كلية ادارة الاعمال

الإحصاء 2

Statistics 2

المحاضرة الخامسة

الأستاذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الدراسي الثاني للعام 2023-2024

التحليل المزجي وطرق العد

الأهداف:

1. إدراك مفهوم طرق العد تباديل – تراتيب – توافيق.
2. العمل على تطبيق طرق التحليل المزجي.
3. مساعدة الطالب في معرفة عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء أي تجربة أو دراسة.
4. معرفة القواعد والطرق في احتساب الاحتمالات وطرق سحب العينات الممكنة مع الإرجاع أو بدون إرجاع.

المحتويات:

1. مفهوم التحليل المزجي وطرق العد.
2. القواعد الأساسية للتباديل.
3. القواعد الأساسية للتراتيب.
4. القواعد الأساسية للتوافيق.
5. تمارين محلولة.
6. تدريبات.

طرق العد
Counting Techniques

هي عبارة عن تحديد عدد عناصر فضاء العينة، وعدد عناصر الحادثة دون الحاجة إلى كتابة فضاء العينة أو كتابة الحادثة بمعنى عدد طرق تحديد النتائج الممكنة لتجربة ما أو عدد العناصر في مجموعة ما يقيد طريقة العد المباشر ويطلق على مثل هذه الطرق بالتحليل المزجي.

ويعرف فضاء العينة بأنه جميع حالات الظهور الممكنة أو النتائج الممكنة عند إجراء تجربة معينة عشوائياً. أما الحادثة هي جزء من النتائج الممكنة في فضاء العينة.

طرق العد

- نستخدم طرق العد لإيجاد عدد عناصر مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصرها.
- هذه الطرق تساعدنا أيضا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء أي تجربة وهذا بدوره يفيدنا كثيرا في دراسة علم الاحتمال.
- هناك قاعدتان أساسيتان لطرق العد هما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع

– القواعد الأساسية للعد:

هناك قاعدتان أساسيتان للعد هما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع.

* الأولى : قاعدة الضرب :

a– إذا كان من الممكن تنفيذ عملية ما بطرق عددها n_1 وتنفيذ عملية أخرى بطرق عددها n_2 فإن عدد الطرق الممكنة لتنفيذ العمليتين معاً تساوي حاصل ضرب

$$n_1 . n_2 \qquad (1)$$

b– وبشكل عام إذا كان هناك عدد p من العمليات أو التجارب وأمكن تنفيذ العملية الأولى بطرق عددها n_1 والعملية الثانية وبطرق عددها n_2 والعملية الثالثة بطرق عددها n_3 …… وهكذا حتى نصل إلى تنفيذ العملية رقم p بطرق $n.\text{p}$ وعليه فإنه يمكن إجراء العمليات كلها معاً بطرق عددها يساوي (2) $\text{n}_1.n_2.n_3.n_4.......np$

ملاحظة : في طريقة الضرب يتم إجراء جميع المراحل معاً لإتمام العملية .

القواعد الأساسية لطرق العد:

أولاً: قاعدة الضرب:

$$n=n1 \ \times n2 \ \times \ldots \times nr$$

مثال 1: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات: الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و مقررين مختلفين للرياضيات و مقررين مختلفين للفيزياء.

عدد طرق اختيار مقرر الأحصاء يساوي 3 =n1

عدد طرق اختيار مقرر الرياضيات يساوي 2 =n2

عدد طرق اختيار مقرر الفيزياء يساوي 2 =n3

باستخدام قاعدة الضرب يكون عدد الطرق المختلفة لاختيار المقررات الثلاثة يساوي

$$n= 3 \times 2 \times 2 = 12$$

مثال 2:

نفترض أنه لدينا ثلاثة كتب هي (اقتصاد - إحصاء- محاسبة) ويراد ترتيبها على طاولة، فيتم طريقة يمكن ترتيب ذلك ؟

الحل :

من المثال يتضح بأن الكتاب الأول اقتصاد يمكن أن ترتبه بثلاثة طرق مختلفة إما من اليمين وإما في الوسط وإما اليسار وعلى افتراض أننا اخترنا مكاناً لهذا الكتاب فإنه يتبقى مكانين وعليه فإن الكتاب الثاني هو كتاب الإحصاء والذي يمكن ترتيبه بطريقتين فقط وعلى فرض أننا اخترنا مكاناً لكتاب الإحصاء فإنه يتبقى لدينا مكان واحد فقط ولهذا فإنه يتبقى لدينا مكان واحد فقط ولهذا فإن كتاب المحاسبة يمكن ترتيبه بطريقة واحدة . وبالتالي فإن عدد الطرق التي يمكن أن ترتب الكتب الثلاثة هي

$$n = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

عدد الطرق الممكنة لترتيب ثلاثة كتب

الكتاب / الطريقة	الكتاب الأول	الكتاب الثاني	الكتاب الثالث
1	اقتصاد	إحصاء	محاسبة
2	إحصاء	اقتصاد	محاسبة
3	إحصاء	محاسبة	اقتصاد
4	اقتصاد	محاسبة	إحصاء
5	محاسبة	اقتصاد	إحصاء
6	محاسبة	إحصاء	اقتصاد

مثال /3/ :

في منطقة ما يكون /14/ طالب حامل بكالوريا ثانوية عامة علمي /13/ طالب حامل ثانوية الفرع الأدبي /17/ طالب حامل ثانوية فنية .

بكم طريقة يمكن اختيار طالب واحد من هؤلاء الطلاب ؟

الحل :

لدينا $m = 3$,

$$n_1 = 14$$
$$n_2 = 13$$
$$n_3 = 17$$

واستناداً لمفهوم التحليل المزجي فإن

طريقة 14*14*17=3094

طريقة مختلفة لاختيار طالب واحد من المجموعات الثلاثة .

بمعنى إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق عددها n_1 وبعد إتمامها أمكن إجراء عملية أخرى بطرق عددها n_2 فإن يمكن إجراء العمليتين معاً بطرق عددها $n_1 \cdot n_2$

مثال :

مطعم يقدم /4/ أصناف من اللحم ، /3/ أصناف من السلطة، /5/ أصناف من الحلوى .

كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها علماً بأن الوجبة الواحدة تتكون من (لحم وسلطة وحلوى) .

الحل :

- عدد طرق تقديم اللحمة = 4
- عدد طرق تقديم السلطة = 3
- عدد طرق تقديم الحلوى = 5

ومنه يكون عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها (وجبة 60 = 4*3*5) .

مثال: يتألف قسم إدارة الأعمال من :

/47/ طالب في المستوى الأولى .

/51/ طالب في المستوى الثاني .

/54/ طالب في المستوى الثالث .

/55/ طالب في المستوى الرابع .

بكم طريقة يمكن اختيار ممثلي هذه السنوات إلى مجلس القسم ؟

الحل : استناداً إلى مفهوم التحليل المزجي نجد أن

طريقة 47*51*54*55 = 7119090

إذا يمكن القول أن ما تعرضنا له سابقاً يسمى بنظام العد وفق القاعدة الأساسية التالية إذا أجريت تجربة ما بعدد من الطرق مقدارها m وتجربة أخرى بعدد من الطرق مقدارها n فإن التجربتين يمكن أن تحدثا معاً بعدد من الطرق مقدارهما n*m وإذا كان لدينا عدة تجارب كل منهما يحدث بعدد من الطرق على التوالي فإن هذه التجارب تتم بعدد من الطرق هي : $n_1 \times n_2 \times n_3 ....n_m$

رمز المضروب : Factorial:

يسمى حاصل ضرب الأعداد الطبيعية من /1/ إلى /n/ بـ مضروب n ويرمز له بالرمز n! أي أن :

$$n! = n(n-1)(n-2).......3\times2\times1$$

وكما يعرف n! بأنه عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها n من الأشياء فمثلاً

$$1! = 1$$
$$2! = 2\cdot1 = 2$$
$$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$$
$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$$
$$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$$
$$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$$
$$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$$
$$\vdots$$

كما يمكن إعادة كتابة n! على الشكل التالي و تطبق هذه العملية(عاملي) على مجموعة الأعداد الطبيعية فقط

$$n! = n(n-1)!$$

وتعرف العلاقة هذه بعلاقة الاختزال لمضروب n وعليه نجد أن

$$9! = 9 * (9 - 1)! = 9 * 8!$$

ويتكرر تطبيق علاقة الاختزال فإنه يتم الحصول على

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)! \end{aligned}$$

وفي حالة وضع n=1 في صيغة الاختزال التي يتم إعادة كتابتها في أخرى نجد أن :

$$n! = n(n-1)!$$

فإنه يتم الحصول على

$$1! = 1(1-1)!$$

$$1! = 1(0)!$$

$$1 = 0!$$

$$0! = 1$$

أي أن مضروب الصفر 0! يكون مساوياً للواحد الصحيح .

