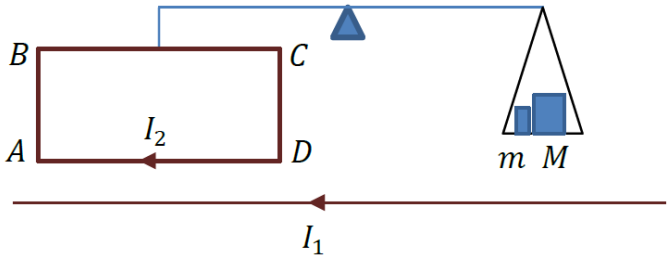
قوة لابلاس والتحريض الكهرطيسي

التمرين 1: عدد لفّات ملفٍّ مستطيل

لدينا ملفٌّ مستطيلٌ $ABCD$ ذو N لفة طوله a وعرضه b. نُعلّق هذا الملفّ بإحدى ذراعي ميزانٍ (متساويتي الطول) فيتوازن مع كتلةٍ m نُعلّقها بالذراع الأخرى. يمرّ تيار كهربائي I_1 في سلك مستقيمٍ لا نهائي يقع تحت الملف وفي مستويه (انظر الشكل)، ويبعد عن ضلعه السفلي AD مسافةً x_0 . عند تمرير التيار I_2 في الملف نُضطرّ إلى إضافة الكتلة M إلى الكتلة السابقة لتأمين توازن الميزان.

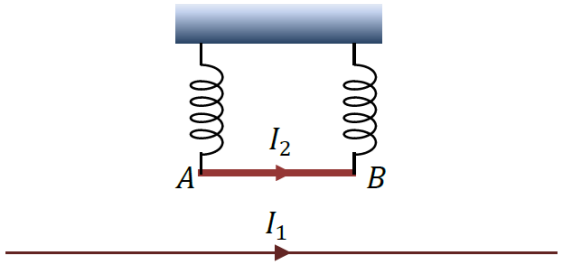


1. بيّن أنّه يمكن استنتاج عبارة عدد اللفّات N بدلالة I_1 و I_2 و M و a و b و x_0 و g و μ_0 .
2. احسب عددياً قيمة N إذا علمت أنّ:

$I_1 = 200\ A$ ، $I_2 = 1\ mA$ ، $a = 7\ cm$ ، $b = 3\ cm$ ، $x_0 = 1\ cm$ ، $M = 5\ mg$ ،
$g = 9.8\ m.s^{-2}$ ، $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ SI$.

التمرين 2: ثابت صلابة نابض

يُعلَّق سلكٌ نحاسي AB طوله $l = 20\ cm$ وكتلته m بنابضين متماثلين مهملي الكتلة لهما ثابت الصلابة k ذاته. يمرّ تيار كهربائي $I_1 = 50\ A$ في سلك مستقيمٍ لا نهائي يقع تحت السلك النحاسي موازياً له وفي مستويه الشاقولي (انظر الشكل)، ويبعد عنه مسافةً $h = 10\ cm$.

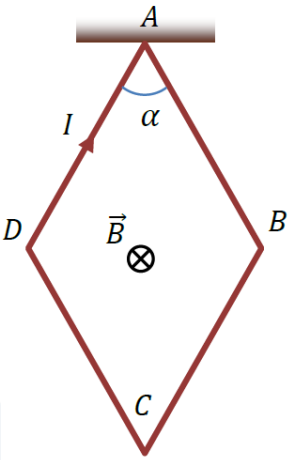


نمرر التيار $I_2 = 20\ A$ في السلك النحاسي فيقترب من السلك اللانهائي بالمقدار $y_1 = 1\ cm$.

1. احسب قيمة ثابت صلابة النابض k علماً أن $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$.
2. احسب قيمة y_2 الموافقة لوضع التوازن الآخر.
3. برهن أن شرط توازن السلك AB بعد تمرير التيارين هو $k > k_m$ حيث يُطلب إيجاد عبارة k_m بدلالة h و l و μ_0 و I_1 و I_2 .

