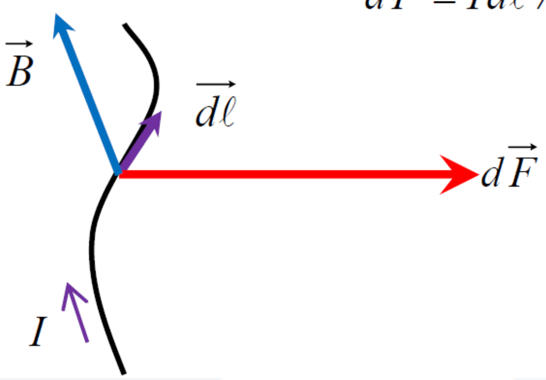
عمل قوة لابلاس

تذكير: إذا وُجدت دارة يعبرها تيار شدته I في منطقة يسودها حقل مغناطيسي $\vec{B}$ فإنّ أجزاء هذه الدارة ستخضع لقوى تُدعى بقوى لابلاس، فإذا كان $\vec{d\ell}$ عنصراً من الدارة فإنّ قوة لابلاس التي يخضع لها هذا العنصر تُعطى بالعلاقة:

$$d\vec{F} = I\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$



تنشأ قوّة لا بلاس على المستوى الميكروسكوبي، من تأثّر حوامل الشحنة المتحرّكة داخل الدارة بقوّة لورنتز. لنبيّن ذلك:

1. قوة لورنتز وقوة لابلاس

لنتأمل جزءاً من دارة معرفاً بالانتقال $d\mathbf{l}$ على هذه الدارة، بجوار نقطة منها، في هذه النقطة للدارة مقطع سطحه $\mathbf{S}$ ويعبر هذا المقطع تيار شدته I.

ينشأ التيار عن حركة الشحن الحرة ضمن الناقل،

ليكن n_i عدد الشحن الحرة في واحدة الحجم من النوع i، وليكن $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ شعاع السرعة المتوسطة للشحنة من النوع i و q_i قيمة هذه الشحنة.

قوة لورنتز المؤثرة في الشحنة q_i هي $\mathbf{f}_\mathrm{i} = q_i\mathbf{v}_\mathrm{i} \wedge \mathbf{B}$

والقوة المؤثرة في مجموع الشحن الموجودة ضمن جزء الدارة المعرف آنفاً هي:

$$d\mathbf{F} = \sum_i n_i \left(\mathbf{S}.d\mathbf{l}\right)\mathbf{f}_\mathrm{i} = \sum_i n_i \left(\mathbf{S}.d\mathbf{l}\right)\left(q_i\mathbf{v}_\mathrm{i} \wedge \mathbf{B}\right) = \left[\sum_i n_i \left(\mathbf{S}.d\mathbf{l}\right)\left(q_i\mathbf{v}_\mathrm{i}\right)\right] \wedge \mathbf{B}$$

ولكن القيمة المتوسطة لشعاع سرعة الشحنة $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ يوازي الانتقال $d\mathbf{l}$، إذن $\left(\mathbf{S}.d\mathbf{l}\right).\mathbf{v}_\mathrm{i} = \left(\mathbf{S}.\mathbf{v}_\mathrm{i}\right).d\mathbf{l}$ ومن ثمّ:

$$d\mathbf{F} = \left[\sum_i n_i q_i \left(\mathbf{S}.\mathbf{v}_\mathrm{i}\right) d\mathbf{l}\right] \wedge \mathbf{B} = \left[\left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_\mathrm{i}\right).\mathbf{S}\right] d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

يمثل المقدار $\left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_\mathrm{i}\right)$ شعاع كثافة التيار الحجمي $\mathbf{j}$، ويمثل الجداء $\left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_\mathrm{i}\right).\mathbf{S}$ شدّة التيار الذي يعبر الدارة أي:

$$I = \left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_\mathrm{i}\right).\mathbf{S}$$