مثال : أوجد قيمة كل من :

$$a = \frac{14!}{11!} = \frac{14 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 11}{11!} = 2184$$

$$b = \frac{15!}{17!} = \frac{15!}{17 \times 16 \times 15!} = \frac{1}{17 \times 16} = \frac{1}{272}$$

$$c = \frac{26!}{24!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24!} = 650$$

القاعدة الثانية : قاعدة الجمع :

ثانياً: قاعدة الجمع:

$$n=n1+n2+...+nr$$

مثال 2: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرراً واحداً فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و مقررين مختلفين للرياضيات و مقررين مختلفين للفيزياء.

عدد طرق اختيار مقرر الأحصاء يساوي n1= 3

عدد طرق اختيار مقرر الرياضيات يساوي n2= 2

عدد طرق اختيار مقرر الفيزياء يساوي n3= 2

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع يكون عدد الطرق المختلفة لاختيار المقرر الثلاثة يساوي

$$n=3+2+2=7$$

إذا كان هناك عدد مقداره r من العمليات بحيث :

- العملية رقم /1/ تتم بعدد n_1 من الطرق المختلفة .
- العملية رقم /2/ تتم بعدد n_1 من الطرق المختلفة .
- ... وهكذا
- العملية رقم /r/ تتم بعدد n_r من الطرق المختلفة .

فإن عدد الطرق المختلفة لإجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات (العمليات متنافية) يساوي :

$$n=n_1+n_2+n_3+.........+n_r$$

ملاحظة : في طريقة الجمع تكون العمليات متنافية أي ان إجراء إحدى العمليات ينفي إجراء العمليات الأخرى .

مثال :

مثال :بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقرراً واحداً فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو المحاسبة إذا علم أن هناك /5/ مقررات مختلفة للإحصاء و/4/ مقررات للرياضيات ومقررين مختلفين للمحاسبة .

الحل :

العملية الأولى : اختيار مقرر الإحصاء وعدد الطرق يساوي $n_1=5$

العملية الثانية : اختبار مقرر رياضيات وعدد الطرق $n_2=4$

العملية الثالثة : اختبار مقرر محاسبة وعدد الطرق $n_3 = 2$

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع فإن عدد الطرق المختلفة لاختبار المقرريساوي :

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$= 5 + 4 + 2 = 11 \text{ طريقة}$$

ويأخذ التحليل المزجي ثلاثة أشكال متنافية هي : التباديل- التراتيب- التو افيق وتختل هذه الأشكال عن بعضها البعض بحسب طبيعة العناصر أو ترتيب العناصر أو حسب ترتيب وطبيعة العناصر معاً الداخلة في تركيب المجموعات الجزئية .

.

التباديل : $\left(p_r^n\right)$ La Permutation:

التباديل:

التبديلة هي ترتيبة لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب.

مثال 3:

1. كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحتوي كل ترتيبة على حرفين؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C.

عدد طرق اختيار الحرف الأول n1= 3

عدد طرق اختيار الحرف الثاني n2= 2

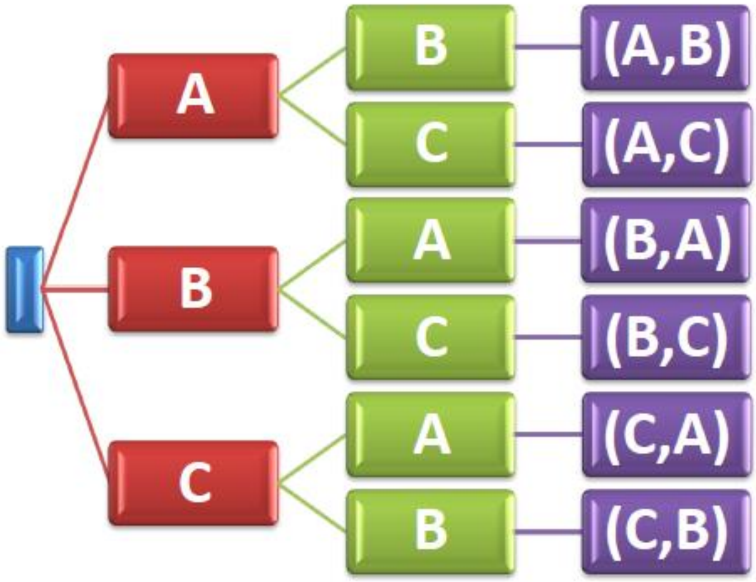
باستخدام قاعدة الضرب يكون عدد طرق ترتيب حرفين من الحروف يساوي:

$$n = n1 \times n2 = 3 \times 2 = 6$$

مثال 3:

2. أوجدي التباديل المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

(A,B), (A,C), (B,A), (B,C), (C,A), (C,B)



نتيجة:

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز **nPr** ويعطى بالصيغة التالية:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظات:

1. يرمز لمضروب العدد n بالرمز !n ويعرف

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

2. $0! = 1$

4. $nPn = n!$

5. $nP1 = n$

$$P_k^n = n(n-1)(n-2).........(n-k+1) \qquad (\mathbf{1.1})$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

ملاحظة : عدد تباديل n من الأشياء أو العناصر مأخوذة جميعها في نفس الوقت هو n!

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز ${}_nP_r$ ويعطى بالــصيغة التالية:

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}$$

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

ملاحظات:

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ (يسمى مضروب العدد)
- $0! = 1$
- ${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$

تطبيقات على التباديل:

1. السحب بإرجاع:

عدد الطرق المختلفة هو $n \times n \times \ldots \times n = n^r$

2. السحب بدون إرجاع:

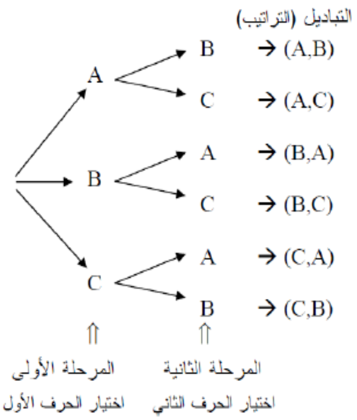
عدد الطرق المختلفة هو $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال:

١ـ كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين مختلفين؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C ؟

٢ـ أوجد التباديل (التراتيب) المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

الحل:



مكان الحرف الأول	مكان الحرف الثاني
عدد طرق اختيار الحرف الأول $n_1=3$	عدد طرق اختيار الحرف الثاني $n_2=2$

- **عدد التباديل للحروف A,B,C مأخوذاً حرفين في كل مرة يساوي ٣×٢= ٦ تباديل.**

مثال:

بكم طريقة يمكن أن نجلس ٥ طلاب على ٥ مقاعد في صف واحد؟

الحل:

المقعد الأول	المقعد الثاني	المقعد الثالث	المقعد الرابع	المقعد الخامس
عدد طرق اختيار الطالب الأول	عدد طرق اختيار الطالب الثاني	عدد طرق اختيار الطالب الثالث	عدد طرق اختيار الطالب الرابع	عدد طرق اختيار الطالب الخامس
$n_1=5$	$n_2=4$	$n_3=3$	$n_4=2$	$n_5=1$

$$_{n}P_{r}={}_{5}P_{5}=\frac{5!}{(5-0)!}=\frac{5!}{5!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1!}=120$$

مثال:

بكم طريقة يمكن أن نجلس ٥ طلاب على ٣ مقاعد في صف واحد؟

الحل:

المقعد الأول	المقعد الثاني	المقعد الثالث
عدد طرق اختيار الطالب الأول	عدد طرق اختيار الطالب الثاني	عدد طرق اختيار الطالب الثالث
$n_1=5$	$n_2=4$	$n_3=3$

$$_{n}P_{r}={}_{5}P_{3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$$

تطبيقات على التباديل ـ السحب بإرجاع

أولاً: السحب بإرجاع

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بإرجاع (أي أن العنصر المسحوب يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$n \times n \times \ldots \times n = n^r$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ n	. . .	$\Uparrow$ n	$\Uparrow$ n