التمرين 3: توازن إطار معين الشكل ضمن مجال حقل مغناطيسي

لدينا إطارٌ معدني على شكل معيّنٍ $ABCD$ ، قابل لتغيير زواياه (رؤوس متمفصلة). طول الضلع الواحد $a = 10\ mm$ وكتلته $m = 0.5\ g$. نُعلّق هذا الإطار من أحد رؤوسه ضمن مجال حقلٍ مغناطيسيٍّ منتظمٍ أفقي شدته $B = 0.1\ Tesla$ ، ونمرّر فيه تياراً قيمته $I = 5\ A$ ، فيتوازن في وضعٍ تكون فيه زاوية رأسه المعلّق α (انظر الشكل)، نهمل الاحتكاك بين مفاصل الإطار.

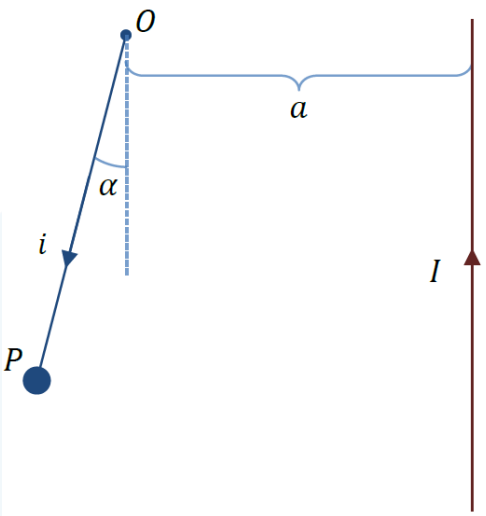


1. اشرح باختصار سبب حدوث ذلك.
2. ما القوى التي يخضع لها هذا الإطار؟
3. أوجد عبارة E_m الطاقة الكامنة المغناطيسية للإطار.
4. أوجد عبارة E_p الطاقة الكامنة الثقالية للإطار.
5. احسب قيمة α زاوية رأس الإطار عند وضع التوازن. ما هو نوع هذا التوازن؟

خذ $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

التمرين 4: توازن نوّاس في مجال حقلٍ مغناطيسي

نُعلّق في نقطةٍ O طرفَ سلكٍ معدنيٍ مهمل الكتلة طوله l. ونعلّق في الطرف الآخر P كتلةً نقطيةً m لنحصل على نوّاسٍ بسيطٍ قابلٍ للحركة حول O. نضعُ على بعد a من نقطة التعليق O سلكاً مستقيماً لا نهائياً يمرّ فيه تيّارٌ كهربائي ثابت I. نمرّرُ تياراً ثابتاً i في سلك النواس، فنجد أنّ النواس يميل عن الشاقول بزاويةٍ α (انظر الشكل).



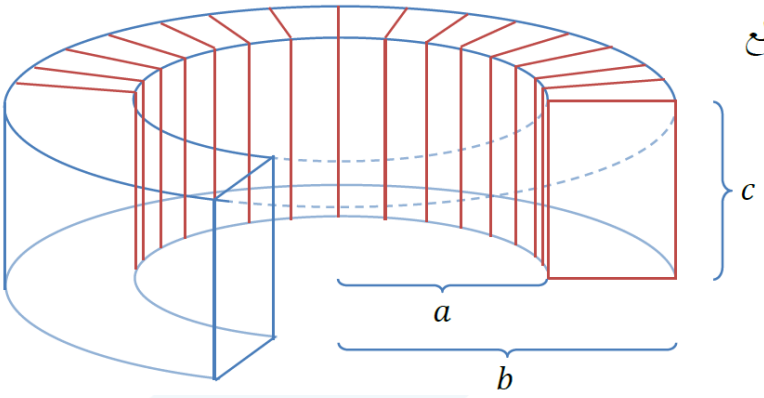
1. اشرح باختصار سبب حدوث ذلك.
2. ما القوى التي يخضع لها هذا النوّاس؟
3. أوجد عبارة عزم كلٍّ من القوى السابقة.
4. اكتب المعادلة التي تصف توازن هذا النواس. هل يمكنك حلّها وإيجاد الزاوية α لوضع التوازن؟
5. سندرس الحلول الممكنة في حال تحقّق الشرط $l \sin\alpha \ll a$:
   a. ما معنى الشرط السابق؟
   b. أوجد العبارة التقريبية للزاوية α بعد نشر معادلة التوازن حتى المرتبة الأعلى الممكنة.
6. ما الذي يتغيّر في حال كان النواس عبارة عن ساق معدنية طولها l وكتلتها m ؟

