# كلية إدارة الاعمال

## الإحصاء 2

## STATISTICS 2

## محاضرة 7

## مدخل الى نظرية الاحتمالات

مدخل للاحتمالات

Introduction to Probability

الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الثاني

للعام 2023-2024

### 1.I. نشوء نظرية الاحتمالات في العصر الحديث وتطورها

يتفق المؤرخون على أن جذور علم الاحتمال في العصر الحديث ترست منذ منتصف القرن السابع عشر. فخلال القرن 17 قدم Blaise PASCAL ,(1662-1623) أول تصاميم لحساب الاحتمالات وفي نفس الفترة نشر Christian de HUYGENS سنة 1657 أول مدقق لحساب البدائي الاحتمالات الموسوم بـ "تحول حكم عدم التأكد للصدفة والحظ لقوانين العقل والهندسة" كما دعم Leibnitz بعدها هذه التصاميم بمألفه "فن التوفيقات". وفي القرن 18 ظهرت أعمال **Nicolas (Jacob) Bernouilli** الذي صاغ قانون الأعداد الكبرى وبعدها بفترة أعمال Moivre الذي تم فيها أول صياغة للقانون الطبيعي الذي نسبه للعالمان Laplace و Gauss. لكن البداية الحقيقية لنظرية الاحتمالات كانت بعد نشر (1827-1749) Pierre-Simon **Laplace** , مؤلفه " المدقق التحليلي للاحتمالات" عام 1813 والذي قدم فيه عرضا مفصلا لأسس نظرية الاحتمالات أين برهن على قانون النهاية المركزية. وتبعه -1855) Johann Carl Friedrich **Gauss** , (1777 مكتشف القانون الطبيعي ومصمم طريقة المربعات الصغرى. فقد كانت هذه الفترة مثمرة العطاء ومؤسسة للتفكير في المسائل المباريات ومنهجية التفكير العقلي والحساب في حالات عدم التأكد. وفي نفس الحقبة ظهرت المدرسة الروسية مع Tchébitchev , (1894-1821) الذي ادخل طريقة العزوم وتعميم القوانين وكذا أعمال Markov , (1922-1856) الذي أسس العوامل العشوائية (stochastic process) كفرع هاما لنظرية الاحتمالات و **Liaponov** الذي ألف الدوال المخصصة. كما لا نستهين بالمدرسة الأمريكية حيث نسجل Fisher وWiener و Neumann , الذين اشتغلوا على النظريات الفيزيائية ونظرية المعلومة التي بسطت تصورا جديدا لنظرية الاحتمالات. لكن يرجع الفضل الكبير لصياغة حساب الاحتمالات الى Andrey Nikolaevich **Kolmogorov** (1933)

**نظرية الاحتمالات : عبارة عن عدد يعبر عن إمكانية تحقيق حادث ما أو عدم تحقيقه فهو إذاً عدد حقيقي يعبر عن إمكانية تحقق الحدث بمعنى هو قيمة رقمية لتوقعات حدوث حدث ما وهذه القيمة في أغلب الأحيان عبارة عن نسبة حدوث هذا الحدث أو الفصل إذا تكرر نفس الموقف تحت نفس الظروف لعدد كبير من المرات وتنحصر قيمة الاحتمال بالمجال** $0 \le p_r \le 1$ .

**المبادئ الأساسية لفهم وقياس الاحتمال :**

**a- فراغ العينة :**

هو مجموع النتائج التي نحصل عليها من تجربة معينة فمثلاً عند اختيارنا الورقة واحدة من أوراق اللعب المكونة من /52/ ورقة فإن عدد المحاولات التي يتم فيها اختيار هذه الورقة يساوي /52/ محاولة أي أن فراغ العينة في هذه الحالة /52/

**b- التجربة العشوائية :**

هي كل تجربة لم تكن نتيجتها النهائية معروفة مسبقاً بشكل مؤكداً بمعنى كل تجربة يمكن معرفة نتائجها الممكنة بشكل مسبق ولكن لا يمكن التنبؤ بإحدى هذه النتائج قبل إجراء بشكل مؤكد مثال ذلك .

- عند رمي قطعة نقود متزنة فإن النتيجة لابد أن تكون صورة أو كتابة ولكن لا يمكن الجزم بأن ما سيظهر الصورة أم الكتابة .
- عند رمي حجر فرد لابد وأن تكون النتيجة أحد الأوجه الستة [ 1,2,3,4,5,6 ] ولكن لا يمكن الجزم بظهور وجه معين من الأوجه الستة بصورة مؤكدة .

**c- الحالات الممكنة .**

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء التجربة ممثلاً عند رمي قطعة تعود تكون نتيجتها صورة أو كتابة فيقال أن عدد الحالات الممكنة.

**d- الحالات الملائمة :**

هي النتائج التي تؤدي إلى تحقق الحادث الذي هو موضوع الدراسة فإذا كان الحادث الحصول على عدد فردي في حالة رمي حجر نرو فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على /1 أو 3 أو 5/ فتسمى هذه الأوجه بالحالات الملائمة أو المواتية .

وبناءً عليه فالاحتمال هو التعريف المبني على فكرة التكرار النسبي عند تكرار تجربة ما /n/ وكان n(A) هو عدد المرات التي تحقق فيها الحادث /A/ من /n/ مرة لكان التكرار النسبي للحادث هو :

$$p(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{n(A)}{N}$$

**مثال :**

احتمال ولادة ذكر في مجتمع ما خلال عام وليكن عدد المواليد n= 20000 مولود وكان عدد المواليد الذكور m= 10500 ذكر فاحتمال ولادة ذكر يساوي :

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{10500}{20000} = 0.52$$

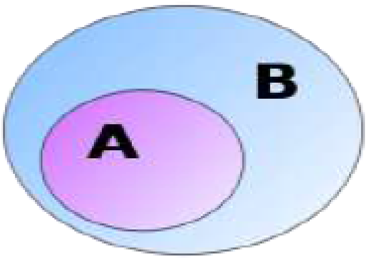
**e- الحالات المتماثلة :**

إذا كان لدينا عدة كرات متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم ووضعناها في كيس وسحبنا كرة واحدة فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس الاحتمال في السحب أي متكافئة الظهور عند السحب .

*الحدث Event* : نسمي حدثا كل مجموعة جزيئية من فضاء العينة أو أي مجموعة من النتائج الممكنة. والحدث هو قضية منطقية أو خاصية مؤكدة أم لا من خلال نتيجة التجربة. وننسب لكل حادثة مجموعة تضم النتائج الممكنة التي تحقق القضية أو الخاصية.

**مثال** : إذا كان A حدث الحصول على الأرقام الفردية عند رمي حجر نرد غير متحيز مرة واحدة.
فإن $A = \{1, 3, 5\}$

التجربة والحدث هي مفاهيم لا يجب الخلط بينها. التجربة يتولد عنها أحداث (نتائج أو حالات) مختلفة. التجربة مفهوم مرن يتطلب أحيانا نظرة ذكية وخيال. من المهم اكتساب هذه المهارة في تحديد ما هي التجربة أو التجارب في مسألة ما لأن ذلك هو المفتاح لفهم و حل المسألة.
وبما أن جميع الأحداث هي عبارة عن مجموعة، فأنها عادة ما تكون مكتوبة على أنها مجموعات والتي يمكن تمثيلها بيانيا باستخدام أشكال (الرسوم البيانية لأشكال 'مخطط فين' Venn diagrams) المبينة أسفل.




الشكل.1 - مخطط فين -
**النتائج المكنة لتجربة**

فإذا إفترض أن $\Omega$ هي $(\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ مجموعة النتائج المكنة لتجربة منتهية وكانت $\ell$ مجموعة أجزاء $\Omega$. فإن كل عنصر من $\ell$ يدعى **حدثاً** (أو **حادثة**) مرتبطاً بالتجربة

**أنواع الحوادث الاحتمالية**

**1- بالحادث البسيط :**

هو الحادث غير القابل للتجزئة أي هو الحادث الذي يتألف من مشاهدة واحدة فقط مثال : عند رمي حجر نرو فالإمكانيات الممكنة لهذه التجربة هي : n=[1,2,3,4,5,6] .

**f- الحوادث المركبة :**

هي الحوادث التي يمكن تفكيكها إلى حوادث أبسط مثال الحصول على رقم فردي عند رمي حجر النرو حيث أن هذا الحادث مركباً من ثلاثة أرقام هي: (1,2,3) .

**g- الحادث المستحيل :**

هو الحادث الذي يستحيل وقوعه ويرمز له بـ $\phi$

مثال : إذا كان الحادث (A) حادث يعبر عن مجموع الأرقام على الوجهين العلويين عند رمي حجر النرو فإن حصولنا على العدد /13/ حادث مستحيل لأنه أكبر من مجموع أعداد أي وجهين

$p(\phi)=0 \qquad p(A)=(A\cup\phi)$ .

**h- الحوادث الأكيدة :**

الحادث الأكيد هو الحادث الذي يساوي قضاء العينة نفسه

مثال : حصولنا على أحد الأرقام الستة عند رمي حجر النرو .

**i- الحوادث المستقلة :**

يعتبر الحادثين A ,B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما لا يؤثر في وقوع الحادث الآخر أو عدم حدوث الآخر .

مثال : عند إلقاء قطعة تعود فإن ظهور الصورة حادث مستقل عن ظهور الكتابة أو عند رمي حجر نرو حوادث مستقلة عن بعضها البعض لأن الحصول على أي رقم حادث مستقل عن الحصول على الأرقام الأخرى .

**j- الحوادث المتنافية :**

نقول على حادثين إنهما متنافيان إذا كان وقوع إحداهما ينفي وقوع الآخر

مثال: إلقاء قطعة نقود فإن الحصول على الصورة فيفي الحصول على الكتابة وبالتالي فإن تقاطع حادثين متنافيين حادث مستحيل $A\cap B=\phi$ والحوادث المتنافية هي حوادث مستقلة .

**k- الحوادث المتقاطعة :**

نقول عن حادثين A ,B أنهما متقاطعان إذا كان هناك إمكانية تحقق الحادث A والحادث B في آن واحد أي $A\cap B$ .

**l- اجتماع حادثين :**

نقول عن اجتماع حادثين B, A أنه حادث آخر C يتحقق إذا تحقق الحادث A أو الحادث B أو A و B معاً ويعبر عن ذلك بـ $A \cup B$ .

**m- الحوادث المتممة :**

عبارة عن الحادث الذي يتحقق إذا لم يتحقق الحادث الأصلي أي الحادث المتمم يرمز له بـ $\bar{A}$ يتحقق إذا لم يتحقق الحادث A أي : $\bar{A} = \Omega - A$

مثال : متمم الحادث A الممثل لحادث الحصول على عدد زوجي عند رمي حجر النرو هو الحادث $\bar{A}$ الممثل لحصولنا على عدد فردي وبالتالي فإن $A \cup B$ حادث أكيد .

