2 Stress

2.1 Stress Vector and Stress Tensor

2.2 Plane Stress

2.2.1 Coordinate Transformation

2.2.2 Principal Stresses

2.2.3 Mohr's Circle

2.2.4 The Thin-Walled Pressure Vessel

2.3 Equilibrium Conditions

2.4 Supplementary Examples

2.5 Summary

2 الإجهاد

2.1 شعاع الإجهاد وموترة الإجهاد

2.2 الإجهاد المستوي

2.2.1 تحويل الإحداثيات

2.2.2 الإجهادات الرئيسية

2.2.3 دائرة مور

2.2.4 أوعية الضغط رقيقة الجدران

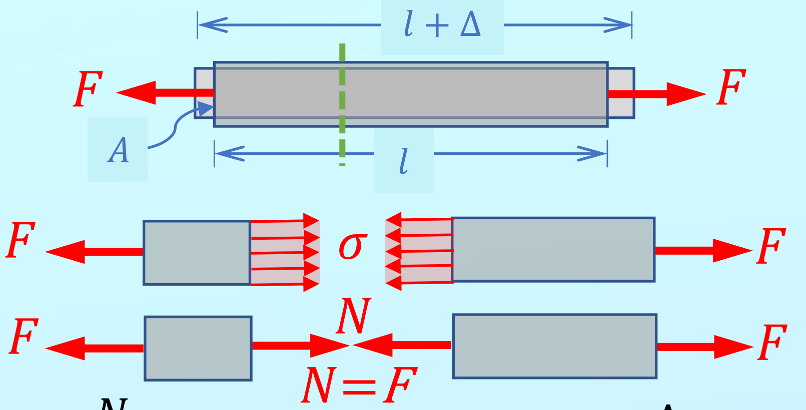
2.3 شروط التوازن المحلية

2.4 أمثلة إضافية

2.5 ملخص البحث

ملخص العناصر المحورية والمحملة (المجهدة) محورياً

End Loaded uniform bar:

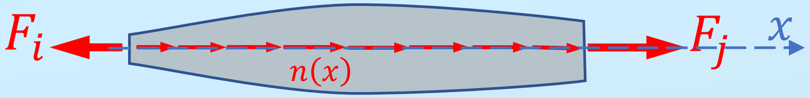


$$\sigma=\frac{N}{A}\qquad \sigma=E\varepsilon\qquad \varepsilon=\frac{\Delta}{l}$$

$$N=\frac{EA}{l}\Delta\quad\Leftrightarrow\quad \Delta=\frac{L}{EA}N$$

$$\Delta_{ij}=(u_j-u_i)\cos\theta_{ij}+(v_j-v_i)\sin\theta_{ij}$$

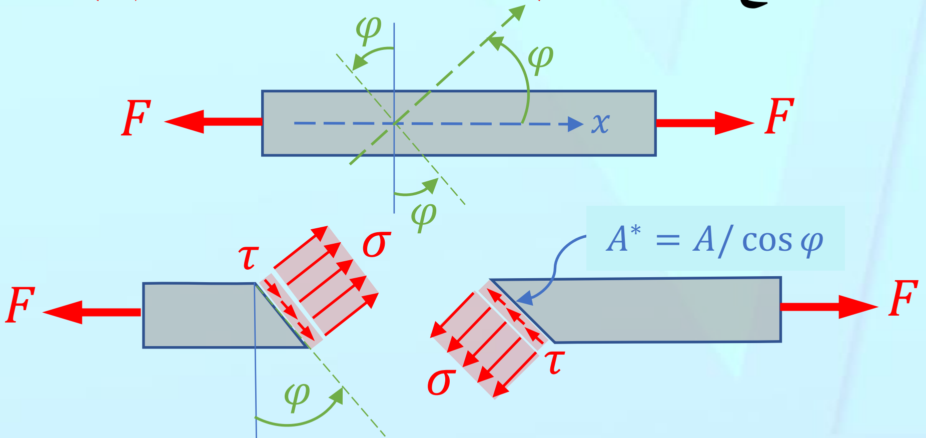
General Case:



$$\boxed{F_j-F_i=\int_0^l n(x)dx}\qquad \boxed{N(x)=F_i+\int_0^x n(\xi)d\xi}$$

$$\boxed{\sigma(x)=\frac{N(x)}{A(x)}}\qquad \boxed{\sigma(x)=E\varepsilon(x)}\qquad \boxed{\Delta=\int_0^l \varepsilon(x)dx}$$

الإجهادات على المقطع المائل (تمهيد للحالة العامة للإجهادات)



$$\begin{cases}\rightarrow: & \sigma A^*\cos\varphi+\tau A^*\sin\varphi-F=0\\ \uparrow: & \sigma A^*\sin\varphi-\tau A^*\cos\varphi=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma+\tau\tan\varphi=\frac{F}{A}\\ \sigma\tan\varphi-\tau=0\end{cases}$$

Solving gives: $\sigma=\frac{1}{1+\tan^2\varphi}\frac{F}{A}\qquad \tau=\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\frac{F}{A}$

Making $\sigma_0=F/A$ (normal stress in a normal section), and using:

$$\frac{1}{1+\tan^2\varphi}=\cos^2\varphi=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\varphi),\ \frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\sin\varphi\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{2}(1+\cos 2\varphi),\qquad \tau=\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi$$

يتغير الإجهاد مع اتجاه القطع. فإذا اعتبرنا σ_0 معلوماً، يمكننا حساب σ & τ ، أياً كانت زاوية ميل القطع φ . القيمة العظمى للإجهاد الناظمي توافق $\varphi=0$، وتكون: $\sigma_{max}=\sigma_0$، وتصحبها قيمة معدومة $\tau=0$. والقيمة العظمى للإجهاد المماسي (القص) توافق $\varphi=\frac{\pi}{4}$، ويكون عندها $\tau_{max}=\sigma_0/2$، و $\sigma=\sigma_0/2$.

2.1 Stress Vector and Stress Tensor

درسنا الإجهاد في القضبان فقط. وعلينا تعميم دراستها في العناصر الأخرى. لذلك نأخذ جسماً ثلاثي الأبعاد ومحمل كما في الشكل a.
وننظر في مقطع مستوي افتراضي محدد بالناظم $\vec{n}$ ، كما في الشكل b.

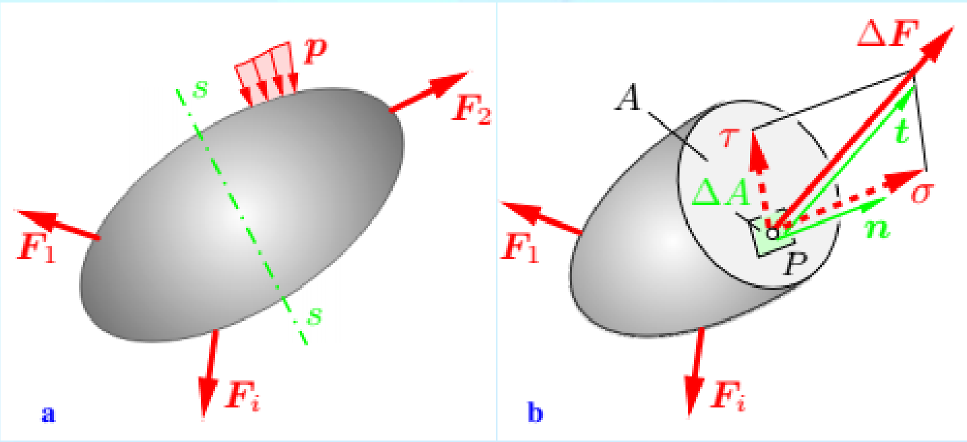
So far, stresses have been calculated only in bars.

To determine stresses also in other structures we must generalize the concept of stress.

Consider a body loaded by single forces F_i & area forces p (Fig.a).

The external load generates internal forces.

In an imaginary cut *s-s* through the body the internal area forces (stresses) are distributed over the entire area A.



In the bar these stresses are constant over the cross section they now generally vary throughout the section.

Then the stress must be defined at the arbitrary point P of the cross section (Fig.b). The area element ΔA containing P is subjected to the resultant internal force $\Delta\vec{F}$ (note: according to the law of action and reaction the same force acts in the opposite cross section with opposite direction).

The average stress in the area element is defined as the ratio $\Delta\vec{F}/\Delta A$ (force per area).

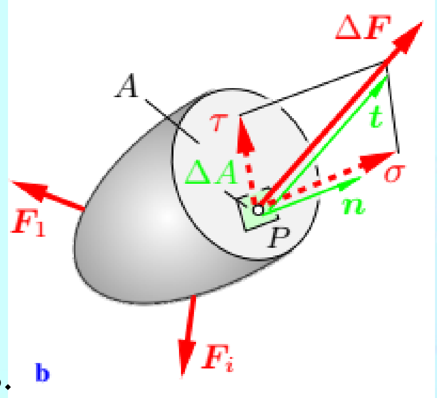
Stress vector at point P of the section s-s is defined by: $\vec{t} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$, decomposed into

- إجهاد ناظمي — *normal stress* σ
- إجهاد مماسي (قص) — *shear stress* τ

In general, the stress vector $\vec{t}$ depends on the location of point P in the section area A.

The stresses also depend on the orientation of the section which is defined normal vector $\vec{n}$.

It can be shown that the stress state at point P is uniquely determined by three stress vectors for three sections through P, perpendicular to each other.



b

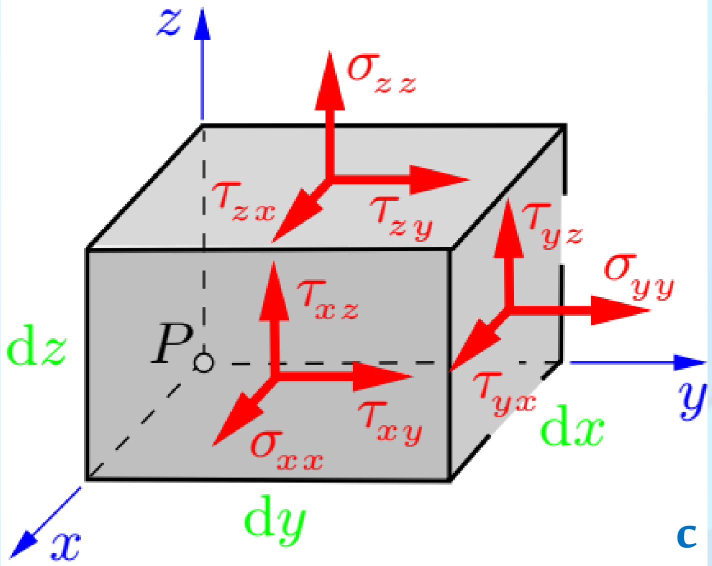
Useful to choose the directions of a Cartesian coordinate system for the respective orientations.

The three sections can most easily be visualized if we imagine them to be the surfaces of a volume element with edge lengths dx, dy and dz at point P (Fig.c).

A stress vector acts on each of its 6 surfaces. It can be decomposed into its components perpendicular to the section (normal stress) and tangential to the section (shear stress).

The shear stress subsequently can be further decomposed into its components according to the coordinate directions.

To characterize the components double subscripts are used: the first subscript indicates the orientation of the section by the direction of its normal vector whereas the second subscript indicates the direction of the stress component.



c

For example, τ_{yx} is a shear stress acting in a section whose normal points in y-direction; the stress itself points in x-direction.

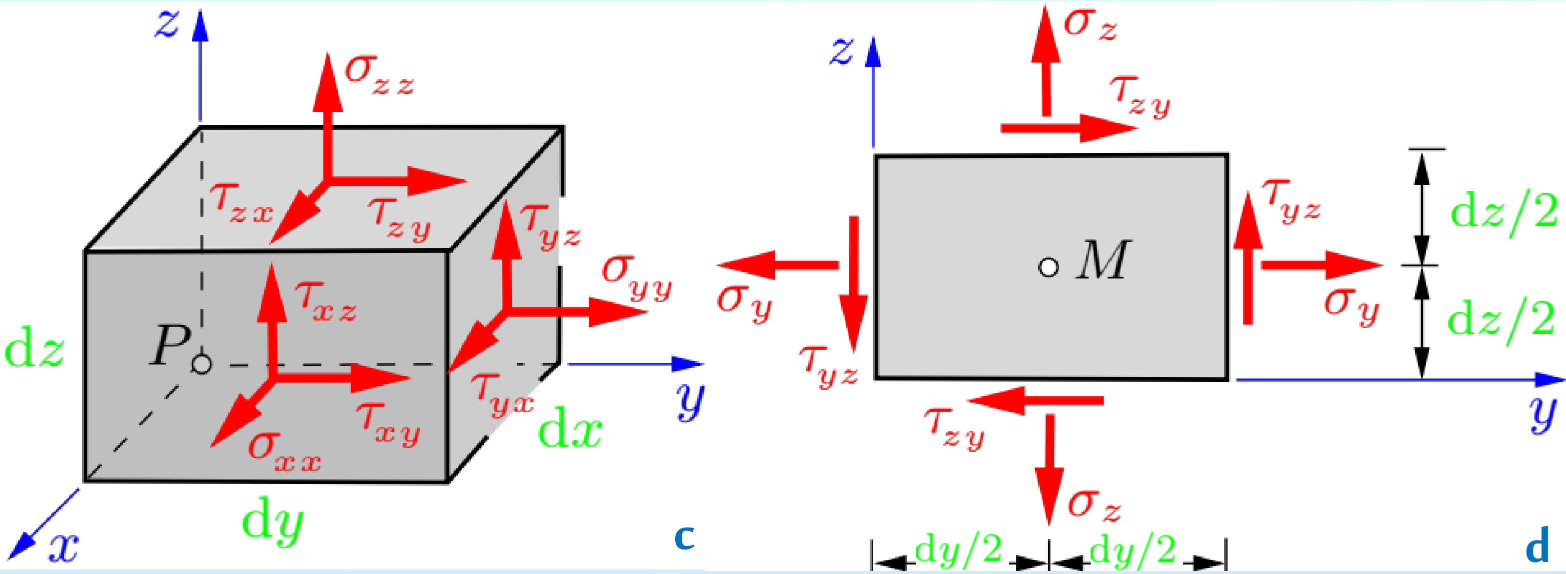
The notation can be simplified for the normal stresses $\sigma_{xx} = \sigma_x, \quad \sigma_{yy} = \sigma_y, \quad \sigma_{zz} = \sigma_z$

Using the introduced notation, the stress vectors in the sections with the normal vectors pointing in x, y , z direction, can be written as: $\vec{t}_x = \sigma_x\vec{\imath} + \tau_{xy}\vec{\jmath} + \tau_{xz}\vec{k}$ $\quad \vec{t}_y = \tau_{yx}\vec{\imath} + \sigma_y\vec{\jmath} + \tau_{yz}\vec{k}$ $\quad \vec{t}_z = \tau_{zx}\vec{\imath} + \tau_{zy}\vec{\jmath} + \sigma_z\vec{k}$

Positive **stresses at a** ***positive*** **face point in** ***positive*** **directions of the coordinates.**

Positive **stresses at a** ***negative*** **face point in** ***negative*** **directions of the coordinates.**

Accordingly, positive (negative) normal stresses cause tension (compression) in the volume element.



By means of the decomposition of the three stress vectors into their components we have obtained three normal stresses ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) and six shear stresses ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$). So nine stress components.

But shear stresses are not independent. This can be shown by formulating the equilibrium condition for the moments about an axis parallel to the *x*-axis through the center of the volume element (Fig.**d**).

$$\overset{\curvearrowleft}{M}: 2\frac{dy}{2}\left(\tau_{yz}dxdy\right) - 2\frac{dz}{2}\left(\tau_{zy}dxdy\right) = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \text{similarly} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ and } \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Shear stresses with the same subscripts in two orthogonal sections are equal. *complementary shear stresses*

As a final result of: There exist only six independent stress components at any point of the three dimensional body.

The components of the three stress vectors can be arranged in a matrix:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

The main diagonal contains the normal stresses; the other elements are the *symmetric* shear stresses.

The quantity $\boldsymbol{\sigma}$ is called *stress tensor* (the concept *tensor* will be explained). The elements of $\boldsymbol{\sigma}$ are the components of the stress tensor. The *stress state* at a material point is uniquely defined by the stress vectors for three sections, orthogonal to each other, and consequently by the stress tensor.

تتحدد حالة الإجهاد في نقطة من جسم معرض لقوى خارجية، بمعرفة أشعة الإجهاد على ثلاثة مستويات (عادة موافقة لجملة الإحداثيات).
لكل من هذه الأشعة ثلاث مركبات: واحدة ناظمية واثنتان مماسيتان. وبالاعتماد على تناظر مركبات الإجهاد المماسية، يمكننا القول بأن حالة الإجهاد في هذه النقطة تحدد بمعرفة ست مركبات إجهاد (في الإحداثيات الديكارتية ثلاث مركبات إجهاد ناظمي: σ_x,σ_y & σ_z، وثلاث مركبات إجهاد مماسي (قص): $\tau_{xy} = \tau_{yx},\tau_{xz} = \tau_{zx}$ & $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. المركبات الست في جملة الإحداثيات تعبر عن موترة الإجهاد وحالته المستقلة عن الإحداثيات الاختيارية.

أما تحديد حالة الإجهاد في الجسم لتقييم قدرته على تحمل القوى الخارجية بأمان، فيتطلب تعيين هذه المركبات الست في كافة نقاط الجسم: أي تحديد تغيراتها من نقطة إلى أخرى باعتبارها ستة توابع لثلاثة متحولات هي احداثيات نقطة من نقاط الجسم.

يسعى ميكانيك المواد لتبسيط هذه المسألة الرياضية. وقد رأينا في الحالة العامة للقضبان: مركبة إجهاد واحدة تابعة لمتحول وحيد. كما رأينا في حالة أوعية الضغط رقيقة الجدران مركبتي إجهاد ناظمي ثابتتين. والآن سوف ندرس حالة الإجهاد المستوية: مركبتي إجهاد ناظمي ومركبة إجهاد مماسي، وهي متغيرة من نقطة إلى أخرى ومتغيرة مع اتجاه المقطع في النقطة الواحدة.