التمرين 5: معامل التحريض الذاتي لملف اسطواني

1. أوجد عبارة L معامل التحريض الذاتي لملفٍّ أسطواني، طوله l ونصف قطره R ومساحة مقطعه S ، حاوٍ على n لفّة في واحدة الطول، وذلك بفرض أن شدّة الحقل المغناطيسي ثابتة على كلِّ مقطع داخل الملف (لا تتعلّق إلا بإحداثية المقطع وفق محور الملفّ).
2. استنتج عبارة L_∞ معامل التحريض الذاتي لملف أسطواني لا نهائي (أي يحقّق الشرط $R \ll l$)، عدد لفّاته الكلّي N وطوله l ومساحة مقطعه S.
3. تطبيق عدديّ: $l = 30\ cm$ ، $S = 4\ cm^2$ ، $N = 1000$ ، $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ SI$.

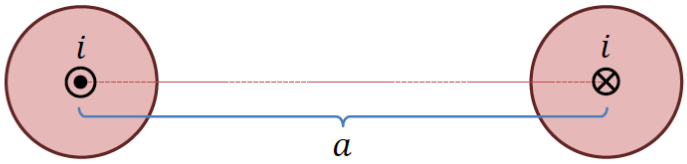
التمرين 6: معامل التحريض الذاتي لوشيعة حلقية

1. أوجد معامل التحريض الذاتي L لوشيعة حلقية (انظر الشكل) مقطعها مستطيل، تحوي N لفّة متلاصقة، ارتفاعها c ونصفا قطريها الداخلي a والخارجي b .
2. تطبيق عدديّ: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ، $N = 1000$ ، $a = c = \frac{b}{2} = 1\ cm$.
3. أعد حلّ المسألة في حال كان مقطع الوشيعة هو مثلّث قائم ضلعاه القائمتان هما الارتفاع c والقاعدة $b - a$.



التمرين 7: **معامل التحريض الذاتي لسلكين متوازيين لا نهائيين**

1. أوجد عبارة الحقل المغناطيسي $\vec{B}(x)$ المتولد عن سلكٍ مستقيمٍ لانهائيّ الطول نصف قطره R يجتازه تيارٌ كهربائيٌّ كثافته منتظمة داخل السلك وشدّته الكلّية i ، وذلك في نقطةٍ تبعدُ مسافةً x من محور السلك.
2. مثّل بيانياً طويلة الحقل السابق بدلالة x.
3. أوجد عبارة L معامل التحريض الذاتي في واحدة الطول لدارةٍ مغلقةٍ مؤلّفةٍ من سلكين مستقيمين متوازيين لانهائيين نصف قطر كل منهما R والمسافة بين محوريهما a ويجتازهما تيارٌ كهربائيٌّ كثافته منتظمة داخل السلك وشدّته الكلّية i . نفترض أن سطح الدارة محدودٌ بمحوري السلكين.

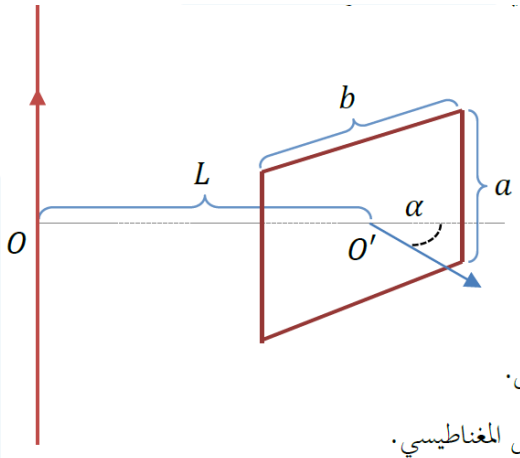


التمرين 8: **معامل التحريض المتبادل بين ملفّين أسطوانيّين**

يحيط ملفٌّ أسطواني "لانهائي" طوله l وعدد لفّاته N_1 بملفٍّ صغيرٍ مساحة مقطعه S وعدد لفاته N_2 ، ويصنع محوره زاويةً θ مع محور الملفّ الأوّل. أوجد عبارة M معامل التحريض المتبادل بين الملفّين.

التمرين 9: **معامل التحريض المتبادل بين إطارٍ مستطيل وسلكٍ لا نهائيّ**

ليكن لدينا سلكٌ مستقيم لا نهائيّ يوازي المحور Oz . نضع في جواره إطاراً مستطيلاً $ABCD$ بحيث يكون أحد أضلاعه موازياً لهذا المحور (انظر الشكل). ليكن a عرض الإطار (الموازي للمحور Oz) و b طوله.