ملاحظة : إن الحادثين B, A حادثان يستقلان إذا كان حدوث إحداهما لا تؤثر على حدوث الآخر . مثال : نتائج رمي حجر نرو ونشير هنا إلى أن الحوادث المتنافية هي بالضرورة مستقلة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح بمعنى أن الحوادث غير المتنافية قد تكون في تجربة مستقلة عن بعضها البعض وفي تجربة أخرى غير مستقلة وهذا يتعلق بطبيعة عملية السحب ويمكن تميز حالتين من السحب

*التجربة Experience* : نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة أو تسجيل ما، يتم عن طريق هذه العملية.

*المجموعة Set* : نسمي مجموعة كل قائمة أشياء أو أعداد أو خليط منهما، وكل شيء من القائمة أو عدد منها هو عنصر من المجموعة. كما أنه يمكن تعريف المجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها بدلا من سرد قائمة عناصرها.

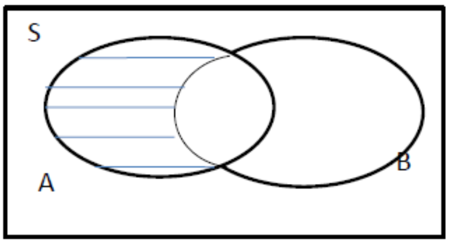
## IV. الفرق بين حادثتين

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A-B وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B. وتقع الحادثة A-B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

وباستخدام المجموعات فإن حادثة الفرق A-B هو

$$A - B = \{x \in S : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

A-B




.

## ❑ الحوادث الشاملة

❑ يقال بأن الحوادث $A_1,A_2,...,A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحده منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \cup A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$$

### مثال

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن

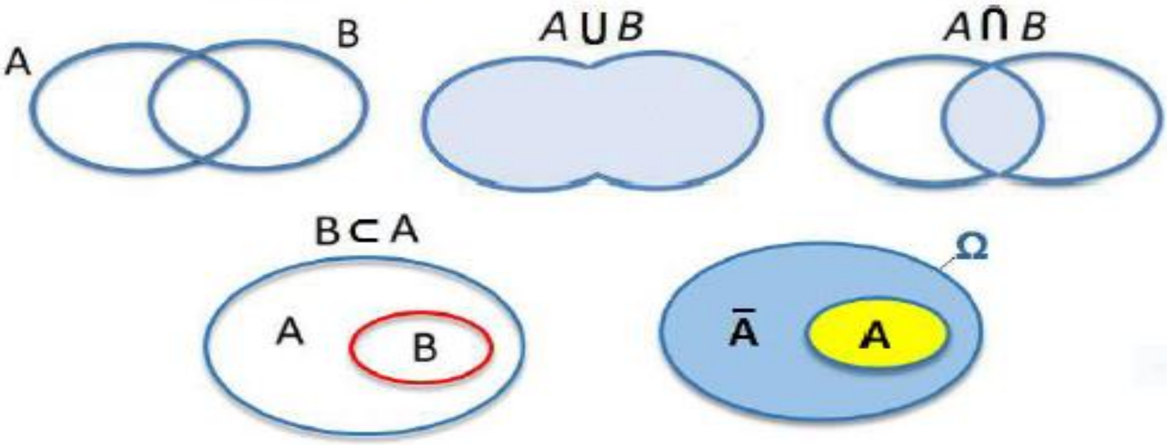
1. الحادثتان A={2,4,6} و B={1,3,5} حادثتان:

أ. متنافيتان لأن: $A \cap B = \emptyset$

ب. شاملتان لأن: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = S$

2. الحوادث $A_1 = \{1,2,3\}$ و $A_2 = \{2,3,4\}$ و $A_3 = \{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

- يدعى $\bar{A}$ **الحدث المكمل** (*Complementary events*) للحدث A هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة $\Omega$ وغير موجودة في A ومنه فإن اتحادهم يساوي فضاء العينة $\Omega$ بمعنى أن الحدث $\bar{A}$ متمم (مضاد) للحدث A فإن : $\Omega = A \cup \bar{A}$؛
- حدثين A و B **حدثان متنافيان** (*Mutually Exclusive Events*) حين يستحيل تحققهما في نفس الوقت، ونقول أيضا على أنهم متعارضين أو متضادين وحينها فإن $A \cap B = \emptyset$؛
- $\bar{A} \cup A = \Omega \qquad \bar{A} \cap A = \emptyset \qquad \bar{\bar{A}} = A \qquad \bar{\Omega} = \emptyset \qquad \bar{\emptyset} = \Omega$




الشكل.2 - بعض العمليات حول المجموعات للتعبير عن الأحداث

- كما يمكن توظيف بعض العمليات حول المجموعات الجزئية A و B و C من $\Omega$، كما يلي:

-القوانين التبادلية Commutative: $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$

-القوانين التجميعية Associative: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

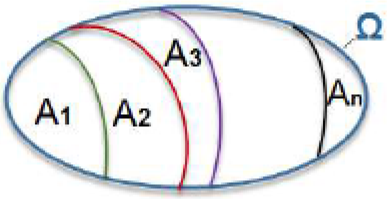
-القوانين التوزيعية Distributive : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

-قوانين ديمورغان (De Morgan's Laws) : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ و $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- **نظام الأحداث الشاملة** exhaustive system events : نقول على أن سلسلة الحوادث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ تشكل نظام أحداث شاملة حين تشكل الحوادث $A_i$ مجموعة جزئية لـ $\Omega$ أي أن :

1. $\emptyset \neq A_i \Leftarrow \forall A_i$
2. كل حوادث النظام متنافية بالمثنى: $\forall(i \neq j), \quad (A_i \cap A_j) = \emptyset$
3. يشكل اتحاد حوادث النظام الفضاء الشامل أي $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$




**الشكل**.3 - نظام الشامل للأحداث

## 3.I . جبر الأحداث الابتدائية σ-algebra

لنفترض أن مجموع الحوادث تكون الفئة $\ell$ من أجزاء $\Omega$ حيث نستطيع تعريف الفئة $\ell$ بالمسلمات الثلاث:

-لكل حدث A نسبب إليه مكمله $\overline{A}$ من $\Omega$ ، إذا $A \in \ell \Leftarrow \bar{A} \in \ell$ حيث إذا A يتحقق $\overline{A}$ لا يتحقق

-لكل مجموعة منتهية من الحوادث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ من $\ell$ فإن $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \ell$

- نعرف **الحث الأكيد** $\Omega$ حيث $\Omega \in \ell$

كما نستطيع استنتاج أن:

-**الحدث المستحيل** هو $\emptyset$ حيث $\emptyset \in \ell$

-لكل الحوادث A و B فإنه إذا $A, B \in \ell \quad \Leftarrow \quad A \cap B \in \ell; A \cup B \in \ell$

-لكل مجموعة منتهية من الحوادث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ من $\ell$ فإن $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \ell$

-إذا كان فضاء العينة $\Omega$ يحتوي على $n$ عنصر ($card(\Omega)=n$) ، جبر الاحداث σ-algebra تتكون حينها من $2^{card(\Omega)} = 2^n$ عنصر.

تعرف كل هذه الخصائص على أن الفئة $\ell$ تشكل جبر σ–الأحداث (σ-algebra) أو عشيرة الحوادث.

وعليه تعتبر $\ell$ جبر-σ لفضاء العينة التي نسمي كل عنصر من عناصرها حدثا. ولكي نستطيع أن نقول أن $\ell$ تشكل جبر-σ الأحداث، يقتضي بالتقديم أنها تحوي $\Omega$, بحيث أن مكملة أي حدث تشكل حدثا أيضا، واجتماع أي تسلسل أحداث هو حدث أيضا.

أي باختصار كي تشكل $\ell$ جبر-σ الأحداث، يقتضي أن:

$$-\Omega \in \ell$$
$$-\forall A \in \ell \Rightarrow \bar{A} \in \ell$$
$$-\forall A_{i,i=1,\ldots,n} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \ell$$

### 1.4.I. المفهوم العملي والتقليدي للاحتمال:

يعرف الاحتمال على أنه دراسة التجارب العشوائية حيث يقيس فرص وقوع حدث ما. أي أن الهدف في نهاية المطاف هو أن نقرن كل حدث معرف على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة إحتمال الذي يمثل مقياسا عدديا يرمز له بالرمز P(A) ويقيس فرصة وقوع الحادثة ويكون محصورا في المجال بين 0 و1.

**<u>السحب مع الإعادة :</u>**

كيس فيه /25/ كرة سوداء و/10/ كرات بيضاء نقوم بسحب كرتين على التوالي يرمز بـ A لحادث يسحب كرة سوداء وبـ B لحادث السحب كرة بيضاء فلو سحبنا كرة في المرة الأولى ولنفترض أنها سوداء وأعيدت إلى الكيس وبالتالي فإن عدد المرات الممكنة لم يتغير وبالتالي فإن احتمال سحب الكرة الثانية لا يتأثر فالحادثان مستقلان .

**<u>: السحب بدون إعادة</u>**

عندما نسحب الكرة الأولى ويسجل لونها ولم تعاد إلى الكيس نجد أن عدد الحالات مثلاً البيضاء تنقص بمقدار كرة واحدة في السحبة الثانية وفي مثل هذه الحالات نقول أن A هو حادث غير مستقل عن الحادث B وتسمى هذه الحوادث غير مستقلة أو حوادث شرطية .

### 1.4.I. المفهوم العملي والتقليدي للاحتمال:

يعرف الاحتمال على أنه دراسة التجارب العشوائية حيث يقيس فرص وقوع حدث ما. أي أن الهدف في نهاية المطاف هو أن نقرن كل حدث معرف على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة إحتمال الذي يمثل مقياسا عدديا يرمز له بالرمز P(A) ويقيس فرصة وقوع الحادثة ويكون محصورا في المجال بين 0 و1.

**تعريف الاحتمال :**

**الاحتمال هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد الصحيح حيث تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدوث والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع ويمكن حسابه بطريقتين هما:**

1- **الاحتمال النظري:** هو عبارة عن نسبة عدد الحالات الملائمة إلى عدد الحالات الممكنة الحدوث ويعبر عنه بالعلاقة .

$$p(A)=\frac{n(A)}{N(s)}$$

ويصلح هذا التعريف فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة أو مكافئة الظهور .