ومن ثمّ:

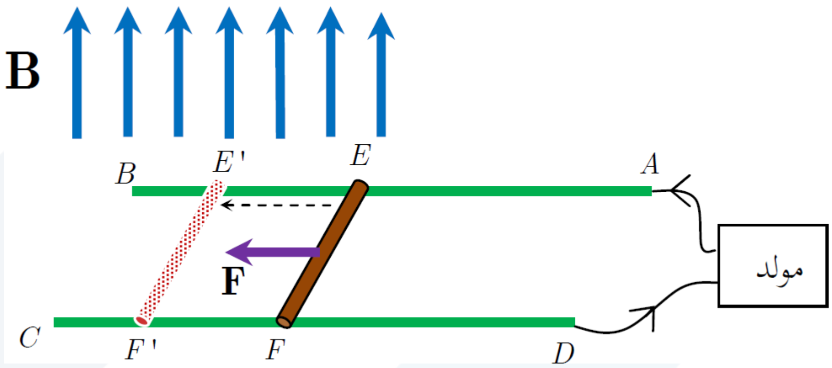
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

ولما كانت الشحن مرتبطة بالدارة، فإن هذه القوة تؤثر في الجزء من الدارة المعرف سابقاً.

2. عمل قوة لابلاس

1.2. حالة إطار مستطيل

لنتأمل دارة الشكل الآتي:



BC و AD قضيبان ناقلان أفقيان.

EF قضيب يستند على القضيبين BC و AD ويمكنه الانزلاق دون احتكاك.

الطرفان A و D متصلان بقطبي مولد مستمر.

تكوّن هذه الجملة دارة كهربائية مغلقة يعبرها تيار شدته I.

B حقل مغناطيسي منتظم بجوار القضيب EF.

لنحسب قوة لابلاس المؤثرة في القضيب EF، لدينا:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

ومن ثمّ:

$$F = \int_E^F I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = I\mathbf{EF} \wedge \mathbf{B}$$

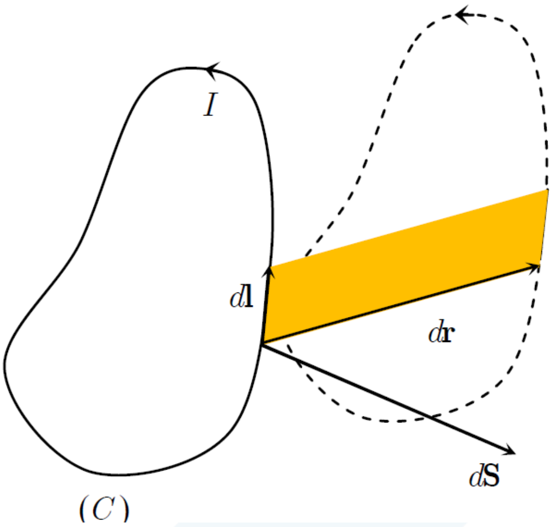
نفترض أن الإطار قد تحرك بمقدار EE' فيكون العمل الناتج عن هذه الحركة:

$$W = \mathbf{F}.\mathbf{EE'} = (I\mathbf{EF} \wedge \mathbf{B}).\mathbf{EE'} = I(\mathbf{EE'} \wedge \mathbf{EF}).\mathbf{B} = I\mathbf{B}.\mathbf{S} = I\Phi_c$$

حيث **S** يمثل السطح الذي يمسحه القضيب، و Φ_c يمثل تدفق الحقل **B** من خلال السطح الممسوح وهو ما نطلق عليه تسمية التدفق المقطوع (أو المحصود).