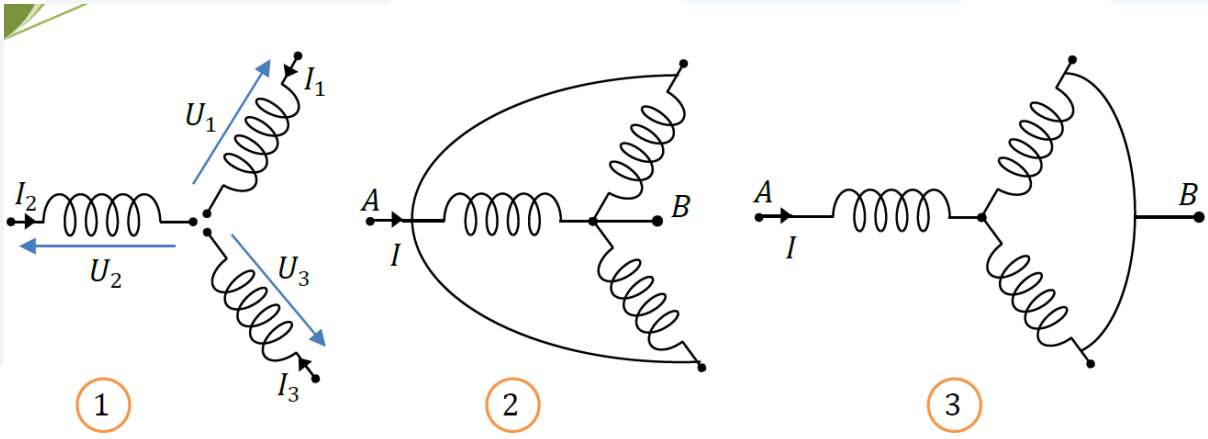
لتكن النقطة O' مركز الإطار المستطيل، و O مسقطها على السلك اللانهائي، بحيث يكون L البعد بينهما. ولتكن α الزاوية التي يصنعها محور الإطار مع القطعة المستقيمة OO'.

1. لنتخيّل تياراً كهربائياً ثابتاً يمرّ في السلك اللانهائي. أوجد عبارة تدفّق الحقل المغناطيسي الناتج عنه عبر الإطار المستطيل.
2. أعِد إيجاد عبارة هذا التدفّق اعتماداً على انحفاظية تدفّق الحقل المغناطيسي.
3. أعِد إيجاد عبارة هذا التدفّق باستخدام مفهوم الكمون الشعاعي.
4. استنتج عبارة M معامل التحريض المتبادل بين السلك والإطار.

التمرين 10: **معامل التحريض الذاتي لتشكيلٍ من عدّة ملفّات أسطوانية**

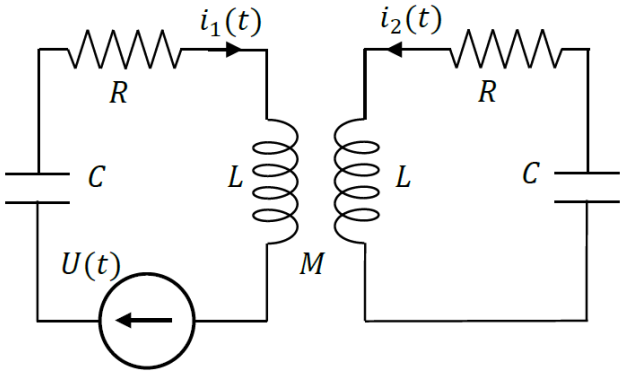
ليكن لدينا ثلاثة ملفّات أسطوانية متماثلة، لكلٍّ منها مقاومة مهملة، ومعامل تحريضٍ ذاتي L . نضع الملفّات الثلاثة بحيث تكون محاورها في مستوٍ واحد والزاوية بين أي محورين $120°$ ، كما يكون معامل التحريض المتبادل بين أيّ ملفين هو M (انظر الشكل 1).

1. أوجد، بدلالة L و M ، الذاتية L' لثنائي القطب الكهربائي بين النقطتين A و B المبيّن في الشكل 2 .
2. أوجد، بدلالة L و M ، الذاتية L'' لثنائي القطب الكهربائي بين النقطتين A و B المبيّن في الشكل 3 .
3. نُطبّق بين A و B فرق كمونٍ جيبيّاً نبضه ω وقيمته المنتجة $24\ V$، فنجد أنّ شدّة التيار المنتجة تكون $72\ A$ من أجل ثنائي القطب في الشكل 2 ، وتكون $1\ A$ من أجل ثنائي القطب في الشكل 3. احسب القيم العددية للممانعتين $L\omega$ و $M\omega$. (لاحظ أنّ $M < 0$)



التمرين 11: **ارتباط دارتين بالتحريض المتبادل**

دارتان كهربائيتان متجاورتان، تحوي كلٌّ منهما وشيعةً L ومقاومةً R ومكثفةً C على التسلسل. يغذّي الدارة الأولى الأولى مولّد جهد $U(t)$ فيمرّ فيها التيار $i_1(t)$. لا يغذّي الدارة الثانية أيّ مولّدٍ للجهد، ونفرض أنّ معامل تحريضها المتبادل مع الدارة الأولى M، كما نفرض $i_2(t)$ التيار المار فيها.



1. اكتب المعادلتين التفاضليّتين اللتين يُحقّقهما التياران $i_1(t)$ و $i_2(t)$.
2. نفرض أنّ مولّد الجهد يغذّي الدارة الأولى بالقوة المحرّكة الكهربائية: $U(t) = U_0 \cos \omega t$ ، ونبحث، بعد الوصول إلى الطور المستقرّ، عن حلّين من الشكل: $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ، $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

باستخدام التمثيل العقدي للمقادير $U(t)$ و $i_1(t)$ و $i_2(t)$ ، وبفرض أنّ:

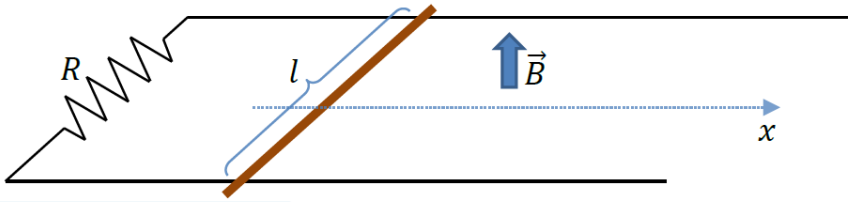
$$X = L\omega - 1/C\omega \quad ، \quad Y = M\omega/\sqrt{R^2 + X^2}$$

أوجد كلّاً من I_1 و I_2 و φ_1 و φ_2 بدلالة U_0 و R و X و Y .

التمرين 12: **تجربة السكّتين التحريضية**

تتكوّن دارة من سكّتين أفقيتين مهملتي المقاومة ومتوازيتين، البعد بينهما l ، وتتّصل إحداهما بالأخرى بواسطة مقاومة R. يمكن لساقٍ معدنيةٍ تستند على السكتين وتعامدهما، كتلتها m ، أن تنزلق بدون احتكاك.

الدارة موجودةٌ ضمن حقلٍ مغناطيسيٍّ شاقوليّ منتظم $\vec{B}$.



نُعطي الساق في اللحظة $t = 0$ سرعةً ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ موازيةً للسكتين.

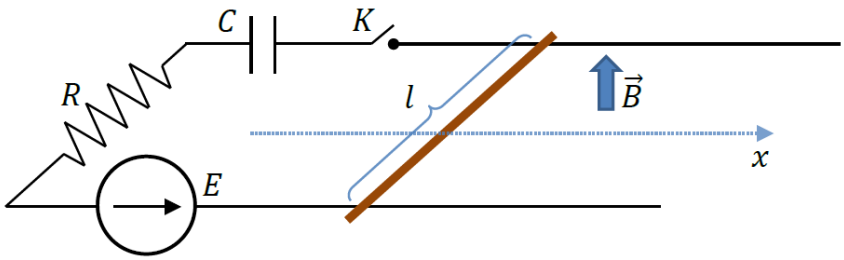
1. بيّن أنّه سينشأ تيّارٌ كهربائيّ متحرّض في الدارة. ما هي جهته؟
2. اكتب المعادلة الكهربائية التي تحكم الدارة (كيرشوف).
3. اكتب المعادلة الميكانيكية التي تحكم الدارة (نيوتن).
4. بحلّ المعادلتين السابقتين، أوجد عبارة سرعة الساق $v(t)$. ما طبيعة الحركة؟ أوجد $\lim_{t\to\infty} v(t)$.
5. استنتج عبارة التيار المارّ $i(t)$.
6. اكتب معادلة انحفاظ الطاقة في كل لحظة t. إلامَ تتحول الطاقة الحركية الابتدائية المعطاة للساق عند توقّفها بعد زمنٍ طويل؟