**مثال: كيس فيه /8/ كرات حمراء و/3/ كرات بيضاء ما هو احتمال سحب كرة بيضاء .**

**الحل: عدد الحالات الممكنة = /11/ وعدد الحالات الملائمة = /3/**

احتمال سحب كرة بيضاء يساوي :

$$p(B)=\frac{nB}{Ns}=\frac{3}{11}$$

**مثال:** ماهو احتمال ظهور رقم زوجي عند رمي حجر النرو مرة واحدة .

**الحل:** S=(1,2,3,4,5,6) عدد الحالات الممكنة $n(s)=6$

نفرض أن A حادث ظهور رقم زوجي أي أن

$$A=[2,4,6]=n(A)=3$$

ومنه

$$p(A)=\frac{3}{6}=0.5$$

2- **الاحتمال التجريبي** : عند إجراء تجربة عشوائية مرات متتالية عددها /n/ مرة وكان عدد مرات ظهور حادثة ما فيها ولتكن A هو m فإن احتمال حدوث الحادثة A يعطى بالعلاقة :

$$p(A)=\lim_{x\to\infty}\frac{m}{n}$$

ويسمى المقدار $\left(\frac{m}{n}\right)$ بالتكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي .

**مثال:** سحبت ثلاث ورقات بطريقة عشوائية من ورق اللعب والبالغ /52/ ورقة ماهو احتمال الحصول على 1- ملك . 2- أس .

**الحل:** إن عدد الطرق الممكنة لاختيار ملك واحد هو:

$$C_4^1=\frac{4!}{1!(4-1)!}=4$$

إن عدد الطرق الممكنة لاختيار /2/ أس هو:

$$C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$$

إذن عدد الطرق الممكنة لاختيار /1/ ملك و/2/ أسين هو:

$$m = C_4^1 * C_4^2 = 4*6 = 24$$

∴ عدد الطرق الممكنة لاختيار/3/ ورقات من بين العدد الكلي /52/ هو:

$$n \text{ أي } C_{52}^3 \qquad C_{52}^3 = \frac{52!}{3!49!} = 2200$$

ويمكن فإن احتمال الحصول على ملك واحد وأسين هو :

$$p(A) = \frac{m1}{n} = \frac{24}{2200} = 0.0011$$

### I.3.4. التعريف التجريدي الرياضي للاحتمال:

**بديهيات كولموغروف ونظرية الاحتمال الأساسية**

(Kolmogorov Axioms Of Probability)

ترتكز النظرية الحديثة للاحتمالات على البديهيات التالية:

**تعريف 1:**

ويعرف الاحتمال على $(\Omega, \ell)$ أو قانون احتمالي على أنه أية دالة تطبيق $P$ الذي منطلقها الصف $\ell$ من الأحداث ومستقرها المجال الحقيقي $[0,1]$ وتتمتع بتحقيق البديهيات التالية:

1. لكل حدث A من الصف $\ell$ للأحداث ننسب إليه احتماله $0 \le P(A) \le 1$؛
2. احتمال الحدث المؤكد $P(\Omega) = 1$؛
3. لأي مجموعة منتهية من الأحداث $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ والمتنافية بالتبادل فإن $P(\cup A_i) = \sum P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) \ldots + P(A_n)$.

**تعريف 2: ( الفضاء الاحتمالي Probability space )**

تدعى الثلاثية $(\Omega, \ell, P)$ فضاء الاحتمال الموافق للتجربة. اين يجسد الفضاء الاحتمالي نموذجا رياضيا لتجربة عشوائية ما. ويتكون من الثلاثية $(\Omega, \ell, P)$ ، حيث يمثل $\Omega$ فضاء العينة أي مجموعة الأحداث الابتدائية ويمثل $\ell$ جبر-σ الأحداث الابتدائية (عشيرة الحوادث σ-algebra) فيما يمثل P قياس احتمالي probability measure على $\ell$.

ومن المهم أن نلاحظ أن P تصوغ دالة معرفة على $\ell$ و ليس على فضاء العينة $\Omega$.

ونعرف القياس الاحتمالي $P : \ell \to [0,1]$, على أنه دالة معرفة على الفئة $\ell$ حيث:

- لأي مجموعة منتهية من الأحداث المتنافية بالتبادل $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \ell$ فإن $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$
- احتمال الحدث المؤكد $P(\Omega) = 1$

### 4.4.I. بعض النظريات الأساسية على الاحتمال:

استناداً على البديهيات السابقة يمكن أن نستنتج النظريات التالية:

1) لكل حدث مستحيل $P(\emptyset) = 0$.

2) إذا كان $\bar{A}$ مكمل للحدث A فإن $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3) - إذا كان A و B حدثين وإذا كان $A \subset B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

4) إذا كان A و B حدثين فإن: (بدهية الانفصال Disjunctive Axiom)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

والمسماة علاقة بوانكاريه Poincaré[1] وعامة لأي مجموعة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ من الأحداث فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1\le i1<i2<\cdots<ik\le n} P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik})\right)$$

5) إذا كانت الأحداث B،A تمثل أحداثا متنافية فإن:

$$(A \cap B) = \emptyset \text{ لأن } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6) لأي حدثين A و B فإن: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

7) لأي مجموعة منتهية من الأحداث $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ فإن: $P(\cup A_i) \leq \sum P(A_i)$

8) إذا كانت $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ وكانت الأحداث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ أحداثاً متنافية فإن: $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

9) لأي مجموعة من الأحداث $\{A_1, A_2, \dots\}$ حيث $\varphi \overset{i=1}{\downarrow} A_i$ فإن $lim_{i\to\infty} P(A_i) = 0$ (استمرار تسلسلي رتيبي monotone sequential continuity)

10) **نظرية الاحتمالات الكلية (Theorem of total probabilities):**

ليكن نظام شامل من الأحداث $B_i$ فإنه:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) \quad : \quad \forall A$$

**خواص الاحتمال :**

1- إن قيمة احتمال لأي حادثة ولتكن (A) تقع ضمن المجال (0.1) أي $0 \leq p(A) \leq 1$.

2- إن احتمال المجموعة الشاملة $p(s)$ يساوي الواحد أي أن $p(s) = 1$ .

3- إن احتمال المجموعة الخالية يساوي صفر أي أن $p(\phi)=0$ .

4- إذا كان لدينا حادثين B, A وتنافين أي أن $A \cap B = \phi$ فإن احتمال حدوث A أو B هو :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

5- إذا كان لدينا /n/ من الحوادث المتنافية ثنائياً هي $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أي أن حدوث $A_1$ أو $A_2$ هو : $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2)$ .

6- إذا كان لدينا /n/ من الحوادث المتنافية ثنائياً هي : $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أي أن $A_1 \cap A_2 = \phi$ لكل قيم $i \neq j$ فإن

$$p(A_, \cup A_2 \cup, \ldots\ldots, \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots. + p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

7- إذا كان لدينا عدد لا نهائي من الحوادث المتنافية ثنائياً $A_1, A_2, \ldots., A_n$ أي أن $A! \cap A! = \phi$ لكل قيم $i = j$ فإن :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots.) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

8- إذا كان A حادث ما وكان $\bar{A}$ متمم الحادث A فإن :

$$(A \cup \bar{A}) = \Omega = s$$
$$p(A \cup \bar{A}) = p(s) = p(\Omega)$$
$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$
$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$
$$p(\bar{A}) = 1 - (A)$$

**مثال :** إذا كان احتمال وصول طالب إلى المحاضرة في الوقت المحدد 0.7 فما احتمال وصول الطالب متأخراً ؟

$$p(\bar{A}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

نظرية : إذا كان B, A أي حادثتين في فضاء العينة $\Omega$ فإن :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

**مثال:** شب حريق في إحدى العمارات واتصل الحارس بمركزين للإطفاء فإذا كان احتمال وصول الإطفائية الأولى خلال دقيقتين يساوي 0.9

واحتمال وصول الاطفائية الثانية خلال دقيقتين يساوي 0.8

واحتمال وصول الاثنين معاً إلى المكان خلال دقيقتين يساوي 0.72

فما هو احتمال وصول الاطفائية الأولى والثانية خلال دقيقتين ؟

**الحل :**

A وصول الاطفائية الأولى .

B وصول الاطفائية الثانية .

$A \cap B$ وصول الاطفائيتين معاً خلال دقيقتين .

وبالتالي فإن احتمال وصول الاطفائية الأولى أو الثانية خلال دقيقتين هو احتمال اتحاد الحادثين B, A وبالتالي :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$= 0.90 + 0.80 - 0.72 = 0.98$$

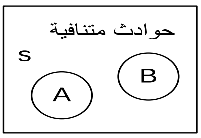
**الاحتمالات المركبة :**

- **قواعد جمع الاحتمالات ( حوادث متنافية ) :**

إذا كانت لدينا الحوادث A و B حوادث متنافية أي لا يمكن أن تتحقق معاً بمعنى أن تقاطعهما مستحيل أي أن : $A \cap B = \phi$

بمعنى آخر الحوادث المتنافية إن حدوث أحدهما يؤدي إلى استحالة حدوث الآخر أو أي من الحوادث الأخرى فإن :

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث



وبالتالي فإن احتمال اجتماع حادثتين متنافيتين A و B يساوي إلى مجموع احتمالهما أي:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

**أ- في حالة كون الحوادث متنافية**

إذا كانت الحوادث $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن

**احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث**

فإذا كان B ، A حادثين متنافيين كما في الشكل (1)

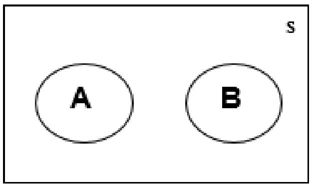
فإن P (A أو B) = P(A) + P(B)

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

**حوادث متنافية**

P (AUB) = P (A) + P (B)

**الشكل (1)**




**حوادث متنافية**

## مثال:

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

احتمال الحصول على رقم 5 أو 6

احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

حيث أن الحصول على رقم 5 أو 6 حادثتان متنافيتان ، أي أن:

$A_1$={الحصول على الرقم 5} ، و $A_2$= {الحصول على الرقم 6} فإن:

$P(A_1 \cup A_2)=(1/6)+(1/6)=1/3$

وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم 2 أو رقم 4 أو رقم 6 وكلها حوادث متنافي، أي أن:

$A_1$={الحصول على الرقم 2} ، و $A_2$= {الحصول على الرقم 4} ، و $A_3$= {الحصول على الرقم 6} فإن:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=(1/6)+(1/6)+(1/6) = 1/2$

**نظرية :**

إن احتمال تحقق اجتماع /n/ حادثاً متنافياً يساوي احتمالات تلك الحوادث أي :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1} p\left(A_i\right)$$

**نتيجة :**

إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ متنافية وتشكل مجموع كلية شاملة من الحوادث فإن مجموع احتمالاتها يساوي الواحد أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i)=1$$

**البرهان** : بما أن $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ تشكل مجموعة كلية إذن :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 .... \cup A_n = \Omega$$
$$p(\Omega)=1$$
$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 .... \cup A_n)=1$$

وبما أن الحوادث متنافية إذن :

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+...+p(A_n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} p(A)=1$$

**نتيجة 2** :

بما أن الحادث A ومتممة $\bar{A}$ حادثان متنافيان ويشكلان مجموع كلية إذن يكون لدينا:

$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

**مثال:** نفترض لدينا صندوق يحوي 200 كرة منها 70 كرة حمراء (R) و80 كرة بيضاء (W) و50 كرة سوداء (B) .

سحبنا كرة بشكل عشوائي المطلوب حساب احتمال أن تكون الكرة :

1- حمراء أو بيضاء .

