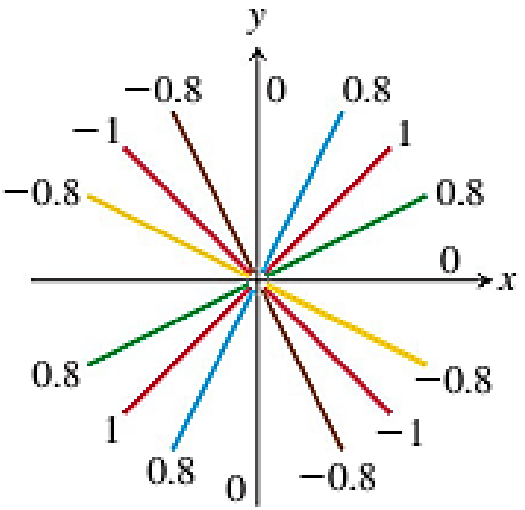
مثال: بيّن أن التابع الآتي مستمر في كل نقطة باستثناء في المبدأ $(0,0)$

الحل:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{along } y=mx}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\Big|_{y=mx}\right]=\frac{2m}{1+m^2}.$$

نلاحظ أنه بتغيير قيمة m تتغير قيمة النهاية وبالتالي النهاية غير موجودة، الأمر الذي يعني أن التابع غير مستمر عند النقطة $(0,0)$





تمارين

1 أحسب النهايات الآتية

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y + 1}{y - \sin x}$$

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} \qquad \lim_{\substack{(x,\,y)\to(2,-4)\\ x\neq -4,\ x\neq x^2}} \frac{y + 4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x} \qquad \lim_{\substack{(x,\,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$$

الحل:

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{3(0)^2 - 0^2 + 5}{0^2 + 0^2 + 2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = e^{0-\ln 2} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,\,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} \frac{\cos y + 1}{y - \sin x} = \frac{(\cos 0) + 1}{0 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+1}{-1} = -2$$

تمارين

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = (1-1) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x-y\neq 1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x-y\neq 1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+1}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ x\neq -4,\ x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x(x-1)(y+4)} = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ x\neq x^2}} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$$

تمارين

2 حدد مجموعة النقاط التي يكون عندها التابع المعطى مستمراً

$$f(x,y)=\sin(x+y) \qquad f(x,y)=\frac{x+y}{x-y} \qquad g(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$$

$$f(x,y,z)=\ln xyz \qquad h(x,y,z)=\frac{1}{4-\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}} \qquad h(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$$

الحل:

$$f(x,y)=\sin(x+y)$$

كامل المستوي

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$$

كامل المستوي باستثناء نقاط المستقيم $x=y$

$$g(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$$

كامل المستوي

$$f(x,y,z)=\ln xyz$$

كامل الفراغ التي تحقق $xyz>0$

$$h(x,y,z)=\frac{1}{4-\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}$$

كامل نقاط الفراغ التي تحقق $x^2+y^2+z^2\geq 9$

باستثناء النقاط التي تحقق $x^2+y^2+z^2=25$

$$h(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$$

كامل نقاط الفراغ التي تحقق $x^2+y^2+z^2\leq 4$

تمارين

3 بين أن النهايات الآتية غير موجودة

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$$

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+\left(x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \text{along } y=x^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0^2} = 1 \quad \text{along } y=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{x(kx)}{|x(kx)|} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{|kx^2|} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{|k|} \quad \text{along } y=kx,\ k\neq 0$$

إذا كانت $k>0$ فقيمة النهاية تساوي 1، وإذا كانت $k<0$ فقيمة النهاية -1.

تمارين

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ \text{along } x=1}} \frac{xy^2-1}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y-1} = \lim_{y\to 1}(y+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ \text{along } y=x}} \frac{xy^2-1}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y-1} = \lim_{y\to 1}\left(y^2+y+1\right) = 3$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ \text{along } y=-1}} \frac{xy+1}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ y=-x^2}} \frac{xy+1}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^3+1}{x^2-x^4} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2(1+x)} = \frac{3}{2}$$