التمرين 13: **تجربة السكّتين – مرّة أخرى**

تتكوّن دارة من سكّتين أفقيتين مهملتي المقاومة ومتوازيتين، البعد بينهما l. يمكن لساقٍ معدنيةٍ تستند على السكتين وتعامدهما، كتلتها m ، أن تنزلق بدون احتكاك. نصل السكتين بمولّد كمونٍ مستمرّ E، موصولٍ على التسلسل مع مقاومة R ومكثفة C بالإضافة إلى قاطعة K. الدارة موجودةٌ ضمن حقلٍ مغناطيسيٍّ شاقوليّ منتظم $\vec{B}$.

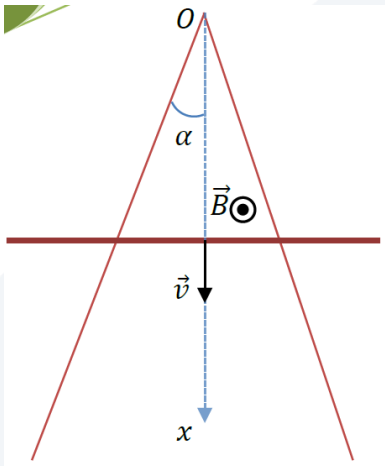
نُغلق القاطعة K في اللحظة الابتدائية $t = 0$، حينما كانت المكثفة غير مشحونة والساق ساكنة.

1. اكتب المعادلتين الكهربائية والميكانيكية اللتين تحكمان الدارة.
2. بحلّ المعادلتين السابقتين، أوجد كلّاً من سرعة الساق $v(t)$ وشحنة المكثفة $q(t)$ وشدة التيار $i(t)$. ارسم هذه التوابع الثلاثة.
3. اكتب معادلة انحفاظ الطاقة في كل لحظة.



التمرين 14: ساق متحرّكة على سكتين غير متوازيتين

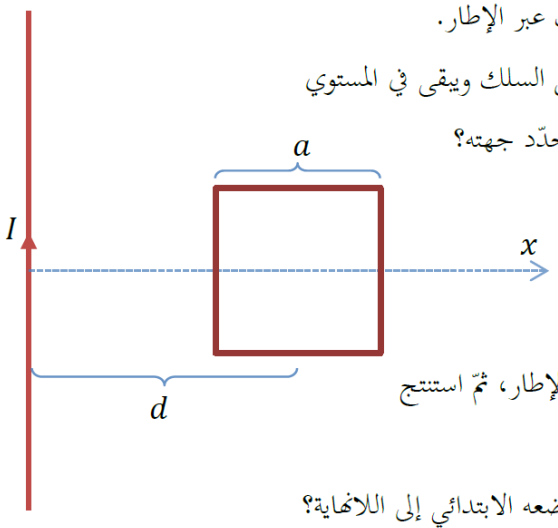
لنعتبر سكّتين ناقلتين، الزاوية بينهما 2α، موضوعتين في مجال حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ شاقوليّ عموديّ على مستويهما. تستند ساقٌ معدنيةٌ على السكتين بحيث تشكّل معهما مثلثاً متساوي الساقين. نقوم بتحريك هذه الساق بسرعة ثابتة $\vec{v}$ عمودية عليها (انظر الشكل). نفرض r هي مقاومة واحدة الطول من مادّة السكتين أو الساق المعدنية.



1. بيّن أنّه سينشأ تيّارٌ كهربائيّ متحرّض في الدارة. ما هي جهته؟
2. أوجد عبارة هذا التيار المتحرض i بدلالة r و B و v و α.
3. أعد حلّ المسألة في حال أعطينا الساق، ذات الكتلة m، سرعةً ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ تعامدها. أوجد عبارتي سرعة الساق $v(t)$ والتيار المتحرّض $i(t)$، وناقش عبارة انحفاظ الطاقة.