2- حمراء أو سوداء .

**الحل:**

نرمز بـ R إلى حادث الكرة الحمراء واحتمال حدوثها = $\frac{70}{200}$

نرمز بـ W إلى حادث الكرة بيضاء = $\frac{80}{200}$

نرمز بـ B إلى حادث الكرة سوداء = $\frac{50}{200}$

وبالتالي فإن الحوادث B, W, R حوادث متنافية لأن تحقق أياً من الحوادث يلغي تحقق الحوادث الأخرى . إن الحادث يتحقق إذا كانت الكرة حمراء أو بيضاء وبالتالي :

$$p(R \cup W) = p(R) + p(W)$$
$$= \frac{70}{200} + \frac{80}{200} = \frac{150}{200}$$

1- إن الحادث الثاني يتحقق إذا كانت الكرة حمراء أو سوداء أي :

$$p(R \cup B) = p(R) + p(B)$$
$$= \frac{70}{200} + \frac{50}{200} = \frac{120}{200}$$

**مثال:** يطلق أحد الرماة طلقة واحدة على هدف مؤلف من ثلاثة مناطق I II III

فإذا علمنا أن احتمال وقوع الإصابة في هذه المناطق هي:

I=0.15 II=0.23 III=0.12 على الترتيب فما هو احتمال عدم إصابة الهدف؟

**الحل :**

نرمز لحادث عدم إصابة الهدف بـ A وعندها يكون حادث الإصابة هو الحادث المتمم $\bar{A}$ ومن الواضح أن إصابة الهدف ( الحادث $\bar{A}$ ) يمكن أن يتحقق بتحقق أحد الحوادث.

$\bar{A}_1 \leftarrow$ ضمن المنطقة I

$\bar{A}_2 \leftarrow$ ضمن المنطقة II

$\bar{A}_3 \leftarrow$ ضمن المنطقة III

أي : $\bar{A} = \bar{A} \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$

وبما أن الحوادث متنافية يكون :

$$p(\bar{A}) = p(\bar{A}_1) + p(\bar{A}_2) + p(\bar{A}_3)$$
$$= 0.15 + 0.23 + 0.17 = 0.55$$

وعندها يكون لدينا :

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$
$$= 1 - 0.55 = 0.45$$

**مثال:** مكتبة تتضمن :

20% كتب إنكليزية E ، 30% كتب عربية A ، 25% كتب اسبانية , 15 % كتب فرنسية

أما نسبة الكتب الألمانية G= 10% =G=100-90

سحبنا كتاب

- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الألمانية: $p(G)=10\%$ أي 0.10
- احتمال أن يكون باللغة E أو A : $p(E)=0.20 \quad p(A)=0.30$
- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الفرنسية: $p(F)=0.15$
- احتمال أن يكون الكتاب باللغة الإسبانية: $p(S)=0.25$

إن مجموع الحوادث :

$$p(E)+p(A)+p(S)+p(F)+p(G)=1$$

1- احتمال أن يكون الكتاب المسحوب باللغة الألمانية :

$$\begin{aligned} p(G) &= 1-\left[p(E)+p(A)+p(S)+p(F)\right] \\ &= 1-(0.20+0.30+0.25+0.15)] \\ &= 1-0.90=0.10 \end{aligned}$$

2- احتمال أن يكون الكتاب باللغة E أو A :

$$p(E\cup A)=p(E)+p(A)=0.20+0.30=0.50$$

3- احتمال أن يكون الكتاب G, F, E :

$$\begin{aligned} p(G\cup F)\cup E) &= p(G)+p(F)+p(E) \\ &= 0.10+0.15+0.20=0.45 \end{aligned}$$

4- احتمال ألا يكون الكتاب باللغة E أو A :

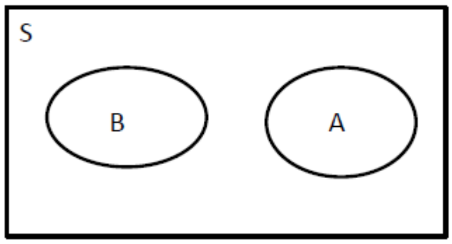
نرمز لحادث كون الكتاب باللغة الإنكليزية أو العربية بـ F والحادث المتمم $\bar{F}$

$$\begin{aligned} p(F)+p(\bar{F})+ &= 1 \\ p(\bar{F}) &= 1-p(F) \\ &= 1-0.50=0.50 \end{aligned}$$

وهو احتمال ألا يكون الكتاب باللغة الإنكليزية أو العربية .

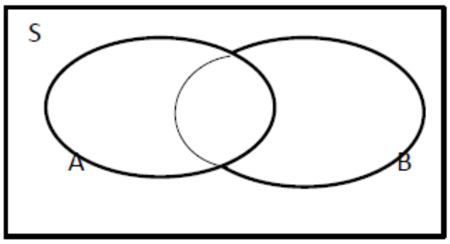
## ❑ الحوادث المتنافية (المنفصلة)

يقال بأن الحادثتين A وB متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين , أي أن $A \cap B = \emptyset$ وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معاً أي يستحيل وقوعهما معاً. فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.




$A \cap B = \emptyset$

حادثتان متنافيتان (منفصلتان)

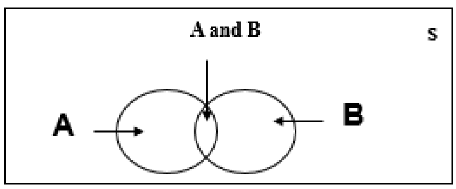



$A \cap B \neq \emptyset$

حادثتان غير متنافيتين (غير منفصلتين)

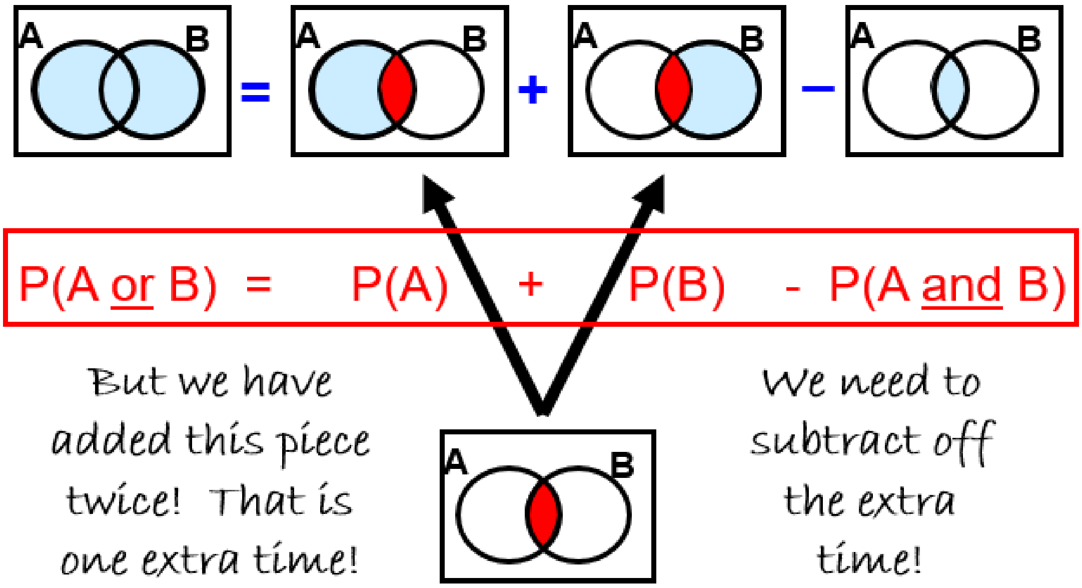
### ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي

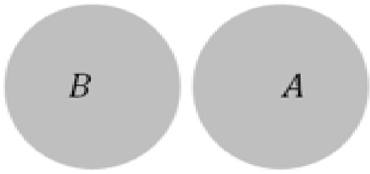



حوادث غير متنافية

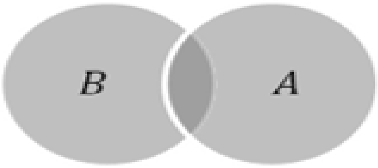
## The Addition Rule for Probability



## 6 – 4 – I الأحداث المانعة غير المانعة




حدثان مانعان




حدثان غير مانعان

لحساب احتمال وقوع حدثان مانعان نستخدم القانون التالي:

$$P(A \; or \; B) = P(A) + P(B)$$

لحساب احتمال وقوع حدثان غير مانعان نستخدم القانون التالي:

$$P(A \; or \; B) = P(A) + P(B) - P(A \; and \; B)$$

1.3. **قاعدة جمع الحوادث المتنافية**: نقول أن الحدثان A و B متنافيان إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**مثال 4.2**: ما هو احتمال الحصول على الرقم 4 أو 6 عند رمي حجرة نرد؟، لدينا احتمال الحصول على أي حادث من النتائج الممكنة هو:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

وبالتالي:

$$P(4 \cup 6) = P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2.3. **قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية:** نقول أن الحدثان A و B غير متنافيين إذا كان وقوع الحادث A لا يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نقوم بطرح الاحتمال $P(A \cap B)$ لكي نتجنب حسابه مرتين، لأنه في الأصل ضمن الاحتمال $P(A)$ و $P(B)$.

الآن P (A) + P (B) تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً ، وبهذا فإنه في حالة جمع P (A) و P (B) فإننا نجمع
P (A و B) مرتين ، لهذا لابد من طرح ( P (A و B مرة واحدة لنحصل على الاحتمال P (A أو B) وهذا هو :

P (A او B )= P (A) + P (B) – P (A و B)

أو

$$\mathbf{P (A \cup B) = P (A) + P(B) - P (A \cap B)}$$

<u>ملاحظة هامة :</u>

إن الصيغة السابقة تعتبر قانوناً عاماً صالحاً لجمع أنواع الحوادث وإذا كان لدينا n حادث مثلاً ثلاثة حوادث A, B, C

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

أي إذا كان لدينا n حادث فيكون :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i<j}^{n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) \; (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n)$$

**مثال :**

مثال إذا كان A حادث اجتياز طالب لامتحان الإحصاء يساوي : $p(A)=0.80$ وكان B حادث اجتيازه لامتحان الرياضيات $p(B)=0.75$ فإن احتمال اجتياز الطالب لأحد الامتحانين على الأقل يساوي $p(A\cap B)=0.65$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=0.80+0.75-0.65=0.90$$

**مثال:**

احتمال قبول طالب في جامعة دمشق $p(A)=0.60$

في جامعة تشرين $p(B)=0.30$

في جامعة حلب $p(C)=0.10$

أوجد احتمال حصول هذا الطالب على قبول واحد على الأقل .

