جامعة المنارة

MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 12

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

تمارين

1 احسب التكاملات الثنائية الآتية بالانتقال إلى الاحداثيات القطبية:

- $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$
- $$\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$$
- $$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$$

الحل

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}d\theta=2\pi$$

$$\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx=\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^1\frac{2r}{1+r}\,dr\,d\theta=2\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+r}\right)dr\,d\theta=2\int_{\pi}^{3\pi/2}(1-\ln 2)\,d\theta=(1-\ln 2)\pi$$

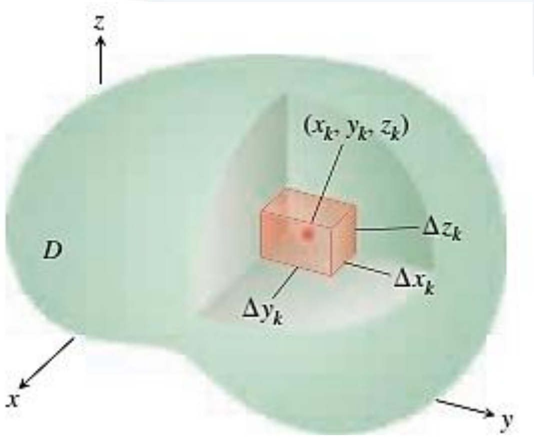
$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx=4\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2}\,dr\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_0^1 d\theta=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi$$

Triple Integrals

التكاملات الثلاثية

يحسب حجم المنطقة D باستخدام التكامل الثلاثي بالعلاقة

$$V = \iiint\limits_{D} dV.$$



خواص التكامل الثلاثي

1) ليكن $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ تابعين قابلين للمكاملة على المنطقة الفراغية E، عندئذ فإن:

$$\iiint\limits_{E}(f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_{E} g(x,y,z)dxdydz$$

2) إذا كانت $E = E_1 \cup E_2$، حيث أن المنطقتين E_1 و E_2 يفصل بينهما سطح عندئذ فإن:

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)dxdydz$$

حساب التكامل الثلاثي

الحالة الأولى (التكامل على التسلسل)

إذا كانت المنطقة الفراغية E عبارة عن متوازي مستطيلات أي:

$$E=\{(x,y,z)|a\le x\le b \quad , \quad c\le y\le d \quad , \quad p\le z\le q\}$$

وعندئذ يحسب التكامل بالشكل الآتي:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_p^q f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

مثال: احسب التكامل الثلاثي $I=\iiint_E \frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}}dxdydz$ حيث:

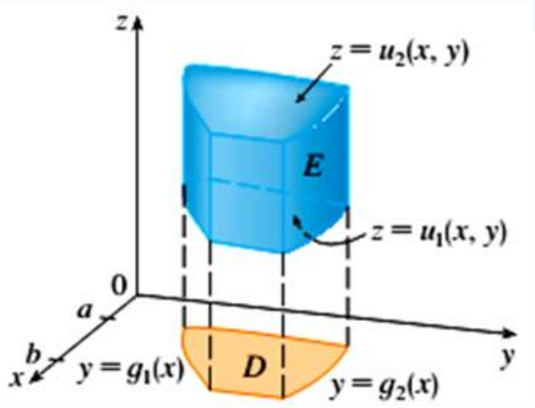
$$E=\{(x,y,z)|0\le x\le 2 \quad , \quad 0\le y\le 1 \quad , \quad 0\le z\le 1\}$$

الحل

$$I=\int_0^2\left[\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}}dz\right)dy\right]dx=\int_0^2\left[\int_0^1\left(\sqrt{2}-1\right)xydy\right]dx=\left(\sqrt{2}-1\right)\int_0^2\frac{x}{2}dx=\left(\sqrt{2}-1\right)$$

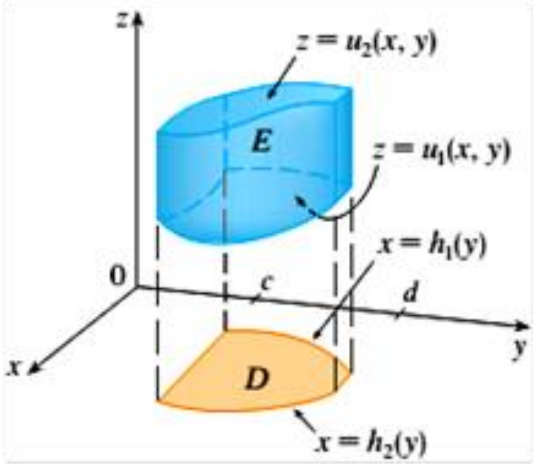
الحالة الثانية (التكامل على مناطق بسيطة)