مثال:

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على كرة مختلفة؟

الحل:

الصندوق الثاني	الصندوق الأول
عدد طرق سحب الكرة الثانية	عدد طرق سحب الكرة الأولى
$n_2=15$	$n_1=15$

عدد سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على ١٥ كرة مختلفة يساوي:

$$n^r = 15^2 = 15 \times 15 = 225$$

ثانياً: السحب بدون إرجاع

- إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بدون إرجاع (أي أن العنصر المسحوب لا يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ n−r+1	. . .	$\Uparrow$ n−1	$\Uparrow$ n

مثال:

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على كرة مختلفة؟

الحل:

الصندوق الثاني	الصندوق الأول
عدد طرق سحب الكرة الثانية	عدد طرق سحب الكرة الأولى
$n_2=14$	$n_1=15$

عدد سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على ١٥ كرة مختلفة يساوي:

$${}_nP_r = {}_{15}P_2 = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = \frac{15\times 14\times 13!}{13!} = 15\times 14 = 210$$

مثال

دخل خمسة أشخاص إلى غرفة جلوس بها عشرة كراسي بكم طريقة يمكنهم الجلوس؟

الحل : الطريقة الأولى :

$$\text{عدد الطرق} = P(10.5)$$

$$= 10\times 9\times 8\times 7\times 6 = 30240 \quad \text{طريقة}$$

الطريقة الثانية :

$$P_5^{10} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-5)!}$$

$$= 30240 \quad \text{طريقة}$$

مثال /2/ :

لدينا سلسلة الأرقام 1,2,3,4,5,6,7 بكم طريقة يمكن مجموعات مكونة من :

a) ثلاثة أرقام مختلفة .

b) أربعة أرقام مختلفة .

c) سبعة أرقام مختلفة

الحل :

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- a $P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ طريقة

- b $P_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$ طريقة

- c $P_7^7 = \frac{7!}{(7-7)!} = 5040$ طريقة

مثال /3/ :

ما هو عدد الكلمات التي يمكن أن نشكلها من الأحرف a,b,c,d,e,f,g بحيث تحتوي كل كلمة على ثلاثة أحرف مختلفة فقط .

الحل :

نرى أن المطلوب حساب عدد التباديل المكونة من ثلاثة عناصر من مجموعة كلية مؤلفة من /7/ عناصر أي k=3 ، n=7 فيكون :

$$P_4^7 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$ **كلمة**

2- التباديل في حالة التكرار للعناصر

فإن عدد التباديل الممكنة تشكيلها من n عنصر تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{P_k^n = n^k}$$

مثال /4/

ما هو عدد التباديل الممكن تشكيلها من مجموعة الأعداد / 1,2,3,4,5,6,7 / بحيث يتكون كل تبديل من /3/ أرقام مختلفة فقط ز

الحل :

نرى أن n=7 و k=3 فيكون $P_k^n = n^k = 7^3 = 343$

3- التباديل بين الأشياء المتماثلة :

عدد تباديل (n) من الأشياء منها n_1 شيء متشابهة و n_2 و n_3 هو

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots\ldots n_k!} \qquad (7.1)$$

مثال /5/ :

بكم طريقة يمكن ترتيب /25/ كتاب منها

/12/ كتاب إحصاء

/8/ كتب رياضيات

/5/ كتب محاسبة

الحل : $n_{25}\dfrac{25!}{12!8!5!} = 66927861$ طريقة

نتيجة /2/ :

إذا كانت التباديل بحجم n أي إذا كان k=n يكون

$$P_n^n = n(n-1)(n-2).....(n-n+2)(n-n+1)$$
$$= n(n-1)(n-2).......2.1 = n!$$

نتيجة /3/ :

استناداً إلى النتيجة /2/ نجد أن

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

ولكن بما أن $P_n^n = n!$ فإن

$$\frac{n!}{0!} = n! \Rightarrow 0! = \frac{n!}{n!} = 1$$

وكذلك $0! = 1$

$1! = 1$

نتيجة /4/ :

عدد التباديل المؤلفة من عنصر واحد من مجموعة N ذات الحجم n عنصر يساوي

$$P_n^1 = \left(\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n\right)$$

وكذلك عدد التباديل المؤلفة من عنصرين k=2 من المجموعة N ذات الحجم n عنصر يساوي :

$$P_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

هام

مثال:هام

أوجد قيمة n إذا علمت أن $P_n^2 = 210$

الحل : استناداً إلى العلاقة الآتية :

$$P_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

وبالتالي نجد أن : $n(n-1) = 210$

ونبحث عن حاصل ضرب عدد متتالين عن طريق التحليل ويكون ناتج جدائهما 210 حيث أن :

$$n(n-1) = 210$$

ويفك الأقواس وحل المعادلة الناتجة فنحصل على :

$$= n^2 - n - 210 = 0$$

$$= (n-15)(n+14) = 0$$

كان وهو المطلوب

$$n-15=0 \Rightarrow n=+15$$

$$n+14=0 \Rightarrow n=-14$$

مرفوض لأن n يجب أن يكون عدداً صحيحاً وموجباً أي أن n=15 كما يمكن حل المعادلة بطريقة المميز

$$n = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويمكن التأكد

وهو المطلوب

$$n(n-1) = 210$$

$$15(15-1) = 15 \times 14210$$

4- قاعدة استرلنج Stir Ling's Rule : للاطلاع

عندما تزداد قيمة n يصعب حساب مضروب الأعداد كالمعتاد، ولكن يمكن حساب قيمة مضروب n بالعلاقة التالية :

$$n! = n^n \, e^{-n} \sqrt{2\pi\, n}$$

حيث أن

$$e = 2{,}718281828$$

$$\pi = 3{,}141592654$$

n : العدد

أو العلاقة

$$n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} = c$$

ويمكن كتابتها أيضاً

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ولمعرفة دقة هذه العلاقة نأخذ الجدول الآتي الذي يبين !n لبعض قيم n وهذه العلاقة والفرق بينهما .

مثال : أوجد مضروب الأعداد الآتية : 3,2,1

$$c = n! = 1! = \sqrt{2 \cdot 3{,}1415926541}\left(\frac{1}{2{,}718281828}\right)$$
$$c = 2{,}506628275(0 \cdot 367879441)^{1} = 0 \cdot 922137$$
$$c = n! = 2! = \sqrt{2 \cdot 3{,}14159654 \cdot 2}\left(\frac{2}{2{,}7182818}\right)^{2}$$
$$c = (3{,}544907702)(0{,}541341144)$$
$$c = 1{,}919004392$$

وهكذا بالنسبة لعدد من قيم n كما هو وارد في الجدول الآتي

n	n!	C	$(n!-c)/n!$
1	1	0.922137	0.077863
2	2	1.919004392	0.040497
3	6	5.83269192	0.02788464
5	120	118.0191741	.
6	720	710.0782292	.
10	3628800	3498695.995	0.00857003
13	6227020800	6187240317	0.00688365

3-5- التراتيب : Les Arrangements :

الترتيبات

كما أن عامل ترتيب العناصر **k** عنصر، ونريد تشكيل مجموعة جزئية حجمها **n** مجموعة تحتوي على **A** إذا كانت يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة هنا نكون أمام **ترتيبه**، والتي تنقسم بدورها إلى ترتيب بدون تكرار، وترتيب مع التكرار، سنتناول كل عنصر منهما.

لنفرض لدينا **n** عنصراً مختلفاً ونريد تشكيل جميع المجموعات الممكنة والتي تتكون كل منها من **k** عنصراً مختلفاً من لـ **n** عنصر **k** و **n** أعداداً صحيحة وموجبة و $(k \leq n)$ تدعى هذه المجموعات بترتيبات **k** و **k** من **n** عنصراً مختلف أو تميزت كل مجموعة عن المجموعات الأخرى بحسب طبيعة العناصر التي تتكون منها أو بحسب ترتيبها ويرمز لها بـ A_n^k .

بمعنى أن نقول عن ترتيبين أنهما مختلفان إذا كانت العناصر التي يتكون منها هذان الترتيبان متمايزة بعضها عن بعض أي إذا كانت مواقع العناصر مختلفة بعضها عن بعض .

3. التراتيب

في الكثير من الحالات في نظرية الاحتمالات خاصة في التحليل التوافقي نصادف تجارب تتمثل في اختيار مجموعة جزئية متكونة من K عنصر من مجموعة كلية متكونة من n عنصر، حيث $K \leq n$. مثل اختيار 3 كرات من وعاء فيه n من الكرات. تسمى عملية الاختيار هذه بالترتيبة، ويوجد نوعين من التراتيب: (رجال، 1995)

- التراتيب مع إعادة.
- التراتيب بدون إعادة.

مثال :

لتكن لدينا مجموعة N المؤلفة من العناصر a,b,c أي N(a,b,c) واستناداً إلى تعريف المرتبات نجد أن تراتيب هذه المجموعة هي :

abc , acb , bca
bac , cab , cba

وبالتالي فإننا نرى أن عدد المجموعات الممكن تشكيلها والتي تحتوي كل منها على ثلاثة عنصر مختلفة التراتيب عن الأخرى يساوي إلى n(n-1) أي
N=3 فيكون لدينا مجموعات 3(3-1)= 3*2=6

1- الترتيبات بدون اعادة :

في هذه الحالة يجب عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة n وبذلك لا تكون هناك إعادة للعناصر. حيث أن السحبة الأولى تكون من المجموعة n، والسحبة الثانية تكون من المجموعة $n-1$، وهكذا حتى السحبة الأخيرة التي تكون من المجموعة $n-k+1$. ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

وهو نفس القانون الذي تطرقنا إليه في التبديلة بدون تكرار.

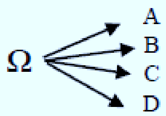
ملاحظة: هناك العديد من الكتّاب في نظرية الاحتمالات لا يفرقون بين التبديلة والترتيبة حيث يعتبرانهما نفس الشيء.

نظرية إن عدد المرتبات k و k لـ n عنصراً مختلفاً يساوي :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2).......(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

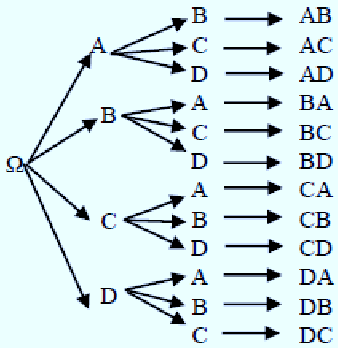
أ ـ الترا تيب بدون إعادة: إن السحب بدون إعادة يشترط علينا عند تشكيل أي من المجموعات الممكنة أن لا نسحب العنصر الواحد من المجموعة الكلية (المجموعة الأم، المجموعة الشاملة: Ω) أكثر من مرة واحدة ليكون عنصرا في المجموعة الجزئية: A .

لنفرض أنه لدينا مجموعة مكونة من أربعة عناصر: $\Omega=(a,b,c,d)$ ، إن عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية أحادية يساوي إلى أربعة طرق كما يبينها الشكل.



شكل يوضح مجموعة جزئية احادية

نلاحظ أن عدد الخيارات يساوي إلى أصلي المجموعة الكلية $\Omega = 4$



أما عدد الطرق التي يمكن بموجبها تكوين مجموعة جزئية ثنائية مؤلفة من عنصرين (حرفين) فيساوي إثنتا عشرة طريقة (12) كما هو مبين في الشكل.

وبشكل عام فإن عدد الترتيبات نحصل عليها كما يلي:

$$A_N^K = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)..(n-k+1)$$

وفي المثال السابق:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

ملاحظة: إذا كان $n = k$ فنحصل على ما يلي: $A_N^K = A_n^n \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$

مثال آخر: ترشح لرئاسة مجلس الإدارة 10 اشخاص على أن يتم إنتقاء 6 منهم ولنحسب بكم طريقة يمكن انتقاء هؤلاء:

الحل: يتعلق الأمر هنا بالترا تيب دون إعادة و عدد الطرق هو: $A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$ طريقة

لدينا: $n=5$ ، ونريد سحب 3 أرقام من A ، أي أن $k=3$ مع عدم تكرار الأرقام، في هذه الحالة نحن أمام ترتيبه، ن ترتيب كل رقم سيؤثر في العدد المسحوب، فمثلا لو سحبنا الرقم الأول وجدناه 1 ثم الرقم الثاني وجدناه 4 ثم سحبنا قم الثالث فوجدناه 2 سيصبح العدد المشكل هو: 142 ، لنفرض الآن ان الرقم المسحوب الأول كان 4 ثم 1 ثم 2 ، بتغير العدد ويصبح 412 ، في هذه الحالة نقول أن الترتيب يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

هذا، لكي نوضح مسألة الترتيب ونزيل الالتباس الذي قد يحصل في ذهن الطالب، لنعد الآن إلى حل المثال، استخدام العلاقة رقم (5-2) نجد أن الأعداد الممكن تشكيلها من خلال استعمال 3 أرقام من A هي:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

مثال 7.1: ما هي عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 5، 3 حروف التي يمكن تشكيلها من الكلمة $mathématique$ بدون إعادة الحروف؟

في الحالة الأولى لدينا $n = 12$ و $k = 5$، وبتطبيق قانون الترتيبة دون إعادة نحصل على:

$$A_{12}^{5} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{7!} = 95040$$ كلمة

في الحالة الثانية لدينا $n = 12$ و $k = 3$، وبتطبيق قانون الترتيبة دون إعادة نحصل على:

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{9!} = 1320$$

2- مرتبات مع الاعادة

إذا كانت التجربة متمثلة في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة عند إجراء التجربة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، وبما أنه توجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل على:

$$n \times n \times n \dots\dots\dots . n = n^k$$

ويمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$AR_n^k = n^k$$

مثال 5.1: ما هي عدد الأعداد المشكلة من 3 أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية؟

في هذه الحالة الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية تمثل المجموعة n وهي $n = \{2,4,6,8\}$. والمجموعة الجزئية $k = 3$. وتطبيق قانون الترتيبة مع إعادة نحصل على:

$$AR_4^3 = 4^3 = 64$$ عددا

مثال 6.1: ما هي عدد المجموعات الجزئية المشكلة من $k = 2$ التي يمكن تكونها من الحروف التالية $n = \{a,b,c\}$، يسمح بإعادة الحرف أكثر من مرة؟

من خلال العد المباشر نحصل على 9 ثنائيات المتمثلة في:

$$(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)$$

وبتطبيق قانون الترتيبة مع الإعادة نحصل على:

$$AR_3^2 = 3^2 = 9$$ ثنائيات

عند اختيار أو سحب العنصر الثاني وهكذا يرمز للتراتيب مع الإرجاع A_n^k أن عدد المرتبات $k;k$ عنصراً مع الإرجاع من العنصر n عنصر مختلفاً يساوي $A_n^k = n^k$

مثال :

بكم طريقة يمكن سحب أربعة أوراق لعب على التوالي من مجموعة أوراق اللعب n=52 وذلك a− مع الإرجاع
b− بدون إرجاع

الحل :

a− إذا سحبنا ورقة وأعدناها يكون السحب مع الإرجاع فإن عدد الطرق لاختيار أي ورقة /52/ ويكون لدينا

طريقة $A_{52}^{4} = (52)^4 = 7311616$

b− أما إذا عبث الورقة ولم تعاد إلى مجموعة الأوراق فيكون السحب بدون إرجاع وبذلك يكون عدد الطرق لاختيار الورق يساوي

طريقة $A_{52}^{4} = \dfrac{52!}{(52-4)!} = (52\cdot 51\cdot 50\cdot 49) = 6497400$

مثال : بكم طريقة يمكن توزيع /7/ حراس على /7/ مراكز ليكون في كل مركز حارس

الحل : عدد الطرق يساوي عدد تراتيب العدد /7/ أي $A_7 = 7! = 5040$

3− الترتيب الدائري :

كما هو معلوم لدينا أن الدائرة ليس لها بداية أو نهاية محددة لذلك فإننا نثبت شيء واحد من (n) حول الدائرة، ثم تقوم بعد ذلك بترتيب باقي (n) حول الدائرة ويساوي $(n-1)!$ أو بمعنى آخر يمكن ترتيب (n) من الأشياء حول الدائرة بعدد من الطرق مقداره n-1

مثال : بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول طاولة مستديرة ؟

الحل : الشخص الأول يمكن أن يجلس على أي مقعد وعلى ذلك يمكن ترتيب n من الأشخاص حول الطاولة المستديرة بعدد من الطرق :

طريقة $(n-1)! = (4-1)! = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$

ملاحظة : إذا كانت بعض عناصر المجموعة M مكررة لابد من أخذ ذلك بعين الاعتبار وبالتالي فإن عدد التراتيب يعطى بالعلاقة الآتية

$$A_n^k = \frac{n!}{n1!\ \ n2!\ \ n3! \ldots\ nk!} = \frac{n!}{\pi_{i=1}^{n} ni!}$$

مثال : بكم طريقة يمكن ترتيب /25/ كتاب منها /12/ كتاب إحصاء و/8/ كتب إدارة و/5/ كتب محاسبة .

الحل : $A_{25} = \dfrac{25!}{8!\ 12!\ 5!} =$

ويمكن تنفيذ ذلك بواسطة الحاسبات اليدوية كما يلي :

طريقة $A_{25} = 25!/(8!*12!*5!) = 6692786100$

– التوافيق :Combinations

التوفيقة (أو التوليفة) هي كل مجموعة يمكن اختيارها من مجموعة من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب.

التوفيقة هي كل مجموعة يمكن اختيارها من عدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة لترتيب في تلك المجموعة فإذا كان لدينا n من الأشياء المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحتوي كل توفيقة على k من هذه الأشياء سوف يرمز لها بـ C_n^k ويمكن إيجاد علاقة P_n^k و C_n^k كما يلي :

حيث أن كل توفيقة تحتوي k من الأشياء فإنه يمكن تبديل هذه الأشياء بعد k! طريقة وبذلك يكون عدد التباديل في جميع التوافيق هو $k!\langle C_n^k$

أي أن

نتيجة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحوي كل توفيقة على r عنصر يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r = 0, 1, \ldots, n$$

ملاحظة

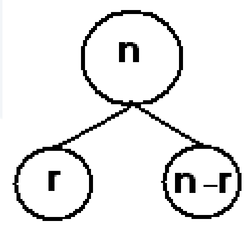
يمكن النظر إلى العدد $\binom{n}{r}$ على أنه:

$\binom{n}{r}$ = عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من n عنصر مختلف بحيث تحتوي كل توفيقة على r عنصر.

= عدد طرق اختيار r عنصر من مجموعة مكونة من n عنصر مختلف.

= عدد طرق تقسيم مجموعة مكونة من n عنصر مختلف إلى مجموعتين الأولى تحوي r عنصرًا والأخرى تحوي $(n - r)$ عنصرًا لباقية.

الشكل التالي يوضح تقسيم المجموعة إلى مجموعتين.



$$P_n^k = k!C_n^k$$

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال : أوجد قيم التوافيق الآتية $C_5^3\ C_6^4\ C_4^0\ C_7^7$

الحل:

$$1)\ C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\ 2\times1} = \frac{20}{2}10$$

$$2)\ C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-2)!} = 15$$

$$3)\ C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1$$

$$4)\ C_7^7 = \frac{7!}{7!(7-1)!} = 1$$

ملاحظة

1. $\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \binom{n}{1} = n$
2. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$

التوافيق دون إعادة: إذا كانت لدينا مجموعة من n عنصر مختلف وأردنا تشكيل جميع المجموعات الجزئية الممكنة والتي يتكون كل منها من k عنصرا مختلفا حيث أن: $k \le n$, $n,k \in N^+$.

فإن المجموعات المحصل عليها تدعى بمتوافقات k فـk لـ: n عنصر مختلف إذا تميزت كل مجموعة عن الأخريات بحسب طبيعة العناصر التي يتكون منها فقط ودون النظر إلى ترتيبها ضمن المجموعة، ويرمز للتوافيق دون إعادة بـ: C_n^k ، إن عدد المتوافقات k فـk عنصر دون إعادة من n عنصر مختلف يساوي إلى: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال: لتكن لدينا المجموعة: $\Omega=(a,b,c,d)$ ، والمطلوب ما هو عدد التوفيقات التي يمكن تكوينها من عنصرين؟

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6$ ، والمجموعات الجزئية هي: ab, ac, ad, bc, bd, cd .

ترمز بـ C_n^k إلى عدد المتوافقات k و k لـ n عنصر مختلف وتعطى بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

مثال :

لجنة مؤلفة من /12/ عنصر وحتى تجتمع هذه اللجنة يجب أن يتوفر الحد الأدنى من النصاب والبالغ /8/ أعضاء

المطلوب :

1- بكم طريقة يمكن تأمين الحد الأدنى لنصابها القانوني؟

2- بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني؟

الحل : نلاحظ أن ليس للترتيب أية أهمية

1- عدد الطريق $C_n^8 = \frac{12!}{8!(12-8)!} = 495$

2- يمكن تأمين النصاب القانوني بحضور /8/ أعضاء أو /9/ أو 10/ أو /11/ أو /12/ أو أي

$$C_{12}^8 + C_{12}^9 + C_{12}^{10} + C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$$

طريقة $495 + 220 + 66 + 12 + 1 = 794$

مثال :

يهم خدمة ثمانية طلاب وستة طالبات أوجد عدد طرق تكوين لجنة من خمسة طلاب؟

1- إذا احتوت اللجنة على خمسة عناصر دون تحديد الجنس .

2- إذا احتوت اللجنة على ثلاثة ذكور ، /2/ إناث .

3- إذا احتوت اللجنة على خمسة عناصر من نفس الجنس .

الحل :

1- بحالة الأولى ليس للجنس أهمية $C_{14}^5 = \frac{14!}{5!(14-5)!} = 2002$

2- لجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتان

a- عدد طرق اختيار الذكور **طريقة** $C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$

b- عدد طرق اختيار الطالبات $C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=15$

عدد طرق اختيار لجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتان تساوي

$$C_8^3*C_6^2=56*15=840$$

3- لجنة مؤلفة من خمسة عناصر وحيدة الجنس

a- لجنة بها خمسة طلاب $C_8^3=\frac{8!}{5!(8-5)!}=56$

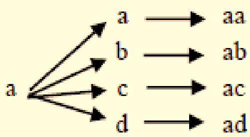
b- لجنة بها خمسة طالبات $C_8^3=\frac{6!}{5!(6-5)!}=6$

ومنه نجد عدد طرق اختيار لجنة مؤلفة من خمسة وحدة الجنس

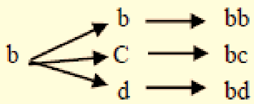
$$C_8^5+C_6^2\Rightarrow 56+6=62$$

التوافيق مع الاعادة

ليكن لدينا نفس المثال السابق والمتعلق بالمجموعة: $\Omega=(a,b,c,d)$ ، نقوم باختيار عنصر ما من Ω وليكن a، نقوم بتسجيله على ورقة ، ثم نعيده إلى Ω نفسها، ونختار عنصرا ثانيا ولنضعه على يمين العنصر المسحوب سابقا، وبما أن a أعيد إلى Ω ، إذن يمكن أن نحصل على المتوافقات المتعلقة بالسحب الأول بـ a وهي موضحة بالشكل التالي:

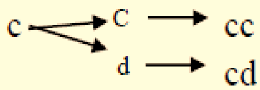


أما المتوافقات المتعلقة بالسحب الأول للعنصر b فهي موضحة بالشكل:



و هنا نلاحظ أن الامكانية ba استبعدت لأن الترتيب ليس له أهمية وقد سبق وأن وجدنا ما يكافئها و هي الإمكانية ab

أما المتوافقات المتعلقة بالسحب الأول للعنصر c فهي كما يبينها الشكل:



أما المتوافقات المتعلقة بالسحب الأول للعنصر d فهي كما يبينها الشكل: d → d → dd

وبهذه الطريقة يمكننا تحديد جميع المتوافقات التي تحوي عنصرين من أربعة عناصر (k=2 , n=4) . ونلاحظ أن مجموع المتوافقات هو 10 وهي: aa , ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd .

ومنه إذا كانت لدينا مجموعة(Ω) بـ: n عنصر مختلف وأردنا أن نشكل جميع المجموعات الجزئية الممكنة والتي يتكون كل منها من k عنصرا مختلفا حيث أن: $n,k\in N^{+}$ ، $1\le k\le n$، تسمى هذه المجموعات بمتوافقات kفـk عنصرا لـ:n عنصر مختلف إذا تميزت كل مجموعة عن أخرى بحسب طبيعة العناصر التي يتكون منها فقط دون النظر إلى ترتيبها ضمن المجموعة مع إمكانية تكرار العنصر نفسه في المجموعة الواحدة.

ويرمز للتوافيق مع الإعادة في بعض الأحيان بـ: K_n^k ، حيث أن: $K_n^k = C_{n+k-1}^k$.

إن عدد المتوافقات kفـk عنصرا مع إمكانية تكرار العنصر نفسه (مع الإعادة) من n عنصر مختلف يساوي إلى: $K_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

نظرية : إن عدد المتوافقات k;k لـ n عنصر مختلف مع إمكانية تكرار العنصر نفسه (مع الإعادة) يعفى بالعلاقة الآتية :

$$C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

معنى ذلك : عندما نختار العنصر الأولى من عناصر المجموعة التي تحوي n عنصراً وليكن العنصر /i/ حيث أن i=1,2,3,…..,n فإن فكرة الإعادة تطلب وضع هذا العنصر مرة أخرى ضمن العناصر n من أجل هذا نجرده من رقمه ونعيده إلى المجموعة بعد أن نعطيه رقماً جديداً هو n+1 بمعنى أن هذا العنصر ذات الرقم في التاني اختير سابقاً لم يعد موجوداً في المجموعة التي تحوي n عنصر تحت الرقم /i/ وإنما موجود رقم جديد هو n+1 وهكذا بالنسبة للعناصر الأخرى .

بمعنى إذا اخترنا العنصر k نكون أمام مجموعة جديدة مؤلفة من n+k-1 عنصر كان قد اختير منها العناصر k-1 ولم يعادوا إليها أي أن تحتوى العناصر الحقيقية فقط .

والتي عددها n وبالتدقيق نلاحظ أن عملية تشكيل متوافقات k لـ I لـ n عنصر مختلف مع الإعادة ما هي إلا عبارة عن تشكيل متوافقات k;k لـ n+k-1 عنصر مختلف دون إعادة وفق

متوافقات مع الإعادة $$C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال : ما هو عدد العينات المكونة من خمسة طلاب والتي يمكن سحبها مع الإعادة من مجموعة من الطلاب تحوي /10/ طلاب .

$$C_{10+5-1}^{5}=\frac{(10+5-1)!}{5!(10-1)!}=2002$$

نظرية :

لتكن A مجموعة جزئية ما تحوى n عنصر ولتكن $n_1,n_2,\dots\dots,n_k$ أعداداً صحيحة موجبة وبحيث $n_1,n_2,\dots\dots,n_k=n$ عندئذ هناك

$$C_n^{n_1},C_{n-n_1}^{n_2},C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\dots\dots\dots C_{n-n_1-n_2\dots\dots-n_k-1}^{n_3}$$

فجزئياً مختلفاً لـ A من الشكل $A_1,A_2,\dots\dots,A_k$ حيث أن

A_1 مجموعة جزئية من A تحوى n_1 عنصر

A_2 مجموعة جزئية من A تحوي n_2 عنصر

⋮

A_k مجموعة جزئية من A تحوي n_m عنصر

تشير إلى إمكانية تنشيط العلاقة السابقة بمعنى

$$P_n\, n_1\, n_2\, n_3....n_k = \frac{n_1}{n_{1!}\, n_{2!}\, n_{3!}......n_{k!}}$$

مثال : صندوق يحتوي على /7/ سبع قطع مرقمة من /1/ حتى /7/ بكم طريقة يمكن اختيار

1- قطعتين من الصندوق

2- ثلاثة قطع

3- قطعتين

الحل : نرى أن قطع n=7 جزئت إلى ثلاث مجموعات جزئية هي

A_1 تحتوي على قطعتين $n_1 = 2$

A_2 تحتوي على قطعتين $n_2 = 3$

A_3 تحتوي على قطعتين $n_3 = 2$

لتحديد المجموعة الجزئية الأولى A_1 هناك $C_{n-1}^{n} = C_7^2$ طريقة

لتحديد المجموعة الجزئية الأولى A_2 هناك $C_{n-2}^{n} = C_5^3$ طريقة

لتحديد المجموعة الجزئية الأولى A_3 هناك $C_{n-3}^{n} = C_2^2$ طريقة

وفق عدد طرق تحديد المجموعات الجزئية

$$C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{7!}{2!\ 5!} \cdot \frac{5!}{3!\ 2!} \cdot \frac{2!}{2!\ 0!} = 210$$

$$C_{n-1}^{n} \cdot C_{n-2}^{n} \cdot C_{n-3}^{n} = P_n^{n_1\, n_2\, n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$$

$$= \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$$ **طريقة**

a- بعض النتائج الخاصة بالتوافيق :

<u>النتيجة /1/</u> : عدد طرق اختيار أشياء عددها k من n من العناصر تساوي عدد طرق اختيار أشياء عددها -n (k من n من العناصر أي أن

$$C_n^k = C_{n-k}^{n}$$

بمعنى

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ويوضع k تساوي k = n - k في طريقة المعادلة نحصل على

$$C_{n-k}^{n}=\frac{n!}{(n-k)\,!(n-(n-k))!}$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n=k)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$
$$C_{n-k}^{n}=C_{n}^{k}$$

مثال :

أوجد قيمة C_{98}^{100} أو C_{100}^{98}

$$C_{100}^{98}=C_{100}^{2}=\frac{100!}{2!98!}=\frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}=4950$$

النتيجة /2/ :

a− عدد طرق اختيار n من العناصر مأخوذة كلها مرة واحدة فإنها تتم بطريقة واحدة أي أن (1)

$$\boxed{C_{n}^{n}=1}$$

بمعنى $C_{n}^{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

ويوضع k=n في طريفي المعادلة نجد أن

$$C_{n}^{n}=\frac{n!}{n!\,(n-n)!}=\frac{n!}{n!\,0!}=\frac{n!}{n!}=1$$

b− عند عدم اختيار أي عنصر k=0 من n عنصر فإن ذلك يتم بطريقة واحدة أي (2)

$$\boxed{C_{n}^{0}=1}$$

بمعنى $C_{n}^{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

ويوضع k=0 في طريفي المعادلة نجد أن

$$C_{n}^{0}=\frac{n!}{0!\,(n-0)!}=\frac{n!}{0!\,n!}=\frac{n!}{n!}=1$$

من النتيجتين (1) و (2) نجد أن

$$C_{n}^{n}=C_{n}^{0}=1$$

ويلاحظ أيضاً أن :

$$C_n^1 = n$$

مثال :

$$C_q^1 = \frac{q!}{1!(q-1)!} = 9$$

النتيجة /3/ : ليكن لدينا

$$\boxed{C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k}$$

بمعنى

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ومن أجل الحصول على نفس النتيجة لكل من الكسرين نقوم في الطرف الأيمن بضرب الكسر في $\frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}$ بينما نضرب الكسر الثاني بـ $\frac{k}{k}$ ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)} + \frac{k\cdot n!}{k!(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{k\cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + k\cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1+k)n!}{k!(n-k+1)!} \Rightarrow \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} \Rightarrow \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}
\end{aligned}$$

وهوالمطلوب

مثال : أوجد قيمة ما يلي :

$$\begin{aligned}
C_7^5 + C_7^4 &= C_5^8 \\
&= \frac{7!}{5!(7-5)!} + \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{8!}{5!(8-5)!} \\
&= \frac{7!}{5!\,2!} + \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} \\
&= \frac{72}{2} + \frac{210}{6} = \frac{336}{6} = 21 + 35 = 56 \\
&\Rightarrow 56 = 56
\end{aligned}$$

أي أيضاً التوافقات الآتية :

$$\boxed{\begin{aligned} C_1^0 &= 1 \\ C_{20}^0 &= 1 \\ C_{62}^0 &= 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{C_n^n = C_n^0 = 1}$$

مثال : أوجد قيمة ما يلي : $C_5^5 ; C_5^0$

$$= \frac{5!}{5!(5-5)!} + \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{120}{120} = 1$$

النتيجة /4/ : إذا ما تساوى عدد التوافيق في حالتين وتكون قيمة n واحدة في الحالتين فهذا يعني أحد أمرين :

1- إما k متساوية في الحالتين .

2- وإما k في أحداهما تساوي n-k في الأخرى .

بمعنى آخر $C_n^k = C_n^n$

يكون إما k = m

وإما k + m = n

M = n – k

أو k = n – m

مثال : إذا كان $C_{26}^{2k+4} = C_{26}^{3k+2}$ أوجد قيمة k

الحل :

$$2k + 4 = 3k + 2$$

بالتالي $3k - 2k = 4 - 2$

$$\boxed{k = 2}$$

$$\boxed{C_{26}^{2\times2+4} = C_{26}^{3\times2+2} = C_{26}^8 = C_{26}^8}$$

الحالة الثانية :

$$2k + 4 + 3k + 2 = 26$$

$$5k = 26 - 6$$

$$5k = 20$$

$$k = \frac{20}{5} = 4$$

وبالتالي نجد أن :

$$C_{26}^{2\cdot4+4}=C_{26}^{3\cdot4+2}\Rightarrow C_{26}^{12}=C_{26}^{14}$$

مثال : إذا كانت $C_n^{n-2}=66$ أوجد قيمة n في كل من المقدارين؟ على حدة

$$C_n^2=66=C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=66$$

أي $C_n^{n-2}=C_n^2=66$

وكما هو أن $C_n^2=\frac{P_n^2}{2!}=66$

ولكن

$$P_n^2=66\cdot2!=132$$

$$P_n^2=\frac{n!}{(n-2)!}=132$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=132$$

$$n(n-1)=132$$

$$n^2-n-132=0$$

بحل المعادلة نحصل على قيمة n وهي على الشكل الآتي :

$$(n-12)(n+11)=0$$

$n-12=0\Rightarrow n=+12$ **مقبول**

$n+11=0\Rightarrow n=-11$ **مرفوض**

وبالتالي لأنه يجب أن يكون n عدداً صحيحاً وموجباً

$$C_n^{n-2}-C_{12}^{12-2}=C_{12}^{10}$$

$$C_{12}^{10}=\frac{12!}{10!(12-10)!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{10\times2\times1}$$

$$=\frac{12\times11}{2}=\frac{132}{2}=66$$

وهو المطلوب وبالتالي فإن قيمة n = 12

النتيجة /5/ : نسبة توفيق متتاليين هي عبارة على الشكل الآتي :

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}$$

مثال : أو جد قيمة

$$\frac{C_{30}^{18}}{C_{30}^{17}}=\frac{30-18+1}{18}=\frac{13}{18}$$

أوجد قيمة $\frac{C_{25}^{12-1}}{C_{25}^{10}}$

$$\frac{C_{25}^{12-1}}{C_{25}^{10}} = \frac{25-12+1}{12} \cdot \frac{25-11+1}{11} = \frac{14}{12} \cdot \frac{15}{11} = \frac{210}{132}$$

نختصر على /2/ فنحصل على $= \frac{105}{66}$

مثال 8.1: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 10 أشخاص؟ لدينا $k = 4$ و $n = 10$، بتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210 \text{ لجنة مختلفة}$$

مثال 9.1: إذا كان لدينا 6 رجال و5 نساء. ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 5 أشخاص ثلاث رجال وامرأتين التي يمكن تكوينها؟ بتطبيق قانون التوفيقة نجد:

$$C_6^3 \times C_5^2 = 20 \times 10 = 200 \text{ لجنة مختلفة}$$

التمرين 2: بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و3 طالبات في صف إذا كان:

1- الجلوس كما يشاءون؟

2- الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟

3- إذا جلس الطلبة فقط جنب بعضهم؟

4- طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

الحل:

1- عدد الطرق الممكن إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو:

$$p_7 = 7! = 5040 \text{ طريقة}$$

2- الطلبة مع بعضهم والطالبات مع بعضهن:

$$4! \times 3! \times 2! = 288 \text{ طريقة}$$

3- جلوس الطلبة فقط مع بعضهم، يمكن أن يجلس هؤلاء الطلبة فيما بينهم ب !4 ثم نعتبرهم شخص واحد حيث يمكنهم الجلوس مع الطالبات ب !4:

$$4! \times 4! = 576 \text{ طريقة}$$

4- طالبان لا يمكنها الجلوس جنب بعضهما: لدينا عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو 5040 طريقة.

نعتبر هذان الطالبان شخص واحد وبالتالي يصبح لنا 3 طلبة و3 طالبات حيث يمكنهم الجلوس بطرق عددها:

$$6! = 720 \text{ طريقة}$$

لكن هذان الطالبان يمكنهما الجلوس جنب بعضهما بطرق عدد:

$$2! = 2 \text{ طريقة}$$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات مع جلوس طالبين جنب بعضهما هو

$$6! \times 2! = 1440 \text{ طريقة}$$

ومنه عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات بحيث طالبين لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو

$$5040 - 1440 = 3600 \text{ طريقة}$$

التمرين 7: في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار عدد الأسئلة في الحالات التالية:

1- اختيار الأسئلة بدون شرط؟

2- إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3- إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1- يمكن اختيار الأسئلة الخمسة بطرق عددها:

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56 \text{ طريقة}$$

2- إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى، يبقى له اختيار السؤالين المتبقيين من بين الأسئلة الخمسة الأخيرة بطرق عددها:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10 \text{ طريقة}$$

3- يمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الضرورية من الخمسة أسئلة الأولى بطرق عددها:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10 \text{ طريقة}$$

ويبقى له سؤالين يتم اختيارهما من الأسئلة الثلاثة الأخيرة بطرق عددها:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \text{ طريقة}$$

وبالتالي يكون إجمالي عدد طرق اختيار الأسئلة الخمسة هو:

$$10 \times 3 = 30 \text{ طريقة}$$

التمرين 8: إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و7 طالبات. إذا أردنا تكوين لجنة من هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

1- بدون شرط؟

2- ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟

3- يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟

3- الطالب X والطالبة Y يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

الحل:

1- عدد اللجان التي يمكن تكوينها هي

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792 \text{ لجنة}$$

2- عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث ثلاثة من الطلبة يرفضون الترشح هو

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126 \text{ لجنة}$$

3- عدد اللجان التي يكون فيها طالبين على الأقل هي

$$C_5^2 \times C_7^3 + C_5^3 \times C_7^2 + C_5^4 \times C_7^1 + C_5^5 \times C_7^0 =$$

$$10 \times 35 + 10 \times 21 + 5 \times 7 + 1 \times 1 = 596$$ لجنة

4- عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الطالب X والطالبة Y لا يمكنهما أن يكونا في اللجنة معا هو

نعتبر الطالب X والطالبة Y أنهما ضمن اللجنة وبالتالي عدد اللجان التي يجتمعان فيها هي:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 240$$ لجنة

من ثم يمكن حساب اللجان التي لا يجتمع فيها الطالب X والطالبة Y من خلال:

$$C_{12}^5 - C_{10}^3 = 792 - 240 = 552$$ لجنة

التمرين 10: عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و6 نساء.

1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

2- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

أ- من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟

ب- من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟

ج- يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

3- ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟

الحل:

الحل:

1 – عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو

$C_{11}^{5}=\frac{11!}{5!(11-5)!}=462$ لجنة

2– عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

أ– من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط هو:

$C_{5}^{1}\times C_{6}^{4}=5\times 15=75$ لجنة

ب– من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر هو:

$C_{5}^{3}\times C_{6}^{2}+C_{5}^{4}\times C_{6}^{1}+C_{5}^{5}\times C_{6}^{0}=$

$10\times 15+5\times 6+1\times 1=181$ لجنة

ج– يجب أن تكون اللجنة متكونة من رجلين وامرأتين على الأقل هو:

$C_{5}^{2}\times C_{6}^{3}+C_{5}^{3}\times C_{6}^{2}=$

$10\times 20+10\times 15=350$ لجنة

3– عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب هو

$A_{11}^{3}=\frac{11!}{(11-3)!}=\frac{11!}{8!}=990$ لجنة

التمرين 14: بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص حول طاولة مستديرة، إذا كان:

1- الجلوس كما يشاءون؟

2- شخصان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

3- شخص منهم يجلس دائما في الطاولة الأخيرة؟

الحل:

نحن هنا بصدد التبديلة الدائرية وهي حالة خاصة من التباديل التي تطرقنا إليها.

1- عدد الطرق الممكنة لجلوس خمسة أشخاص حول طاولة مستديرة هو:

$$p_n = (n-1)! = (5-1)! = 24 \text{ طريقة}$$

2- عدد الطرق الممكنة بحيث شخصان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو

لكن هذين الشخصين يمكنهما الجلوس جنب بعضهما بطرق عددها:

$$p_2 = 2! = 2 \text{ طريقة}$$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة التي يجلس بها 4 أشخاص حول طاولة مستديرة بحيث يجلس اثنان منهم جنب بعضهما هو

$$3! \times 2! = 12 \text{ طريقة}$$

ومنه نستنتج عدد الطرق الممكنة التي يجلس بها 5 أشخاص حول طاولة مستديرة بحيث اثنان منهم لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما من خلال:

$$24 - 12 = 12 \text{ طريقة}$$

3- عدد الطرق الممكنة بحيث شخص منهم يجلس دائما في الطاولة الأخيرة هو:

$$p_4 = (4-1)! = 6 \text{ طريقة}$$

التمرين 15: أحسب قيمة n إذا كان لديك:

$$A_n^2 = 72$$

الحل:

$$A_n^2 = n(n-1) = 72$$
$$= n^2 - n = 72 \rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

ومنه:

$$(n-9)(n-8) = 0$$

وبما أن n يجب أن يكون موجبا فإن:

$$n = 9$$

التمرين 18: إذا كان لدينا 10 أشخاص وأردنا تعيين رئيس وأمين صندوق وسكرتير من هؤلاء الأشخاص. كم عدد الخيارات الممكنة للتعيين إذا كان:

1- التعين بدون قيود؟

2- الشخص A لا يكون إلا إذا كان رئيسا؟

الحل:

1- عدد الخيارات المختلفة الممكنة هو:

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$ خيار

2- عدد الخيارات الممكنة حيث أن الشخص A لا يكون إلا رئيسا هو:

$$9 \times 8 \times 7 + 9 \times 8 = 576$$ خيار

نرغب الجامعة في انتقاء 10 طلاب في إحدى التخصصات من بين 100 طالب للقيام بدورة تدريبية في إحدى المؤسسات، ما هي الطرق الممكنة لتشكيل 10 طلاب (السحب بدون إرجاع)؟

نلاحظ ان ترتيب الطلبة المسحوبين لا يؤثر في المجموعة لأن الهدف هو زيارة المؤسسة وإجراء دورة تدريبية، وبالتالي نحن أمام توفيقة، أي أن عدد المجموعات الممكن تشكيلها هي:

$$C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!\,(100-10)!} = \frac{100!}{10!\,90!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times \ldots . \times 90!}{10!\,90!}$$

$$C_{100}^{10} == \frac{100 \times 99 \times 98 \times \ldots . \times 91}{10!} = 17310309456440$$

إذا كان السحب بالإرجاع، فمن المحتمل ان يظهر العنصر المسحوب مرة ثانية(يتكرر)، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة مع التكرار، وبالتالي فإن عدد طرق سحب المجموعات الجزئية هو:

$$\check{C}_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \ldots\ldots (2\text{-}8)$$

- مثال: نريد سحب عينة مكونة من 3 طلبة من بين 6 طلبة، مع العلم أن طريقة السحب بالإرجاع، كم عدد الطرق التي يمكن بها سحب هذه العينة؟

$$\check{C}_{6+3-1}^{3} = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3!\,5!} = 56$$

تمارين محلولة

أوجد ناتج ما يلي :

1- $$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!(10-4)!}=210$$

2- $$C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!(12-4)!}=C_{12}^{8}$$

3- $$C_{7+3-1}^{3}=\frac{(7+3-1)}{3!(7-1)!}=\frac{9!}{3!\,6!}$$

مع الإعادة $$C_{9}^{3}=\frac{9!}{3!\,6!}=C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال : مصنع فيه /8/ عمال و/4/ عاملات نريد اختيار لجنة مؤلفة من /5/ أفراد بكم طريقة يمكن اختيار

1- بدون شروط .

2- على أن يكون فيها /3/ عمال وعاملتين .

3- على أن يكون فيها عاملين و/3/ عاملات .

4- على أن يكون فيها عاملتين على الأكثر.

5- على أن يكون فيها عاملتين على الأقل .

الحل : 1- بدون شروط

$$C_{12}^{5}=\frac{12!}{5!\,7!}=792$$

2- لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال وعاملتين

$$C_{8}^{3}\cdot C_{4}^{2}=\frac{8!}{3!\,5!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}=336$$

3- لجنة مؤلفة من عاملين و/3/ عاملات

$$C_{8}^{2}\cdot C_{4}^{3}=\frac{8!}{2!\,6!}\cdot\frac{4!}{3!\,1!}=112$$

4- لجنة مؤلفة من عاملتين على الأكثر أي أن هناك :

عاملتين و/3/ عمال

أو عاملة و/4/ عمال

أو لا يوجد أي عاملة و/5/ عمال

$$C_4^2\cdot C_8^3+C_4^1C_8^4+C_4^0\cdot C_8^5$$
$$=6\cdot 56+4\cdot 7+1\cdot 65=672$$

5− لجنة مؤلفة من عاملتين على الأقل :

عاملتين و/3/ عمال

أو /3/ عاملات وعاملين

أو /4/ عاملات وعامل واحد

$$C_4^2\cdot C_8^3+C_4^3\cdot C_8^2+C_4^4\cdot C_8^1$$

طريقة $6\cdot 56+4\cdot 28+8=456$

ويمكن اختصار التحليل المزجي كما يلي :

	بدون تكرار	مع الإعادة	مع إعادة مفروض
التباديل P	$P_n=n!$	$P_n=n^n$	$\frac{n!}{k_1!k_2!=k_n!}$
التراتيب A	$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$A_n^n=n^k$	
التوافيق C	$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار /4/ طلاب من بين /20/ طالب لإرسالهم في بعثة دراسية .

الحل : طريقة $C_{20}^{4} = \frac{n!}{n!(n-k)!} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = 4845$

مثال : خمسة لاعبين كرة سلة يرغبون تشكيل فريق منهم، بكم طريقة يمكن تشكيل هذا الفريق؟

الحل : طالما لا توجد هنا وظائف لأعضاء فريق كرة السلة لذلك لا يلعب الترتيب أي دور في تشكيل الفريق وإلى N هنا توافيق

$$C_5^5 = 1 \Rightarrow C_n^n = 1$$

مثال : لدينا مجموعة من /8/ أشخاص، بينهم شخص اسمه، أحمد، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة منهم مؤلفة من خمسة أشخاص على ألا يكون أحمد من بين أعضاء اللجنة؟

الحل : يلاحظ أن عدد الأشخاص الذين ستشكل منهم اللجنة يساوي 7=1-8 لأن أحمد مستبعد من اللجنة . في حين أن عدد أعضاء اللجنة المراد تشكيلها يساوي k=5 فالحالة هنا إذن توافيق وذلك لعدم وجود وظائف محددة لأعضائها وعليه فإن :

$$C_5^{8-1} = C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \quad \text{طريقة}$$

مثال : كان على الطالب أن يجب في امتحان الرياضيات على /8/ أسئلة من عشرة

1- بكم طريقة يمكن أن يختار الطالب الأسئلة؟

2- إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى فبكم طريقة تم اختيار الأسئلة الخمسة الأخرى؟

3- بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان من الضروري أ يجيب على الأسئلة الربعة الأولى من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1- عدد طرق اختيار الأسئلة يساوي :

$$C_8^{10} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45 \quad \text{طريقة}$$

2- إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى فيمكنه اختيار الأسئلة الخمسة المتبقية من بين سبعة أسئلة بطرق عددها

$$C_{8-3}^{10-3} = C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \quad \text{طريقة}$$

3- عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى هي:

$$C_4^5 = C_1^5 = 5 \quad \text{طريقة}$$

أما عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها الأسئلة الأربعة المتبقية من بين الأسئلة الخمسة المتبقية هي :

$$C_4^5 = C_1^5 = 5 \quad \text{طريقة}$$

وعليه فإنه يمكن اختيار لـ /8/ أسئلة بطرق عددها؟

طريقة 5-5=25

شكل رقم (2-1) مخطط توضيحي لأهم مكونات التحليل التوفيقي