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)$$
$$-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$
$$=0.60+0.30+0.10-(0.60*0.30)-(0.60*0.10)$$
$$-(0.30*0.10)+(0.60*0.30*0.10)$$
$$=0.60+0.30+0.10-0.18-0.06-0.03+0.018=0.712$$

**مثال:** إن علمت أن عدد طلاب قسم المحاسبة 250 طالباً تقدموا جميعاً لاختبار الرياضيات والمحاسبة/1/ وكانت نسبة النجاح في مقرر الرياضيات 0.70 ونسبة النجاح في إحدى المقررين على الأقل 0.88 واحتمال النجاح في المقررين معً 0.42. **أوجد عدد الطلاب الراسبين في مقرر المحاسبة/1/ .**

**الحل :**

نرمز لاحتمال نجاح الطلاب في الرياضيات بـ $p(A)$

ونرمز لاحتمال نجاح الطلاب في محاسبة/1/ بـ $p(B)$

فيكون :

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$0.88=0.70+p(B)-0.42$$
$$p(B)=0.88+0.42-0.70=0.60$$

وهي احتمال نجاح الطلاب في مقرر المحاسبة /1/ .

احتمال الرسوب في مقرر المحاسبة /1/ يساوي :

$$p\left(\hat{B}\right)=1-p\left(B\right)=1-0.60=0.40$$

ومنه يكون عدد الطلاب يساوي : طالباً 100 $n=0.40*250=100$

**3.3. قاعدة ضرب الحوادث المستقلة**: نقول أن الحدثان A و B مستقلين إذا كان وقوع الحادث A لا يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A غير مرتبط بوقوع الحادث B . وبالتالي يكون: (ليبشتز، 2003)

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

**مثال 6.2**: نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة. لأن نتائج قطعة نقود الأولى لا يؤثر على نتائج الرمية الثانية. فإذا رمزنا لصورة قطعة النقود الأولى ب A وصورة قطعة النقود الثانية ب B فإن احتمال ظهور الصورة هو:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

وبنفس الطريق يمكن حساب احتمال رمي عدد $n$ من قطع النقود.

**4.3. قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة**: نقول أن الحدثان A و B غير مستقلين إذا كان وقوع الحادث A يؤثر على وقوع الحادث B أو إذا كان وقوع أحدهما مرتبط بوقوع الآخر. وبالتالي يكون:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B}/A)$$

ونقرأ: احتمال وقوع الحدثين A و B يساوي احتمال وقوع الحادث A مضروب في احتمال وقوع الحادثB علما أن الحادث A قد تحقق.

ويمكن استنتاج الاحتمال الشرطي الذي يرمز له $\mathrm{P}(\mathrm{B}/A)$ ويحسب كما يلي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}/A)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap B)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$$

ويقرأ: احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق. وإذا كان الحدثين A و B مستقلين فإن الاحتمال الشرطي يصبح يساوي: $\mathrm{P}(\mathrm{B}/A)=\mathrm{P}(\mathrm{B})$.

**الاحتمال الشرطي :**

إذا كان B,A حادثين في فراغ العينة S لتجربة عشوائية ما، فإن احتمال وقوع الحادث A هو $p(A)$ ويسمى الاحتمال غير المشروط للحادثة A أما إذا كان لدينا معلومات إضافية عن وقوع الحادث B فإن معرفة هذه المعلومة سيؤثر على احتمال وقوع الحادث A وفي كثير من الحالات نحتاج إلى إيجاد

احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B ويسمى هذا بالاحتمال الشرطي ويرمز له بـ $p(A/B)$ أي احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B .

**تعريف:**

نسمي الاحتمال الشرطي أو الاحتمال المشروط للحدث B عند شرط وقوع A كل احتمال وقوع الحدث B مع العلم (بفرض) أن الحدث A قد وقع، الكسر المرموز له بـ: P(B/A)

حيث:
$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ونقول على ان الحادثين تابعتان حيث A حدث غير مستحيل حيث (P(A)>0) .

**مثال:**

نعتبر تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين. احسب احتمال ظهور الكتابة P في الرمية الثانية إذا ظهرت الصورة F في الرمية الأولى.

**الحل :**

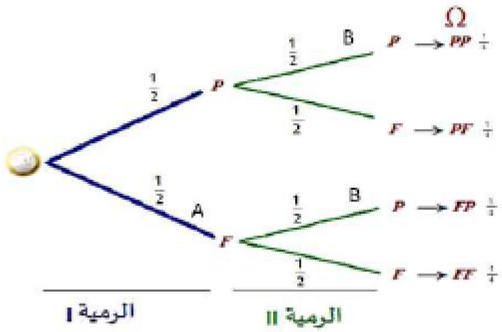
المطلوب هو حساب احتمال P(B/A) ؟ يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي:

$\Omega$ = {PP, PF, FP, FF} نعرف الحدثين،

A : ظهور F في الرمية الأولى I

B : ظهور P في الرمية الثانية II

{FP, FF}=A ، {PP, FP}=B ، {FP}=A⋂B




$$P(A) = \frac{2}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

يكون احتمال P(B/A) :
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$$

## خصائص الاحتمال المشروط:

- لكل حدثين A و B فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

(دستور الاحتمال المركب) $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$

- $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$

**مثال:**

يمكن لمريض أن يكون في حالة A أو لا. يقوم المريض بتحليل يبين إيجابيته أم لا. حيث يتم إعطاء الاحتمالات في الجدول التالي:

| | تحليل إيجابي (+) | تحليل سلبي (-) |
|---|---|---|
| **الحالة A** | 0,010 | 0,002 |
| **بحصه جيدة (سليم)** | 0,001 | 0,987 |

لاحظ أن الحالة A نادرة جدًا ، حيث تمس 12 شخصًا فقط من بين كل 1000 شخص. وأيضًا ، يكون التحليل الإيجابي عند المريض المصاب بالحالة بعشرة أضعاف أكثر عرضة مقارنة بالمريض بدون الحالة.

نحصل على الاحتمالات الشرطية التالية:   P(A) = 12/1000

P(+/A) = 0,010/0,012 = 10/12 = 0,833

P(-/سليم) = 0,987/0,988 = 987/988 = 0,999

P(A ∧ +) = 10× P(سليم ∧ +)

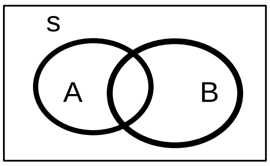
P(A/+) = 0,010/0,011 = 10/11 = 0,909

P(سليم/-) = 0,987/0,989 = 987/989 = 0,998

وهذا وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الضرب ويمكن تعميمها لأكثر من حادث فإذا كانت لدينا $A_1, A_2, A_3, ...., A_n$ في فراغ العينة فإن :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) * p(A_2 / A_1) * p(A_3 / A_1 A_2)$$
$$p(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = p(A_1) * p(A_2 / A_1) ..... p(A_n / A_1 .. A_2 * A_{n-1})$$

ويمكن أن تتصور أن الاحتمال $p(A/B)$ يقيس الاحتمال النسبي للحادثة A بالنسبة للفراغ B كما هو واضح في الشكل التالي :




وذلك لأننا تشترط وقوع الحادث B أي أنه معلوم مسبقاً أن نتائج الحادثة B فقط هي التي سوف تحدث عند إجراء التجربة أما بقية النتائج في S وليست في B فإنها لن تقع لذلك فإننا نتوقع عند حدوث أن النتائج التي تكون في A وتكون في نفس الوقت في B سوف تقع أي أن نتائج $A \cap B$ هي التي سوف تحدث وذلك كما رأينا أن :

**مثال :**

إذا كان احتمال نجاح أحمد في الامتحان هو $\frac{1}{2}$ واحتمال نجاح وليد وأحمد هو $\frac{1}{3}$

أوجد احتمال نجاح وليد إذا علم بأن أحمد قد نجح .

**الحل:**

نفرض أن الحادثين B, A تمثلان :

A = { نجاح أحمد } $\Leftarrow$ $p(A)=\frac{1}{2}$

B = { نجاح وليد }

ومنه : $p(A\cap B)$ = { نجاح أحمد ووليد } $=p(A\cap B)=\frac{1}{3}$

وعليه يكون احتمال نجاح وليد إذا علم نجاح أحمد يساوي :

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=0.67$$

ملاحظة : $\boxed{p(A\cap B)=p(B\cap A)}$

**قواعد ضرب الاحتمالات :**

**نظرية:** إذا كانت الحادثان B, A حادثين مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي إلى جداء احتمالهما أي :

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B)$$

وإذا كان لدينا n حادث نجد أن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث بعضها ببعض .

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=p(A_i)*p(A_2)*p(A_3)....p(A_n)$$

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}p(A_i)$$

**مثال :**

صندوق يحتوي على /8/ كرات حمراء- /3/ كرات حمراء- /1/ سوداء حيث يوجد

8 كرات حمراء ← A ← $p(A)=\frac{8}{12}$

3 كرات بيضاء ← B ← $p(B)=\frac{3}{12}$

1 واحدة حمراء ← C ← $p(C)=\frac{1}{12}$

سحبنا كرتين مع الإعادة

فما هو احتمال أن نحصل على كرة حمراء وأخرى بيضاء؟

كرة بيضاء وأخرى سوداء؟

1- احتمال سحب كرة حمراء وأخرى بيضاء $p(A\cap B)=\frac{8}{12}*\frac{3}{12}$

2- احتمال سحب بيضاء = سوداء $p(B\cap C)=\frac{3}{12}*\frac{1}{12}$

3- احتمال سحب كرتين من النوع A $p(A\cap A)=\frac{8}{12}*\frac{8}{12}$

4- احتمال سحب كرة بيضاء أو حمراء أو سوداء

$$p(A\cap B\cap C)=\frac{8}{12}*\frac{3}{12}*\frac{1}{12}$$

أما إذا كان **الحادثان غير مستقلان** فإن حساب احتمال تقاطعهما يعتمد على مفهوم الاحتمال الشرطي حيث تستخدم نظرية الاحتمالات الرمز $p(A/B)$ او يقرأ احتمال تحقق الحادث A بشرط تحقق الحادث B بشروط مسبقة أو الاحتمال الشرطي للحادث (A) بالنسبة إلى الحادث B

فإن

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B/A) \qquad p(A)\neq 0$$
$$p(B\cap A)=p(B)*p(A/B) \qquad p(B)\neq 0$$

وهذا ما يسمى بالضرب التبادلي .

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1) * p(A_2 / A_1) * p(A_3 / A_i)$$

بمعنى الاحتمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين B, A وكان $p(B)$ لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad p(B) \rangle 0$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ B, A على احتمال الحادث B .

نعود إلى معطيات المثال السابقة .