تعريف: يقال عن المنطقة الفراغية E أنها منطقة بسيطة بالنسبة للمحور ox والمستوي xoy، إذا وجدت التوابع $g_1(x)$ و $g_2(x)$ و $u_1(x,y)$ و $u_2(x,y)$ كما في الشكل المرافق، بحيث:



$$E=\{(x,y,z)|a\le x\le b\ ,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\ ,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

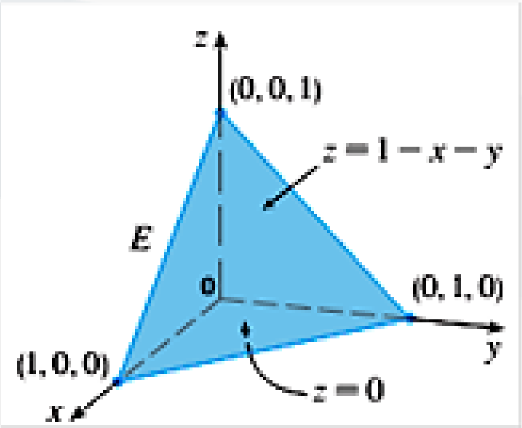


وتكون بسيطة بالنسبة للمحور oy والمستوي xoy، إذا وجدت التوابع $h_1(y)$ و $h_2(y)$ و $u_1(x,y)$ و $u_2(x,y)$ كما في الشكل المرافق، بحيث يكون:

$$E=\{(x,y,z)|h_1(y)\le x\le h_2(y)\ ,\ c\le y\le d\ ,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$$

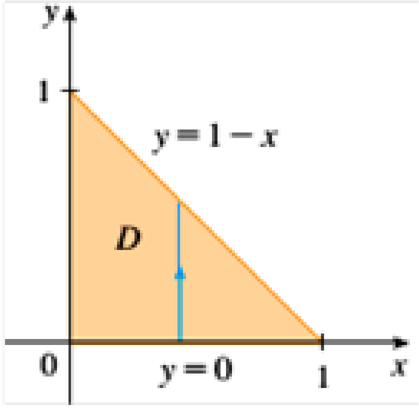
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\int_c^d\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dx\right]dy$$

مثال: احسب التكامل $I=\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ حيث أن المنطقة E هي رباعي الوجوه المحدود بالمستويات $x=0\,,\,y=0\,,\,z=0\,,\,x+y+z=1$، كما هو مبين في الشكل المرافق:



الحل

لدينا $0\le z\le 1-x-y$، وباختيار أن تكون المنطقة بسيطة بالنسبة للمستوي xoy، نجد أن $0\le y\le 1-x$ وبسيطة بالنسبة للمحور ox، فنجد أن $0\le x\le 1$، كما في الشكل التالي:



$$E=\{(x,y,z)|0\le x\le 1\;\;,\;\;0\le y\le 1-x\;\;,\;\;0\le z\le 1-x-y\}$$

$$I=\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right)dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{-3+x}{4}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

تغيير المتحولات في التكامل الثلاثي

قد نضطر في بعض الأحيان إلى تغيير متحولات بهدف الحصول على تكامل يمكن إنجازه بشكل أسهل. سنستعرض الآن ذلك في المبرهنة الآتية:

مبرهنة: ليكن لدينا التكامل الثلاثي $\iiint_E F(x,y,z)\,dxdydz$ للتابع $F(x,y,z)$ المستمر على المنطقة الفراغية E، وبفرض أنه لدينا تقابل واحد لواحد من المنطقة E في الفضاء $oxyz$ على المنطقة E^* في الفضاء $ouvw$، معطى بالتحويل الآتي:

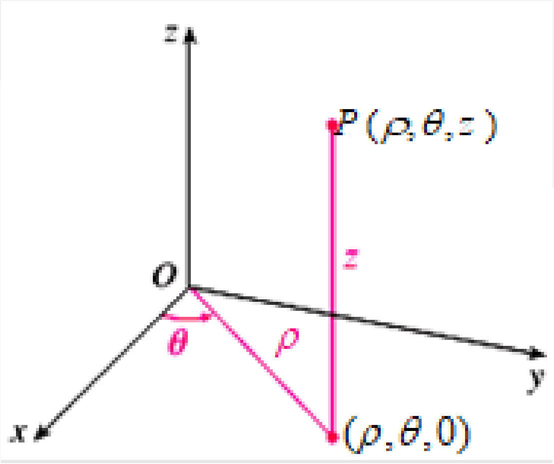
$$x = x(u,v,w)\ ,\ y = y(u,v,w)\ ,\ w = w(u,v,w)$$

وكانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذه التوابع مستمرة على المنطقة E^*، فإن:

$$\iiint_E F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{E^*} F[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\cdot|J|\,dudvdw$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

الانتقال إلى الإحداثيات الاسطوانية



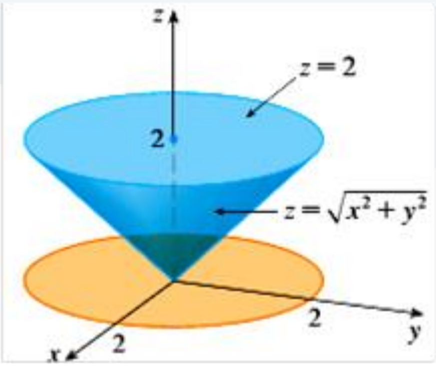
$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta \quad , \quad z = z$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

ومنه يصبح التكامل الثلاثي على المنطقة الجديدة:

$$\iiint_E F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{E^*} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\cdot \rho d\rho d\theta dz$$

مثال: احسب التكامل $I=\iiint_E (x^2+y^2)\,dxdydz$ حيث أن المنطقة E هي المنطقة المحدودة بالمخروط الدوراني $z^2=x^2+y^2$، والمستوي $z=2$ كما هو مبين في الشكل الآتي:



الحل

سنعتبر المنطقة E بسيطة بالنسبة للمحور $x-$ وللمستوي $xy-$، أي:

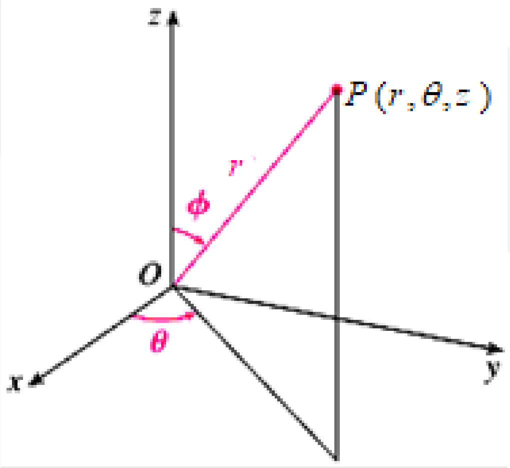
$$E=\left\{(x,y,z)\mid -2\le x\le 2\ ,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\ ,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$$

ومن الأفضل الانتقال إلى الإحداثيات الاسطوانية، حيث تصبح المنطقة E^*:

$$E^*=\left\{(\rho,\theta,z)\mid 0\le\rho\le 2\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ \rho\le z\le 2\right\}$$

$$\Rightarrow\quad I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_\rho^{2}\rho^3\,dz\,d\rho\,d\theta=\frac{16\pi}{5}$$

الانتقال إلى الإحداثيات الكروية



$$x = r\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z = r\cos\phi$$

$$0 \le \phi \le \pi \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\phi$$

$$\iiint_E F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{E^*} F(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\cdot r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

مثال: احسب التكامل $I=\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$ حيث أن المنطقة E هي كرة الواحدة، أي:

$$E=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq 1\}$$

الحل

بما أن حدود المنطقة E عبارة عن كرة، لذلك من الأفضل الانتقال إلى الإحداثيات الكروية، ومنه فإن المنطقة الجديدة:

$$E^*=\{(r,\theta,\phi)|0\leq r\leq 1\ \ ,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\ \ ,\ \ 0\leq\phi\leq\pi\}$$

$$\Rightarrow\quad I=\iiint_{E^*} e^{r^3}r^2\sin\phi\, dr\,d\theta\, d\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\rho}^{1} e^{r^3}r^2\sin\phi\, dr\,d\theta\, d\phi=\frac{4}{3}\pi(e-1)$$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية

- $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$
- $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$
- $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$

الحل

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^1\left(x^2+y^2+\tfrac{1}{3}\right)dy\,dx=\int_0^1\left(x^2+\tfrac{2}{3}\right)dx=1$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\left(8-2x^2-4y^2\right)dx\,dy=\int_0^{\sqrt{2}}\left[8x-\tfrac{2}{3}x^3-4xy^2\right]_0^{3y}dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left(24y-18y^3-12y^3\right)dy=\left[12y^2-\tfrac{15}{2}y^4\right]_0^{\sqrt{2}}=24-30=-6$$

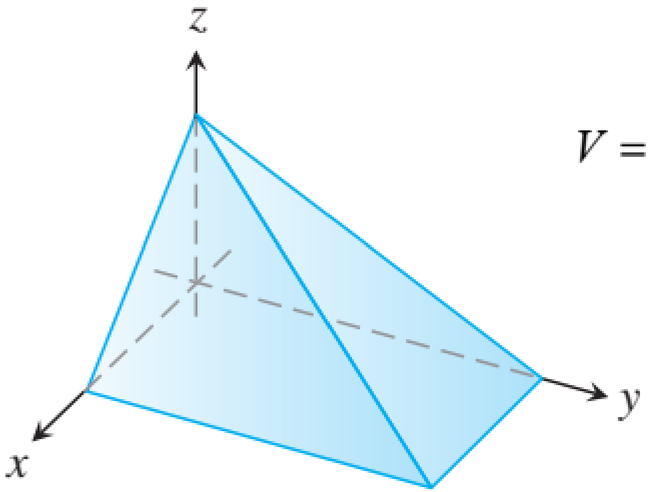
$$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy=\int_0^2\left[x^2+xy\right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}dy=\int_0^2\left(4-y^2\right)^{1/2}(2y)\,dy$$

$$=\left[-\tfrac{2}{3}\left(4-y^2\right)^{3/2}\right]_0^2=\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}=\tfrac{16}{3}$$

تمارين

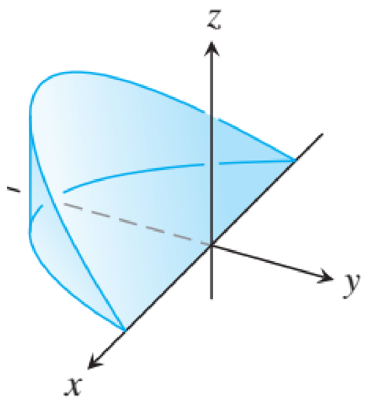
2 احسب حجم المنطقة الموجودة في الثمن الأول والمحدودة بالمستويات الاحداثية والمستويين $x + z = 1, y + 2z = 2$



الحل

$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx=\int_0^1\int_0^{1-x}(2-2z)\, dz\, dx=\int_0^1\left[2z-z^2\right]_0^{1-x} dx=\int_0^1\left(1-x^2\right) dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

3 احسب حجم المنطقة المشكلة بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ والمستويين $z = -y$ و $z = 0$



الحل

$$V=2\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0\int_0^{-y} dz\, dy\, dx=-2\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 y\, dy\, dx=\int_0^1\left(1-x^2\right) dx=\frac{2}{3}$$

تمارين

4 احسب حجم المنطقة التي تقع داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ وخارج الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$

الحل

بالانتقال الى الاحداثيات الاسطوانية $0 \le \theta \le \pi / 2 \,, 1 \le r \le \sqrt{2} \,, 0 \le z \le \sqrt{2 - r^2}$

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{2-r^2}\, dr\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left[-\tfrac{1}{3}\left(2-r^2\right)^{3/2}\right]_1^{\sqrt{2}} d\theta = 8\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

5 احسب حجم المنطقة التي تقع داخل الأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمحدودة بالمستويين $z = 0$ و $y + z = 4$

الحل

بالانتقال الى الاحداثيات الاسطوانية $0 \le \theta \le 2\pi \,, 0 \le r \le 2 \,, 0 \le z \le 4 - r\sin\theta$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r\sin\theta} dz\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(4r - r^2\sin\theta\right) dr\, d\theta = 8\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\sin\theta}{3}\right) d\theta = 16\pi$$