2.2. حالة دارة خطية

لنتأمل دارة خطية (C) يعبرها تيار I ، موجودة في منطقة يسودها حقل مغناطيسي $\mathbf{B}$. لنحسب عمل قوة لابلاس عند انتقال الدارة بمقدار $d\mathbf{r}$. انظر الشكل الآتي:



قوة لابلاس المؤثرة في الجزء العنصري $d\mathbf{l}$ من الدارة هي:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

والعمل العنصري لهذه القوة من أجل الانتقال $d\mathbf{r}$ يساوي:

$$d^2W = (Id\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}).d\mathbf{r} = I(d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}).\mathbf{B} = Id\mathbf{S}.\mathbf{B} = Id^2\Phi_c$$

حيث: $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}$ السطح الذي يقطعه $d\mathbf{l}$ أثناء الانتقال. و $d^2\Phi_c$ تدفق الحقل من خلال $d\mathbf{S}$ أي التدفق الذي يقطعه $d\mathbf{l}$ أثناء الحركة.

ومن ثَم:

$$dW = \oint_{(C)} Id^2\Phi = Id\Phi_c$$

حيث $d\Phi_c$ التدفق الذي تقطعه الدارة أثناء الانتقال $d\mathbf{r}$.

إذا افترضنا I ثابتاً أثناء الحركة، فإن العمل من أجل انتقالٍ ما يساوي:

$$W = \int I d\Phi_c = I\Phi_c \qquad (1)$$

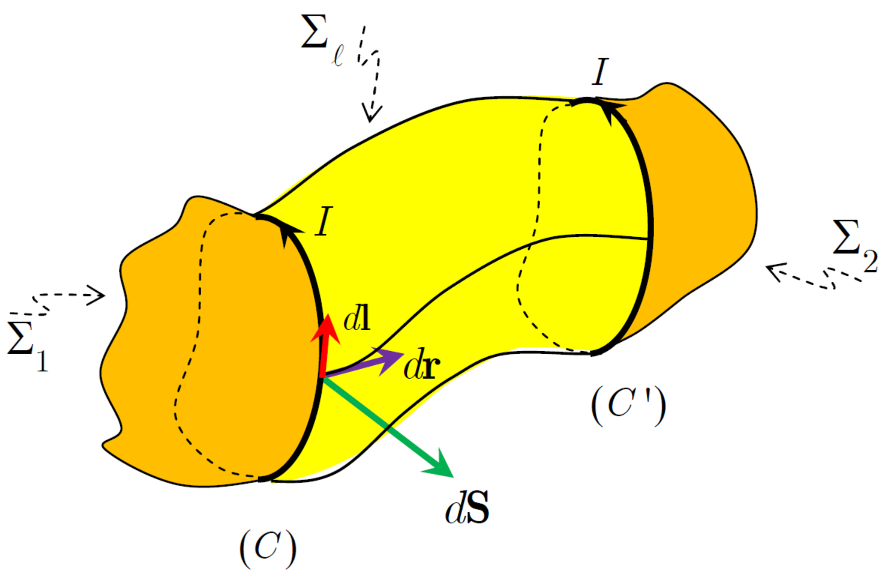
حيث Φ_c التدفق الذي تقطعه الدارة أثناء الانتقال.

لاحظ أننا اصطلحنا على توجيه السطح الممسوح إلى الخارج.

3. نظرية مكسويل

لنتأمّل دارة متحرّكة في منطقة يسودها حقل مغناطيسي $\mathbf{B}$

نرمز للدارة في الموقع الابتدائي بـ (C) ونرمز للدارة في الموقع النهائي بـ(C')



ليكن Σ_1 سطحاً يستند إلى (C) و Σ_2 سطحاً يستند إلى (C')،

وليكن Σ_ℓ السطح الذي تمسحه الدارة خلال حركتها.

إنَّ اجتماع السطوح الثلاثة المعرفة آنفاً هو سطح مغلق، ومن ثَمّ فإن تدفق الحقل المغناطيسي من خلاله معدوم. ويكتب هذا التدفق:

$$(2)\quad \Phi = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{B}.d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{B}.d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_\ell} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = 0$$

لتكون العلاقة السابقة صحيحة يجب أن السطوح موجهة إلى الخارج،

ولكن يوجّه السطح المستند إلى إطار اصطلاحاً حسب توجيه إطاره، والإطار نوجهه عادة بجهة التيار .