1- اوجد احتمال حصولنا على كرة بيضاء في السحبة الأولى وكرة حمراء في السحبة الثانية ( علماً بأن السحب بدون إعادة ) .

$$p(A \cap B) = p(B) * p(A/B) = \frac{3}{12} * \frac{8}{11}$$

2- احتمال حصولنا على كرة حمراء في السحبة الأولى وكرة سوداء في السحبة الثانية .

$$p(A \cap C) = p(A) * p(C/A) = \frac{8}{12} * \frac{1}{11}$$

**مثال :**

نفترض أننا أطلقنا ثلاثة طلقات على هدف واحد وكان احتمل إصابة الهدف لكل من الطلقات هو :

$$p_1 = 0.4 \qquad p_2 = 0.5 \qquad p_3 = 0.7$$

**المطلوب:**

1- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة فقط .

2- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقتين فقط .

3- احسب احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات فقط .

4- احسب احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل .

**الحل :**

نرمز إلى حادث إصابة الهدف بـ A ومن الواضح أن هذا الحادث A يمكن أن يتحقق بعدة طريق ( حالات ملائمة ) أو حوادث مركبة متنافية .

– تحقق الإصابة من خلال الطلقة الأولى وعدم تحققها بالثانية والثالثة .

– تحقق الإصابة من خلال الطلقة الثانية وتحققها الأولى والثالثة .

– تحقق الإصابة من خلال الطلقة الثالثة وتحققها الأولى والثانية .

1- نرمز $A_3 , A_2 , A_1$ إلى حوادث إصابة الهدف وبالطلقة الأولى والثانية والثالثة

وبـ $\bar{A}_3 , \bar{A}_2 , \bar{A}_1$ إلى حوادث المتممة للحوادث السابقة .

أما الحوادث المركبة هي :

$$A \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$
$$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$$
$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$$

وهي تمثل حالات الإصابة بطلقة واحدة فقط وعندها يكون :

$$p(A) = p(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + p(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$
$$= p(A_1) * p(\bar{A}_2) p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) * p(A_2) p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1) * p(\bar{A}_2) p(A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.3) + (0.6)(0.5)(0.3) + (0.6)(0.5)(0.7) = 0.36$$

2- نرمز لحادث إصابة الهدف بطلقتين بـ B :

$$p(B) = p(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A} \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.3) + (0.4)(0.5)(0.7) + (0.6)(0.5)(0.7) = 0.41$$

3- احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات :

$$C = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = p(A) * p(A_2) p(A_3)$$
$$= (0.4)(0.5)(0.7) = 0.14$$

4- احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل D :

$$D = A \cup B \cup C$$
$$p(D) = p(A) + p(B) + p(C) = 0.36 + 0.41 + 0.14$$
$$p(D) = 0.91$$

يمكننا حساب احتمال الحادث D بطريقة أخرى .

$$\bar{D} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = (0.6)(0.5)(0.3) = 0.09$$
$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - 0.09 = 0.91$$

**مثال:**

إذا كان احتمال حضور مدير شركة ما، في يوم ما، يساوي /0.9/ واحتمال حضور مساعده في ذلك اليوم /0.95/ واحتمال حضور واحد منهما على الأقل /0.97/

أوجد احتمال :

1- حضور المدير ومساعده .

2- حضور المدير وحده .

3- حضور مساعده وحده .

**الحل :** نرمز لحضور المدير بـ A

نرمز لحضور المساعد بـ B

نرمز لحضور المدير ومساعده $A \cap B$

أ- حادث حضور واحد منهما على الأقل يعبر عنه بالحالات $A \cup B$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 1.85 - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

ب- حضور المدير وحده :

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$= p(A) - p(A \cap B) = 0.90 - 0.88 = 0.02$$

ج- احتمال حضور مساعده وحده :

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

**مثال:**

إذا كانت لدينا حادثتان B, A فيقال بأن الحادثتين مستقلتان إذا تحققت واحد فقط من الآتي :

$$-p(A/B)=p(A)$$
$$-p(B/A)=p(B)$$
$$-p(A\cap B)=p(A)*p(B)$$

أثبت أن :

$$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A/B)-p(B)=p(B/A)*p(A)$$

**الحل :**

$$\therefore A\cap B=B\cap A$$
$$\therefore p(A\cap B)=p(B\cap A) \qquad (1)$$
$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$
$$p(A/B)*p(B)=p(A\cap B) \qquad (2)$$
$$p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$$
$$\therefore p(B/A)*p(A)=p(B\cap A) \qquad (3)$$

ومن العلاقات نجد أن :

$$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A/B)*p(B)=p(B/A)*p(A)$$

**مثال :**

إذا كان نجاح وليد وامتحان الرياضيات $\left(\frac{1}{4}\right)$ واحتمال نجاح أحمد $\left(\frac{1}{2}\right)$ في نفس الامتحان واحتمال نجاح الاثنين معاً هو $\left(\frac{1}{6}\right)$ .

أثبت هل أن نجاح وليد مستقلاً عن نجاح أحمد أم لا؟

**الحل:**

نفترض أن الحادثين (A), (B) يمثلان :

A = { نجاح وليد } $\Rightarrow p(A)=\frac{1}{4}$

B = { نجاح أحمد } $\Rightarrow p(B)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$A \cap B$ = { نجاح الاثنين معاً }

$$\therefore p(A) * p(B) = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

أي أن : $p(A \cap B) \neq p(A) * p(B) \frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$

ومنه نستنتج أن الحادثين غير مستقلين بمعنى أن نجاح وليد غير مستقل عن نجاح أحمد.

**مثال:**

ليكن لدينا الحادثان (A), (B) بحيث أن :

$$p(A) = 0.5$$
$$p(\bar{B}) = 0.6$$
$$p(A \cup B) = 0.8$$

أوجد ما يلي :

$1 - p(B)$

$2 - p(\bar{A} \cup \bar{B})$

$3 - p(A / \bar{B})$

$4 - p(B / A)$

**الحل:** يمكن إيجاد قيمة الاحتمالات السابقة كما يلي :

$$1 - p(B) + p(\bar{B}) = 1$$
$$donc : p(B) = 1 - p(\bar{B})$$
$$= 1 - 0.6 = 0.4$$
$$2 - p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$
$$= 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$$
$$donc : p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B})$$
$$= 1 - p(A \cap B)$$
$$= 1 - 0.1 = 0.9$$

$$3-p\left(A/\bar{B}\right)=\frac{p\left(A\cap\bar{B}\right)}{p\left(\hat{B}\right)}$$

$$donc: p\left(A\cap\bar{B}\right)=p\left(A\right)-p\left(A\cap B\right)$$

$$=0.5-0.1=0.4$$

$$p\left(A/\bar{B}\right)=\frac{p\left(A\cap\bar{B}\right)}{p\left(\bar{B}\right)}=\frac{0.4}{0.6}=0.67$$

$$4-p\left(B/A\right)=\frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

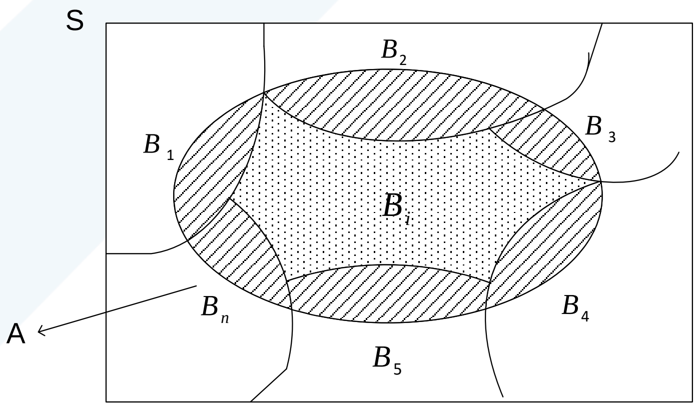
**الاحتمال الكلي :**

إذا كانت لدينا(n) حادثة متنافية وهي $\left[B_1,B_2,B_3,......B_n\right]$ ضمن قضاء العينة (S) بحيث أن $\left[p\left(B_i\right)\geq 0\ ,\ \forall_i\ ,\ i=1,2...n\right]$ فإن احتمال أي حادثة ولتكن (A) في المجموعة الشاملة (S) يكون :

$$p\left(A\right)=p\left(B_i\right)*p\left(A/B_i\right)+p\left(B_2\right)*p\left(A/B_2\right)+....+p\left(B_n\right)*p\left(A/B_n\right)$$

أو تكتب

$$\boxed{p\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}p\left(B_i\right)*p\left(A/B_i\right)}$$




شكل Venn

يتضح من شكل Venn بأن الحادثة (A) هي عبارة عن إيجاد تقاطعات الحوادث المتنافية أي أن: $\left[B_1\cap A,B_2\cap A,...,B_n\cap A\right]$

$$A=(B_1\cap A)\cup(B_2\cap A)\cup(B_3\cap A)\cup....\cup(B_n\cap A)$$

ويأخذ الاحتمال للطرفين نجد أن:

$$\begin{aligned}p(A)&=p\left[(B_1\cap A)\cup(B_2\cap A)\cup.....\cup(B_n\cap A)\right]\\&=p(B_1\cap A)+p(B_2\cap A)+....+p(B_n\cap A)\\&=p(B_1)*p(A/B_1)+p(B_2)*p(A/B_2)+....+p(B_n)*p(A/B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}p(B_i)*p(A/B_i)\end{aligned}$$

$$p(A)\rangle 0\ ,\ i=1,2,....,n$$

**مثال:**

مصنع به ثلاثة مكائن هي I , II , III تنتج على التوالي 0.35 ، 0.40 ، 0.25 من إنتاج المصنع الكلي، علماً أن نسبة المعيب من إنتاج المكائن الثلاث هي على الترتيب [ 6%، 3%، 8% ] فإذا اختبرت وحدة واحدة من الإنتاج عشوائياً، فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة؟

**الحل:**

- نفرض أن الحوادث C, B, A تمثل على التوالي:

A = { سحب وحدة من الماكنة الأولى I } $\Rightarrow p(A)=0.35$

B = { سحب وحدة من الماكنة الثانية II } $\Rightarrow p(B)=0.40$

C = { سحب وحدة من الماكنة الثالثة III } $\Rightarrow p(C)=0.25$

وعليه فإن مجموع الاحتمالات أعلاه يساوي :

$$p(A)+p(B)+p(C)=1$$

- نفرض أن D تمثل سحب وحدة معيبة أي:

D = { سحب وحدة معينة } $\Rightarrow p(D)=?$

تمثل احتمال سحب وحدة معينة الماكنة ( I ) $p(D/A)=0.06$

احتمال سحب وحدة معينة من الماكنة ( II ) $p(D/B)=0.03$

احتمال سحب وحدة معينة من الماكنة ( III ) $p(D/C)=0.08$

ويحسب نظرية الاحتمال الكلي فإن احتمال الحصول على وحدة معينة يساوي:

$$p(D)=p(A)*p(D/A)+p(B)*p(D/B)+p(C)*p(D/C)$$
$$p(D)=0.35*0.06+0.40*0.03+0.25*0.08=0.053$$

### I.7. نظرية بايـز أو نظرية الأسباب Bayes'[1] theorem

#### I.7.1. قاعدة بايز (Bayes' rule):

**نظرية 1** - نفترض أن P(B)>0 . وعليه :

$$P(A/B)=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} \qquad (1)\dots$$

برهان:

لاحظ أن $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

و $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

بإعادة ترتيب الصيغة الثانية : $P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$

وعليه فإن النظرية (1) تتبع بعد تبديل.

