تحليل رياضي 2

المحاضرة 8

ميكاترونيكس

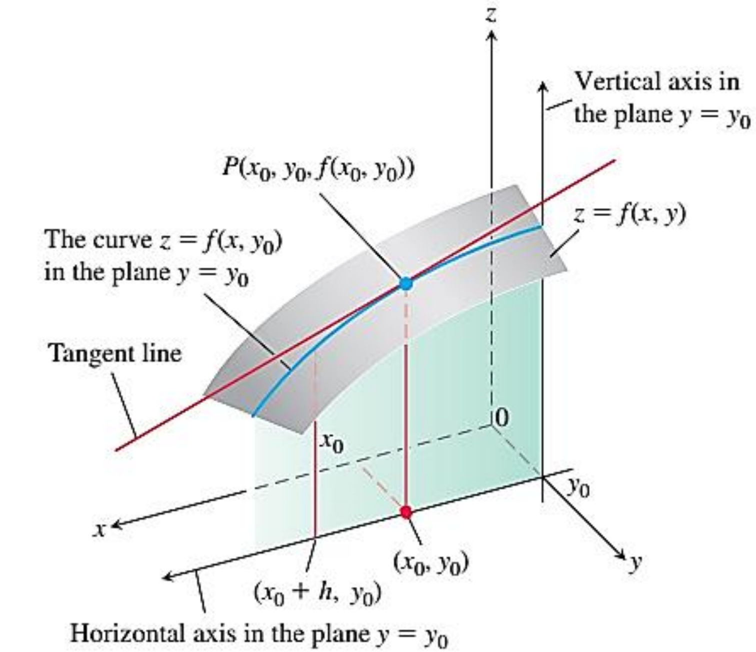
أ.د. سامي انجرو

الاشتقاق الجزئي

تعريف يعطى المشتق الجزئي للتابع $f(x,y)$ بالنسبة للمتحول x في النقطة (x_0,y_0) بالعلاقة