إذا طبقنا ذلك على السطحين Σ_1 و Σ_2، نجد :

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = -\Phi_2 \text{ و } \iint_{\Sigma_1} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = \Phi_1$$

من ناحية أخرى:

$$\iint_{\Sigma_\ell} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = \Phi_c$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$\boxed{\Phi_c = \Phi_2 - \Phi_1}$$

نتيجة: التدفق الذي تقطعه (تحصده) الدارة أثناء حركتها يساوي تغير التدفق الذي يجتازها.

تُكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\Phi_c = \Delta\Phi$$

ملاحظة: النتيجة السابقة غير محققة لو كان الحقل المغناطيسي متغيراً مع الزمن. أو أنّ الدارة قابلة للتشوه.

لحساب عمل قوة لابلاس نعوّض في العلاقة (1) فنجد:

$$W = I\Delta\Phi$$

نتيجة: نظرية مكسويل:

عمل قوى لابلاس المؤثرة في دارة خطية متماسكة يعبرها تيار مستمر، وتتحرك ضمن حقل مغناطيسي ثابت مع الزمن، يساوي جداء الشدة في تغير التدفق المغناطيسي عبر الدارة.

4. الطاقة الكامنة لدارة يعبرها تيار ثابت وموضوعة ضمن حقل مغناطيسي

بناءً على نظرية مكسويل، لا يتعلق عمل قوة لابلاس بالطريق المسلوك، ويعتمد فقط على الوضع الابتدائي والوضع النهائي للدارة.

إذن يمكننا تعريف طاقة كامنة لتأثير الحقل في دارة:

$$U_I = -I\Phi$$

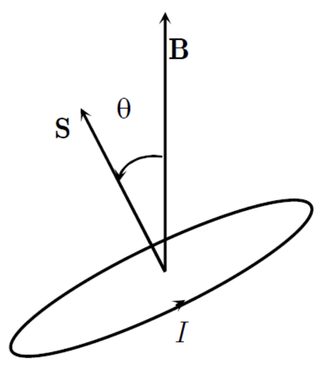
وهذه الطاقة معرفة بثابت إضافي أخذناه هنا مساوياً للصفر.

نعلم أن وضع التوازن لجملة هو الوضع الذي تأخذ فيه الطاقة قيمة حدية (عظمى أو صغرى) وفي وضع التوازن المستقر تكون الطاقة الكامنة صُغرى.

بناء على ما سبق :

- تكون الدارة في وضع توازن إذا كان التدفق الذي يجتاز الدارة له قيمة مطلقة عظمى.
- يكون وضع توازن الدارة مستقراً إذا كانت القيمة الجبرية للتدفق عظمى.

تطبيق: حلقة نصف قطرها a يجتازها تيار I موضوعة ضمن حقل مغناطيسي منتظم $\mathbf{B}$. لتكن θ الزاوية التي يصنعها شعاع سطح الحلقة مع الحقل.



الطاقة الكامنة للحلقة:

$$U_I = -I\Phi = -I\mathbf{S}.\mathbf{B} = -I\pi a^2.B\cos\theta$$

وتكتب هذه العلاقة أيضاً:

$$U_I = -\mathbf{M}.\mathbf{B}$$

حيث $\mathbf{M}$ يمثل شعاع العزم المغناطيسي للحلقة.

نلاحظ أن للحلقة وضعي توازن: الأول عندما يتوجه شعاع عزم الحلقة باتجاه الحقل والثاني في الاتجاه المعاكس. ونلاحظ أن وضع التوازن المستقر هو عند توجه شعاع العزم المغناطيسي للحلقة باتجاه الحقل.