لنتأكد من أن قاعدة **بايز** تعمل في المثال الطبي المذكور أعلاه.

لدينا: P(A/+)=10/11 P(+)=0,011=11/1000 P(A)=12/1000

استخدام قاعدة **بايز** نحصل على: $P(A/+)=\frac{P(+/A)P(A)}{P(+)}=\frac{\frac{10}{12}\frac{12}{1000}}{\frac{11}{1000}}=\frac{10}{11}$

قاعدة بايز مهمة في مجموعة من المسائل المتعلقة بنظرية اللعب، والمالية، والاقتصاد الكلي.

## 2.7.I النظرية الشاملة للاحتمالات الكلية

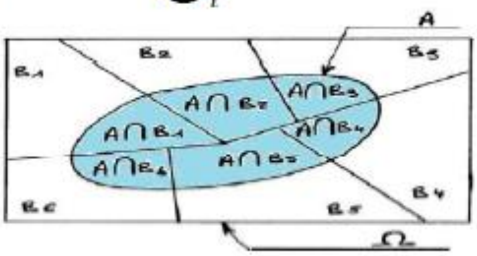
ليكن النظام الشامل من الأحداث $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ في فضاء العينة $\Omega$ فلأي حدث A فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)$$

$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + \cdots + P(A/B_n) \times P(B_n)$$

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5) \cup (A \cap B_6)$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset; \bigcup_i B_i = \Omega$$




**الشكل 6** -شكل توضيحي لفضاء عينة من 6 أجزاء (نظام الاحداث كامل)

نظرية 2 - الصيغة الثانية لنظرية بايز: لكل سلسلة $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ من الأحداث المتنافية والشاملة في فضاء العينة $\Omega$

$(\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cdots \cup B_n$ و $\emptyset = B_j \cap B_i \Leftarrow \forall i \neq j)$ وبما أن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)$$

وبتعميم الصيغة (1) لنظرية بايز نصل للصيغة الشاملة (2) حيث لكل حدث $B_k$ فإن:

$$(2)\dots \qquad P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما ($B_k$) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).

**مثال :**

في بحث على طلبة كلية الطب في مادة التشريح وجدَ أنَّ 20% من الطلبة والطالبات ممتازون وأنَّ 70% متوسطون وأنَّ الباقون ضعفاء، ووجدَ أنَّ نسبة الطالبات في هذه المجموعات الثلاث هي 50%، 60%، 30% على الترتيب.

فإذا اختير عشوائياً شخصاً من بينهم ووجدَ أنه طالبة فاحسب احتمال أن تكون هذه الطالبة متوسطة في مادة التشريح.

**الحل :** لنفرض الأحداث التالية:

A حدث أن الفرد المختار عشوائياً طالبة، $B_1$ و $B_2$ و $B_3$ على التوالي حدث أن الطالب المختار ممتاز و متوسط و ضعيف.

k = 2 فإنَّ :

-$P(B_1)=0,2$ : احتمال أن يكون الطالب ممتاز

-$P(B_2)=0,7$ : احتمال أن يكون الطالب متوسط

-إذا يكون احتمال أن يكون الطالب ضعيف هو: $P(B_3)=0,1$

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة ممتاز: $P(A/B_1)=0,5$

- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة متوسط: $P(A/B_2)=0,6$

- احتمال أن الشخص المختار طالبة ذات درجة ضعيف: $P(A/B_3)=0,3$

$$\boldsymbol{P(B_2/A)} = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{\sum_i P(A/B_i) \times P(B_i)} = \frac{0.6 \times 0.7}{(0.2 \times 0.5) + (0.7 \times 0.6) + (0.1 \times 0.3)} = 0.7636$$

# مثال:-

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي 30% ، 40% ، 20% ، 10% على التوالي، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي 15% ، 18% ، 12% ، 9% على التوالي، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

1- أن يكون العامل من القسم الأول؟
2- أن يكون العامل من القسم الثاني؟
3- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

**الحل:**

نفرض أن

| | | |
|---|---|---|
| A1={أن يكون العامل من القسم الأول} | P(B\|A1)=0.15 | P(A1)=0.3 |
| A2={أن يكون العامل من القسم الثاني} | P(B\|A2)=0.18 | P(A2)=0.4 |
| A3={أن يكون العامل من القسم الثالث} | P(B\|A3)=0.12 | P(A3)=0.2 |
| A4={أن يكون العامل من القسم الرابع} | P(B\|A4)=0.09 | P(A4)=0.1 |

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

### I.3.7. الأحداث المستقلة Independent events

نقول أن الأحداث A و B تمثل أحداثاً مستقلة، إذا كان: $P(A/B) = P(A)$, ويعني هذا أن حدوث الحدث A لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الحدث B. وعليه فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

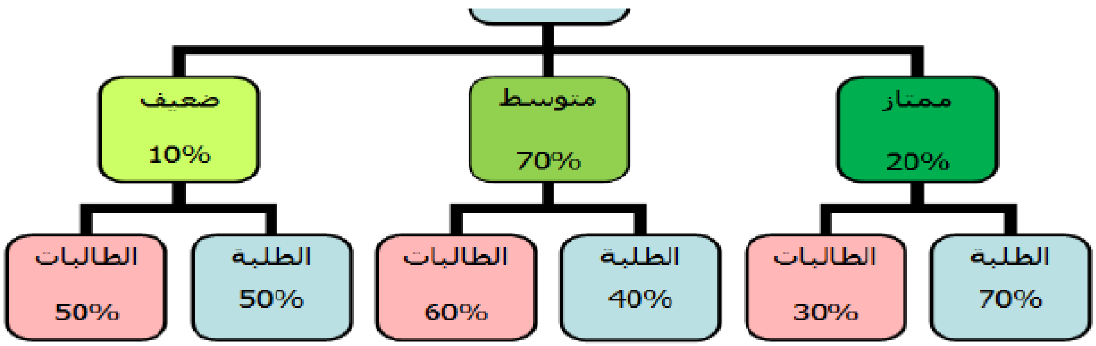
وبتحقق هذه المعادلة فإننا نقول أن الحدثين A و B هما حدثان مستقلان. كما نقول أيضا أن إذا كان الحدث A مستقل على الحدث B فيكو أيضا الحدث B مستقل على الحدث A.

وبتعميم المعادلة لأي مجموعة منتهية من الحوادث المستقلة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ فإن

$$P(\cap A_i) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n) = \prod_i P(A_i)$$

**الجدول 2.** - جدول ملخص الاحتمالات

| الحوادث | الاحتمال |
|---|---|
| $A$ | $P(A) \in [0,1]$ |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ |
| A أو B<br>$A \cup B$ | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$<br>اذا كانت الحوادث A و B متنافية $\Leftarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ |
| A و B<br>$A \cap B$ | $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$<br>اذا كانت الحوادث A و B مستقلة $\Leftarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ |
| B/A | $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A/B) \times P(B)}{P(A)}$ |

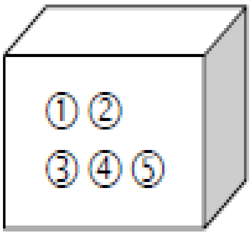


**الجدول.3** - جدول ملخص ربط تعبير الحوادث بالاحتمالات

### مثال 2:

صندوق يحوي 5 كريات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5 ، نسحب على التوالي كريتين دون إرجاع الكرية المسحوبة حتى نهاية التجربة.

عين عدد طرق سحب كريتين بهذه الصيغة.




### الحل:

لدينا 5 طرق لسحب الكرة الأولى و 4 طرق لسحب الكرة الثانية

(الكرة المسحوبة الأولى لا تعاد إلى الصندوق)

. عدد الطرق الممكنة لسحب كرتين من هذا الصندوق هي : $5 \times 4 = 20$

. كذلك عدد طرق سحب كرتين على التوالي دون إرجاع من هذا الصندوق هو عدد

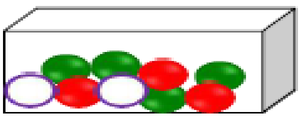
ترتيبات لعنصرين من مجموعة ذات 5 عناصر : $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

---

### مثال 1:

صندوق يحوي 9 كريات غير متمايزة في اللمس : 2 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء

نسحب 3 كرات في آن واحد من هذا الصندوق .



1) عين بهذه الصيغة عدد طرق سحب 3 كرات.

2) أحسب أحتمال الحوادث التالية :

$A$ "سحب كرة بيضاء على الأقل".

$B$ "لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الثلاث المسحوبة".

### الحل:

1) عدد طرق سحب 3 كرات من هذا الكيس هو: $C_9^3 = 84$

2.أ) " $A$ (1 بيضاء و 2 غير بيضاء) أو (2 بيضاء و 1 غير بيضاء) ".

عدد الحالات الملائمة للحادثة $A$ هو: $(C_2^1 \times C_7^2) + (C_2^2 \times C_7^1) = 49$ .

إذن : $P(A) = \frac{49}{84} = \frac{7}{12}$

2.ب) " $B$ (لا توجد أي كرة بيضاء) " معناه سحب 3 كرات من7 الغير البيضاء .