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

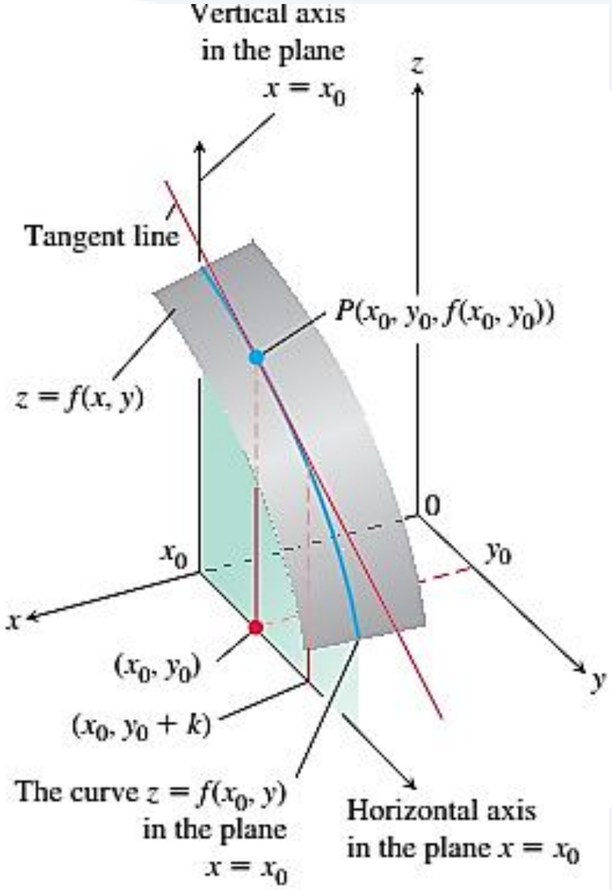


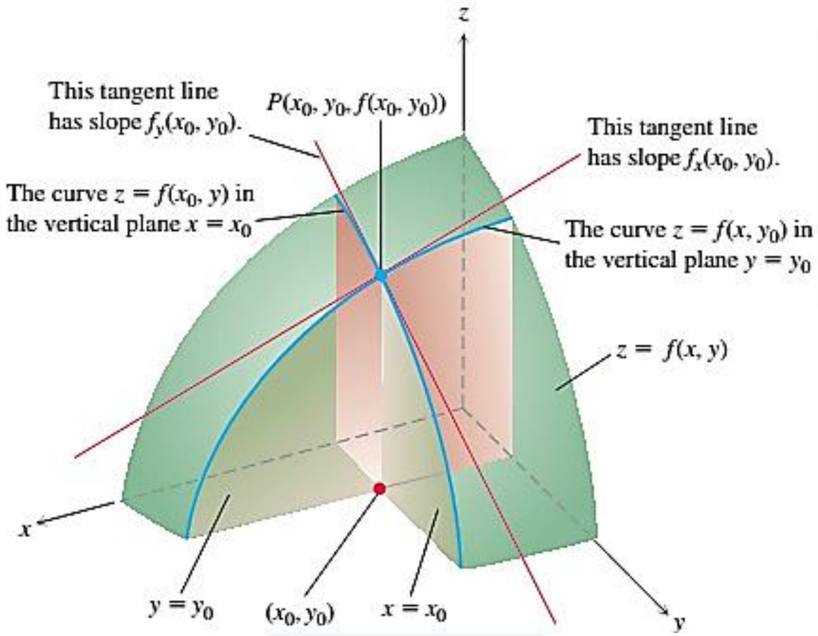
الاشتقاق الجزئي من المرتبة الأولى

تعريف يعطى المشتق الجزئي للتابع $f(x,y)$ بالنسبة للمتحول y في النقطة (x_0,y_0) بالعلاقة

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d}{dy} f(x_0,y)\right|_{y=y_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h},$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.





مثال أوجد قيمة كل من $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند النقطة $(4,-5)$ للتابع $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)} = 2(4) + 3(-5) = -7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,-5)} = 3(4) + 1 = 13$$

مثال أوجد $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ للتابع $f(x, y) = y \sin xy$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy.$$

مثال أوجد f_x و f_y للتابع $f(x, y) = \dfrac{2y}{y + \cos x}$

الحل

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{dy}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y + \cos x)^2}.$$

مثال أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ للمعادلة $yz - \ln z = x + y$

مع العلم أن z تابع للمتحولين المستقلين x و y وأن المشتقات الجزئية موجودة.

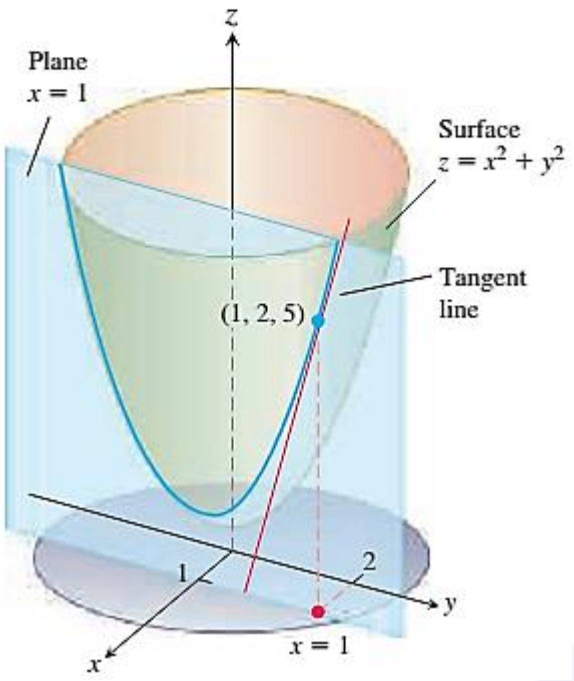
الحل

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}$$

مثال يقطع المستوي $x = 1$ سطح مجسم القطع المكافئ $z = x^2 + y^2$ بقطع مكافئ. أوجد ميل المماس للقطع المكافئ الناتج في النقطة $(1, 2, 5)$

الحل



$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)} = \left.2y\right|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$