التمرين 15: التيار المتحرّض في إطارٍ متحرّك

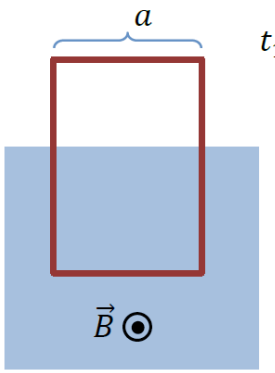
يمرّ تيارٌ مستمرٌّ I في سلكٍ مستقيمٍ لا نهائي. يوجد في جوار السلك إطارٌ ناقلٌ مربّع الشكل، مقاومته R وطول ضلعه a ، بحيث ينتمي الإطار والسلك إلى المستوي ذاته. يبعد مركز الإطار مسافةً d عن السلك.



1. أوجد عبارة φ تدفّق الحقل المغناطيسي المتولّد عن السلك عبر الإطار.
2. نقوم الآن بتحريك الإطار بسرعةٍ ثابتةٍ v بحيث يبتعد عن السلك ويبقى في المستوي ذاته. بيّن أنّه سينشأ تيّارٌ كهربائيّ متحرّض في الإطار، وحدّد جهته؟
3. بإهمال الحقل المتحرّض (التحريض الذاتي) ماذا تصبح عبارة $\varphi(t)$ تدفّق الحقل المغناطيسي المتولّد عن السلك عبر الإطار في كل لحظة t .
4. استنتج عبارة $e(t)$ القوة المحرّكة الكهربائية المتحرّضة في الإطار، ثمّ استنتج التيار المتحرّض $i(t)$.
5. ما كمّية الكهرباء التي تمرّ في الإطار نتيجة تحريكه من موضعه الابتدائي إلى اللانهاية؟

التمرين 16: فرملة السقوط الحرّ لإطارٍ مستطيل

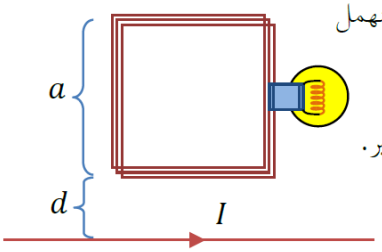
يسقط إطارٌ مستطيلٌ عرضه a سقوطاً حرّاً بدون سرعة ابتدائية بحيث يبقى مستويه شاقولياً وضلعه السفلي أفقياً. مقاومة سلك الإطار R وكتلته m . يدخل الضلع السفلي لحظة السقوط في مجال حقلٍ مغناطيسيٍّ منتظم ويعامد مستوي الإطار. نهمل الحقل المغناطيسي المتولّد عن التيّار المتحرّض في الإطار والمسبّب لظاهرة التحريض الذاتي، كما نهمل الاحتكاك بين الإطار والهواء. ليكن $\tau = mR/a^2B^2$. ولتكن t_1 هي لحظة انغمار كامل الإطار في مجال الحقل المغناطيسي.



1. اكتب المعادلتين الكهربائية والميكانيكية، واستنتج عبارة سرعة سقوط الإطار $v(t)$.
2. ارسم التابع $v(t)$، وقارن مع حالة السقوط الحرّ بدون بوجود الحقل المغناطيسي.
3. اكتب العبارة التي تبيّن انحفاظ الطاقة واشرحها.

التمرين 17: إنارة بالتيار المتحرّض (دورة 2016)

لدينا سلك توتّر عالٍ أفقيّ ومستقيم ولا نهائي، يسري فيه تيّار جيبي من الشكل $I = 5000\ \cos \omega t$، وتردّده $f = 50\ Hz$. نضع بالقرب منه على بعد $d = 2\ cm$ ملفّاً مستوياً مربّع الشكل طول ضلعه $a = 30\ cm$ مكوّناً من N لفّة وينطبق مستويه مع مستوٍ يحوي السلك اللانهائي (انظر الشكل). سنهمل ذاتية الملفّ ومقاومة سلكه، وسنغلق طرفيه على مصباح صغير مقاومته ثابتة تساوي $R = 10\ \Omega$ يمكن له أن يضيء إذا كانت الشدّة المنتجة للتيار المار به أكبر من 5 أمبير.



1. ما هو الحدّ الأدنى لعدد اللفّات اللازم لإضاءة المصباح؟
2. إذا اعتبرنا $N = 200$ ، ما القيمة العظمى للبعد d الذي يسمح بإضاءة المصباح.
3. ما هو الحدّ الأدنى لعدد اللفّات بحيث يضيء المصباح عند وضع الملف على بعد مترٍ واحد ؟