عدد الحالات الملائمة للحادثة $B$ هو: $C_7^3 = 35$ . إذن : $P(B) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$

<u>ملاحظة :</u>

الحادثة $B$ هي حادثة معاكسة للحادثة $A$ ، إذن: $P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$

**مثال:** ثلاثة مصانع لإنتاج المصابيح الكهربائية I, II, III لأحد المحال التجارية فإذا كانت هذه المصانع التي يبيعها المخزن التجاري، وكان احتمال وإنتاج مصباح معيب من المصانع الثلاث هي على الترتيب [ 6% ، 3% ، 8% ] فإذا اشترى شخص مصباح واحد من هذا المخزن أحسب احتمال أن يكون المصباح معيب ومن إنتاج المصنع الثاني.

$$p(A_i / B) = \frac{p(B / A_i) * p(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(B / A_i) * p(A_i)}$$

**الحل:**

نفرض أن:

$A_1 =$ المصباح من إنتاج المصنع I

$A_2 =$ المصباح من إنتاج المصنع II

$A_3 =$ المصباح من إنتاج المصنع III

B= المصباح تالف

ونعلم أن:

$$p(A_1) = 0.35$$

$$p(A_2) = 0.40$$

$$p(A_3) = 0.25$$

وكذلك:

$$p(B / A_1) = 0.06$$

$$p(B / A_2) = 0.03$$

$$p(B / A_3) = 0.08$$

حيث أن:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

$$p(B) = \sum_{i=1}^{3} p(A_i) * p(B / A_i)$$

$$= 0.35 * 0.06 + 0.40 * 0.03 + 0.25 * 0.08 = 0.053$$

$$p(A_2 / B) = \frac{p(B / A_2) * p(A_2)}{p(B)}$$

$$p(A_2 / B) = \frac{0.60 - 0.03}{0.053} = \frac{12}{53} = 0.23$$

**مثال:** الجدول الآتي يبين عدد الشركات التي تم الاستمارة فيها مصنفة حسب البلد والصناعة .

| البلد | صناعات كيميائية | صناعة النقل | صناعة الآلات | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 19 | 13 | 2 | 34 |
| 2 | 8 | 6 | 2 | 16 |
| **مجموع** | 27 | 19 | 4 | 50 |

**المطلوب:** أوجد احتمال الشركة المختارة والتي ستكون :

1- شركة الآلات من الدولة /2/ .

2- شركة النقل .

3- شركة الآلات بشرط المستثمر الدورة /2/ .

4- إما الدولة أو شركة صناعات الآلات .

**الحل:**

- نرمز إلى الدولة /1/ بـ $A_1$ والدولة /2/ بـ $A_2$
- صناعة كيميائية $B_1$ صناعة نقل بـ $B_2$
- صناعة آلات $B_3$

احتمال الشركة المختارة هي :

a- شركة الآلات من الدولة /2/ :

$$p\left(B_3 \cap A_2\right) = p\left(A_2\right) * p\left(B_3 / A_2\right) = \frac{16}{50} * \frac{2}{16} = \frac{2}{50}$$

b- شركة النقل:

$$\begin{aligned} p\left(B_2\right) &= p\left(A_1 \cap B_2\right) + p\left(A_2 \cap B_2\right) \\ &= p\left(A_1\right) p\left(B_2 / A_1\right) + p\left(A_2\right) * p\left(B_2 / A_2\right) \\ &= \frac{34}{50} * \frac{13}{34} + \frac{16}{50} * \frac{6}{16} = \frac{13}{50} + \frac{6}{50} = \frac{19}{50} \end{aligned}$$

c- شركة الآلات بشرط الدولة /2/ :

$$p\left(B_3/A_2\right)=\frac{p\left(B_3\cap A_2\right)}{p\left(A_2\right)}$$

$$=\frac{\frac{2}{50}}{\frac{16}{50}}=\frac{2}{50}*\frac{50}{16}=\frac{1}{8}=0.25$$

حيث أن:

$$\begin{aligned}p\left(A_2\right)&=p\left(A_2\cap B_1\right)+p\left(A_2\cap B_2\right)+p\left(A_2\cap B_3\right)\\&=p\left(B_1\right)*p\left(A_2/B_1\right)+p\left(B_2\right)*p\left(A_2/B_2\right)+p\left(B_3\right)*p\left(A_2/B_3\right)\\&=\frac{27}{50}*\frac{8}{27}+\frac{19}{50}*\frac{6}{19}+\frac{4}{50}*\frac{2}{4}\\&=\frac{8}{50}+\frac{6}{50}+\frac{2}{50}=\frac{16}{50}\end{aligned}$$

أما الدولة /1/ أو الشركة /3/

$$\begin{aligned}p\left(A_1\cup B_3\right)&=p\left(A_1\right)+p\left(B_3\right)-p\left(A_1\cap B_3\right)\\&=p\left(A_1\right)+p\left(B_3\right)-p\left(B_3\right)*p\left(A_1/B_3\right)\\&=\frac{34}{50}+\frac{4}{50}-\frac{\cancel{4}}{50}*\frac{2}{\cancel{4}}\\&=\frac{34}{50}+\frac{4}{50}-\frac{2}{50}=\frac{36}{50}=0.72\end{aligned}$$

## تدريبات

1)- أجري امتحانات للإحصاء على /200/ طالب فنجح في الامتحان الأول /160/ طالب ونجح في الامتحان الثاني /140/ طالب ونجح في الامتحانين معاً /124/ طالب .

- أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول والامتحان الثاني والامتحانين معاً.
- أوجد احتمال نجاح الطلاب الامتحان الأول أو الامتحان الثاني.

2)- إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من برنامج التعليم المفتوح بتقدير ممتاز أو بتقدير جيد جداً يساوي 0.7 وإذا كان احتمال أن يتخرج بتقدير جيد جداً يساوي 0.5 . أوجد احتمال أن يتخرج الطالب بتقدير ممتاز؟

3)- إذا كان احتمال ارتفاع سعر الفائدة هو 0.8 وفي حالة الارتفاع سينتج عنها احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق بمقدار 0.9، وإذا لم ترتفع الفائدة فإن احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق بمقدار 0.4

أوجد احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق .

4)- صندوقان يحتوي الأول على /5/ كرات حمراء و/4/ كرات خضراء، أما الصندوق الثاني يحتوي على /7/ كرات حمراء و/3/ كرات خضراء. اختير أحد الصناديق عشوائياً وسحبنا منه كرة بطريقة عشوائية . المطلوب:

أ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء.

ب- إذا تم سحب كرة وتبين أنها خضراء فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الأول؟

5)- لتكن لدينا الحادثتين (A) و(B) بحيث أن:

$$p(A \cup B) = 0.9 \quad , \quad p(\bar{B}) = 0.8 \quad , \quad p(A)0.4$$

أوجد الاحتمالات التالية:

$$4)p(B/A) \ , \ 3)p(A/\bar{B}) \ , \ 2)p(\bar{A} \cup \bar{B}) \ , \ 1)p(B)$$

6)- أثبت أن:

$$p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(A/B) * p(B) = p(B/A) * p(A)$$

**حل تدريبات**

**الحل /1/ :** نفرض أن:

حادث نجاح الطلاب في الامتحان الأول بـ A

حادث نجاح الطلاب في الامتحان الثاني بـ B

- احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول يساوي: $p(A)=\frac{160}{200}=0.8$
- احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الثاني يساوي: $p(B)=\frac{140}{200}=0.7$
- احتمال نجاح الطلاب في الامتحانين معاً يساوي: $p(A\cap B)=\frac{124}{200}=0.62$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=0.8+0.7-0.62=0.88$$

أي أن احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول أو الامتحان الثاني = 0.88 .

**الحل /2/ :** نفرض أن:

حادث أن يتخرج الطالب بتقدير ممتاز بـ A

حادث أن يتخرج الطالب بتقدير جيد جداً بـ B

وحيث أن الحاثين B, A منفصلين فإن:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$
$$0.7=p(A)+0.5$$
$$p(A)=0.7-0.5=0.2$$

أي أن $p(A)=0.2$

**الحل /3/ :**

احتمال ارتفاع الفائدة $p(A)=0.8$

احتمال انخفاض الرقم القياسي لأسعار السوق $p(B)$

إن الاحتمال المتمم $\bar{A}$ هو عدم ارتفاع سعر الفائدة هو:

$$p(\bar{A})=1-0.8=0.2$$

وعلى افتراض أن الأحداث مستقلة فإن:

$$p\left(B/A\right)=0.9$$
$$p\left(B/\bar{A}\right)=0.4$$

وبحسب قاعدة ضرب الاحتمالات فإن:

$$p\left(A\cap B\right)=p\left(A\right)*p\left(B/A\right)=\left(0.80\right)\left(0.9\right)=0.72$$
$$p\left(B\cap\bar{A}\right)=p\left(\bar{A}\right)*p\left(B/\bar{A}\right)=\left(0.2\right)\left(0.4\right)=0.08$$

وعليه فإن:

$$p\left(B\right)=p\left(B\cap A\right)+p\left(B\cap\bar{A}\right)$$
$$=0.72+0.08=0.80$$

ومما سبق إذا كان B, A حادثين شاملين ومتنافيين فإن: $p\left(A\right)+p\left(B\right)=1$

وإذا كان B, A حادثين شاملين ومتنافيين ومتماثلين فإن: $p\left(A\right)+p\left(B\right)=\frac{1}{2}$

وإذا رمزنا لحادث عدم وقوع A بـ $\bar{A}$ فإن الحادثين $A\ ,\ \bar{A}$ مكونان حادثين متنافيين وشاملين كأن يكون الشخص مدخن وغير مدخن .

**الحل /4/ :**

نفرض أن الحوادث $B_1\ ,\ B_2$ التالية تمثل ما يلي:

سحب الكرة من الصندوق الأول: $B_1$

سحب الكرة من الصندوق الثاني: $B_2$

$$\therefore p\left(B_1\right)=p\left(B_2\right)\frac{1}{2}$$

نفرض أن (G) تمثل الكرة المسحوبة بأنها خضراء G

يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الأول: $p\left(G/B_1\right)=\frac{4}{9}$

يمثل احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الثاني: $p\left(G/B_2\right)=\frac{3}{10}$

1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء اللون، نستخدم نظرية الاحتمال الكلي أي أن:

$$p(G) = p(G/B_1) * p(G/B_1) + p(G/B_2) * p(G/B_2)$$
$$= \frac{4}{9} * \frac{1}{2} + \frac{3}{10} * \frac{1}{2} = 0.37$$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الأول إذا كانت المسحوبة خضراء

$$p(B_1/G) = \frac{p(G/B_1) * p(B_1)}{p(G/B_1) * p(B_1) + p(G/B_2) * p(B_2)}$$
$$= \frac{0.22}{0.37} = 0.59$$

**الحل /5/ :**

يمكن إيجاد قيمة الاحتمالات السابقة كالآتي:

$$1)\ p(B) + p(\bar{B}) = 1$$
$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) \Rightarrow 1 - 0.6 = 0.4$$
$$2)\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$
$$= 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$$
$$\therefore p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.1 = 0.9$$
$$3)\ p(A/\bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})}, p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$= \frac{0.4}{0.6} \approx 0.67$$
$$4)\ p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.20$$

**الحل /6/ :**

$$\therefore A \cap B = B \cap A$$
$$p(A \cap B) = p(B \cap A) \qquad (1)$$
$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A/B)*p(B)p(A\cap B) \qquad (2)$$
$$p(B/A)*p(B\cap A)$$
$$\therefore p(B/A)*p(A)=p(B\cap A) \qquad (3)$$

من العلاقات الثلاث أعلاه نجد أن:

$$p(A\cap B)=p(B\cap A)=p(A/B)*p(B)+p(B/A)*p(A)$$

وهو المطلوب

**نهاية محاضرة مدخل الى نظرية الاحتمالات**

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY