جامعة المنارة
قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

الدارات الكهربائية

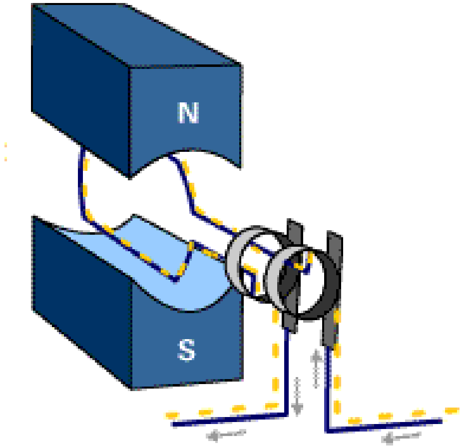
الدكتور المهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

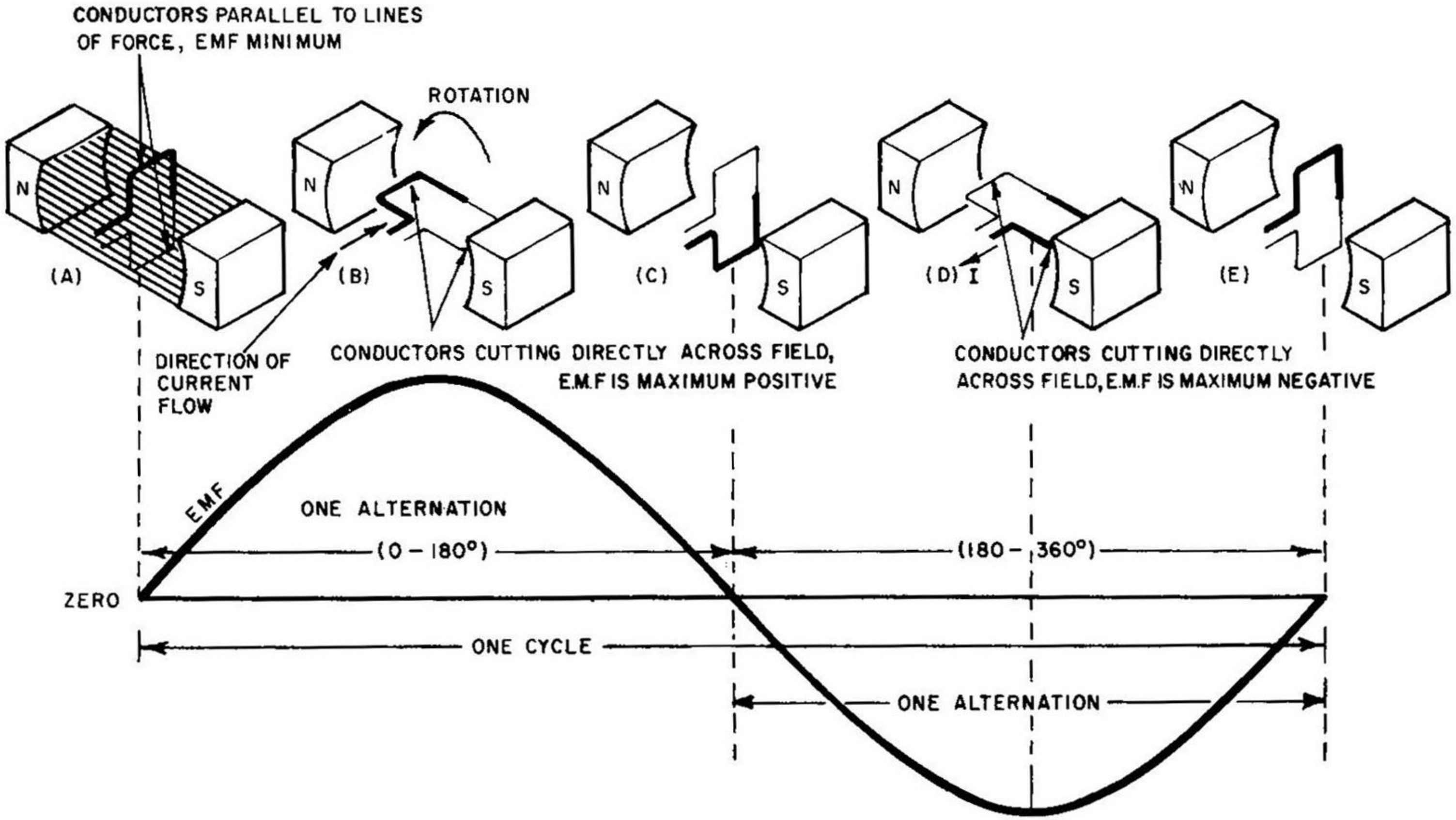
7

التيار المتناوب

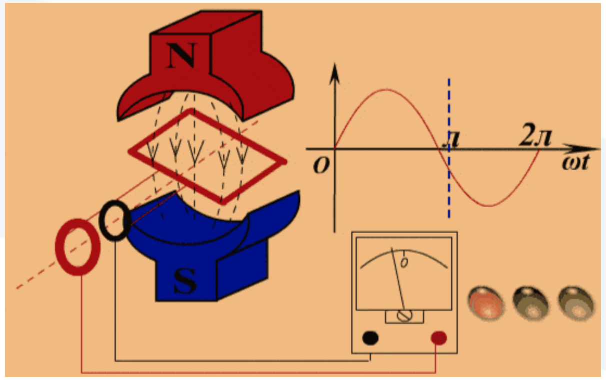
Alternating Current (AC)

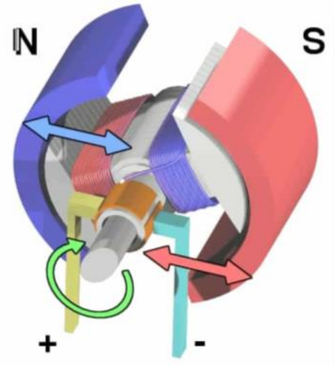
مبدأ توليد قوة محركة كهربائية متناوبة جيبية:

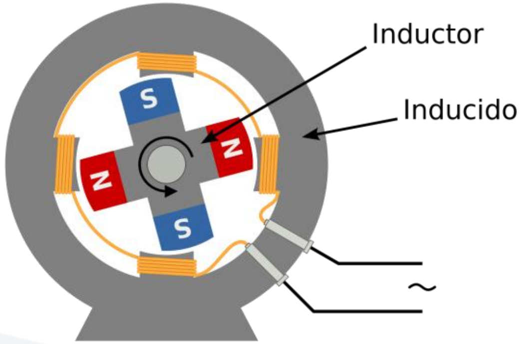


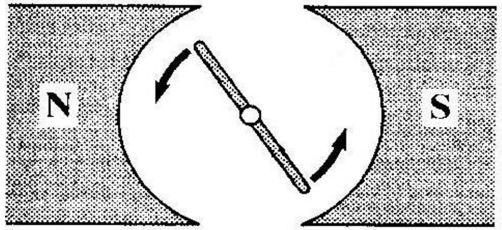


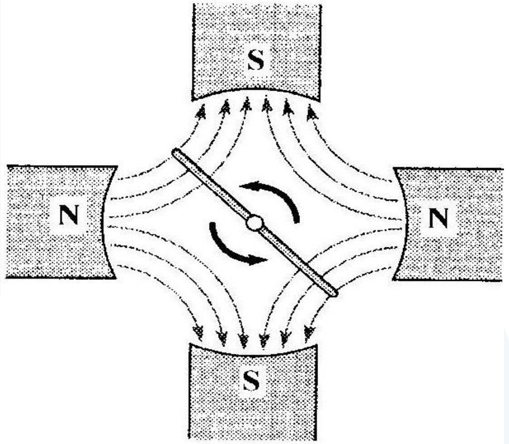
وفقاً لذلك نحصل على موجة جيبية متناوبة للجهد دورها T. ويمكن زيادة تردد الموجة من خلال زيادة عدد الأقطاب المغناطيسية للآلة. فعندما تكون الآلة مكونة من قطبين فقط (p=1 عدد أزواج الأقطاب) فإن الناقل (الملف) سيجتاز الأقطاب مرة واحدة فقط ليتمكن من توليد دور واحد للموجة الجيبية المتناوبة. أما إذا كانت الآلة مكونة من أربعة أقطاب (p=2) فإن التردد سيتضاعف حيث سنحصل عندها على موجتين متناوبتين جيبيتين خلال دور واحد.



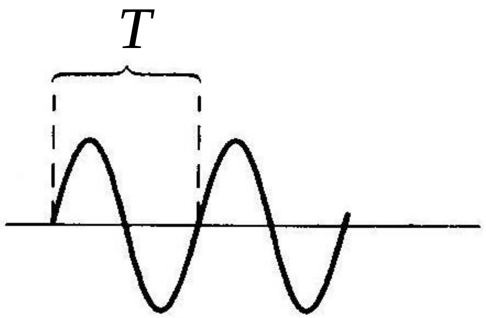


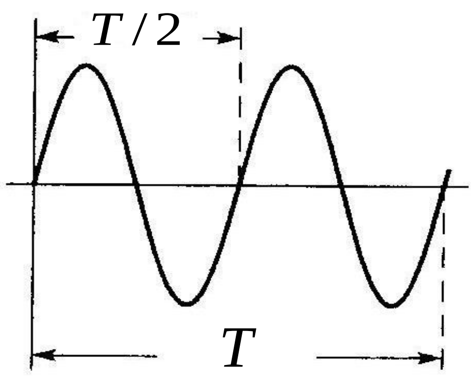






تغيّر التردد بتغيّر
عدد أقطاب الآلة





عند دوران الناقل بين الأقطاب عدد من الدورات مقداره 50 دورة في الثانية، عندها نقول أن تردد الموجة الناتجة هو 50 Hz، ويكون الدورمساوٍ:

$$T = \frac{1}{50} = 0.02[sec]$$

وبمقدارزيادة عدد دورات الناقل بين الأقطاب يزداد التردد.

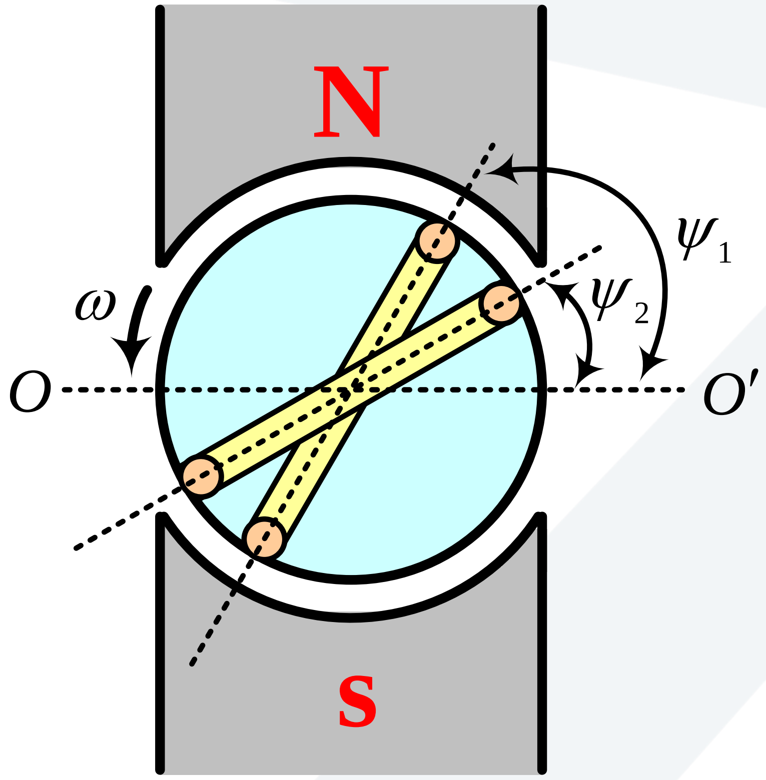
يعطى تابع القيمة اللحظية للقوة المحركة الكهربائية الناتجة، وهو تابع جيبي متناوب، بالعلاقة:

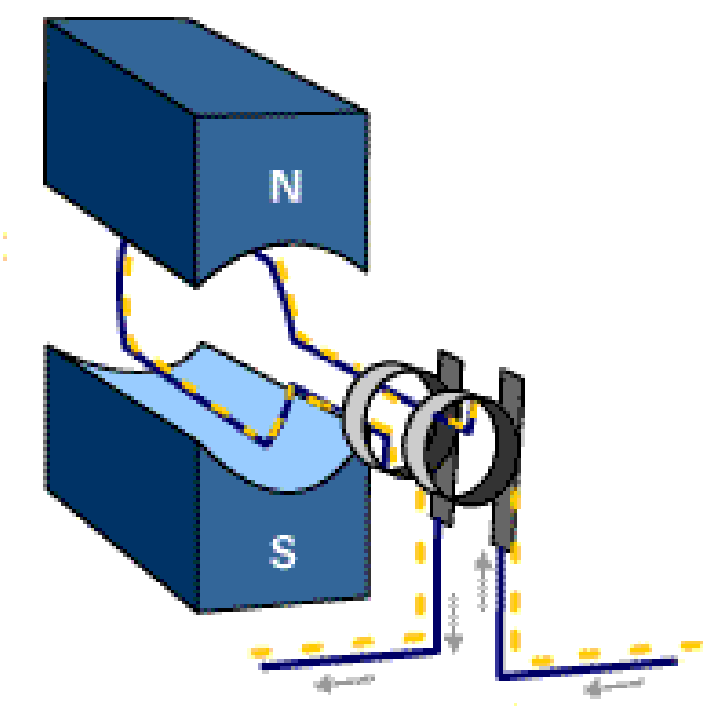
$$e = E_m \cdot Sin\omega t$$

أي أن دوران الناقل داخل المغناطيسي واستناداً إلى أسس التحريض المغناطيسي سبب نشوء قوة محرّكة كهربائية جيبية متناوبة

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

زاوية الإزاحة (زاوية الطور) Phase Angle:





عند دوران الدائر بسرعة زاويّة ω عكس عقارب الساعة، وبفرض أن الوشيعتان كانتا في اللحظة المدروسة متوضعتان بالنسبة للخط الحيادي بحيث تشكّلان معه زوايا ψ_1، ψ_2 فإن القوتان المحرّكتان الكهربائيتان الناتجتان تعطيان لحظياً بالعلاقتين الآتيتين:

$$e_1 = E_m \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \psi_1)$$
$$e_2 = E_m \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \psi_2)$$

تسمّى الزاوية $(\omega t+\Psi)$ زاوية الطور أو زاوية فرق الصفحة، حيث يتّضح من العلاقات السابقة أن القيمة اللحظية للكمية الجيبية تتحدّد من خلال المطال وزاوية الطور.

في اللحظة $t=0$ تصبح العلاقات السابقة بالشكل:

$$e_1 = E_m \cdot \mathrm{Sin}\psi_1$$
$$e_2 = E_m \cdot \mathrm{Sin}\psi_2$$

تسمى الزاويتان ψ_1، ψ_2 اللتان تحدّدان قيم القوى المحرّكة الكهربائية في اللحظة الابتدائية بزوايا الطور الابتدائية، وبالتالي تتحدّد الكمية الجيبية من خلال المطال (القيمة الأعظمية)، والتردد أو الدور، وزاوية الطور الابتدائية.

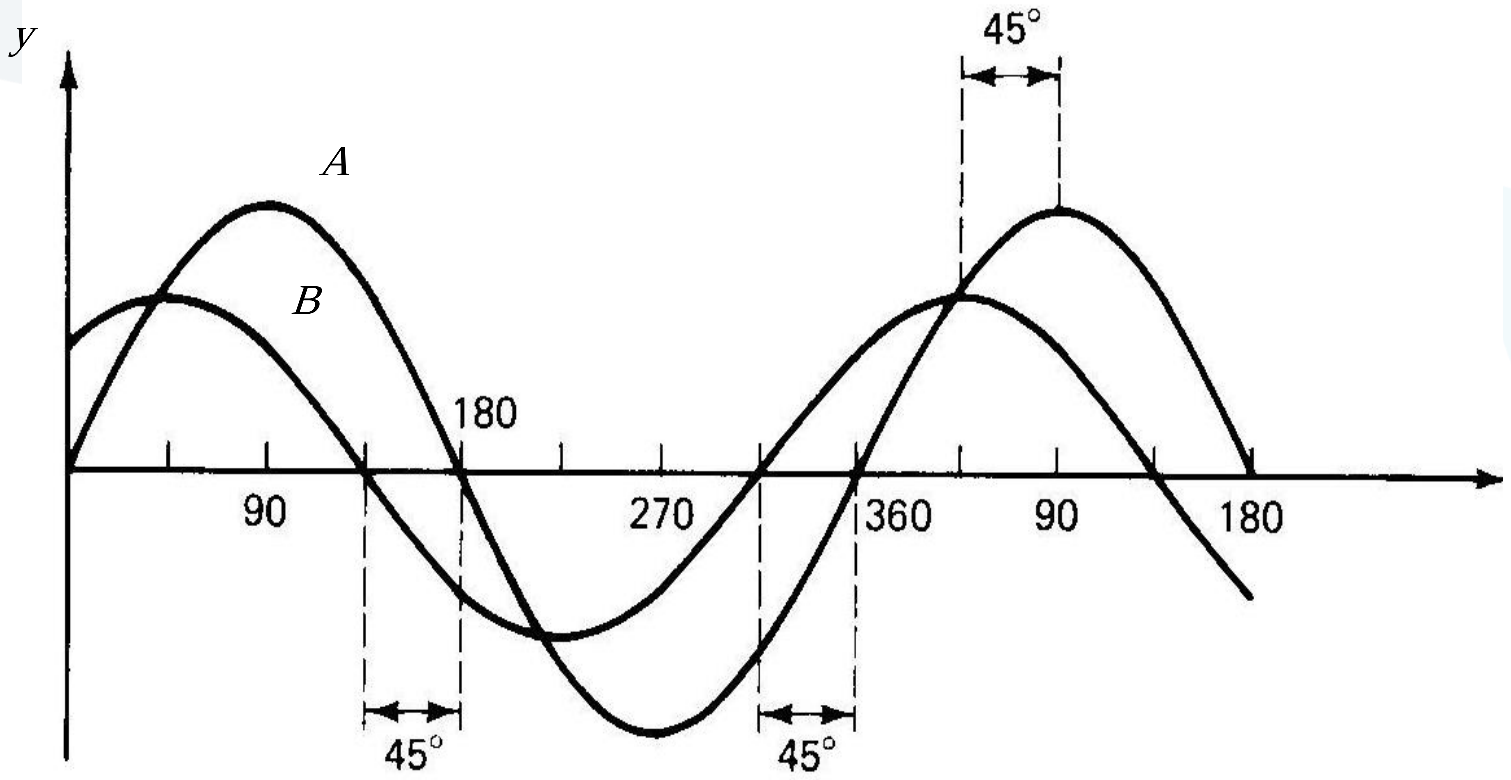
يُسمّى الفرق بين زاويا الطور الابتدائية لكميتين جيبيتين لهما التردد نفسه بزاوية الإزاحة الطورية (Phase Angle):

$$\psi = \psi_1 - \psi_2$$

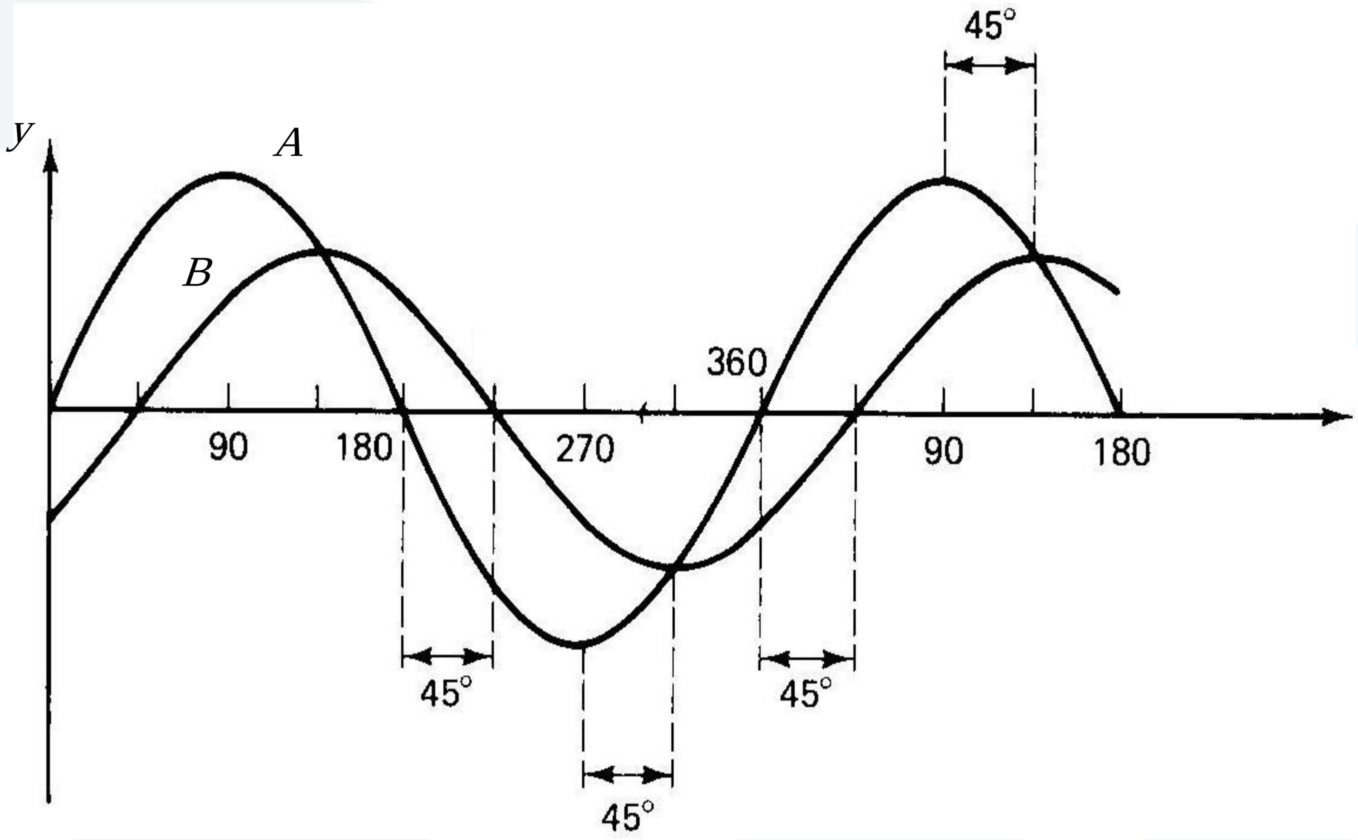
تبيّن هذه الزاوية الفترة الزمنية t التي تبلغ فيها إحدى هذه الكميات بداية الدور قبل الكمية الأخرى:

$$t = \frac{\psi}{\omega} = \frac{\psi \cdot T}{2\pi}$$

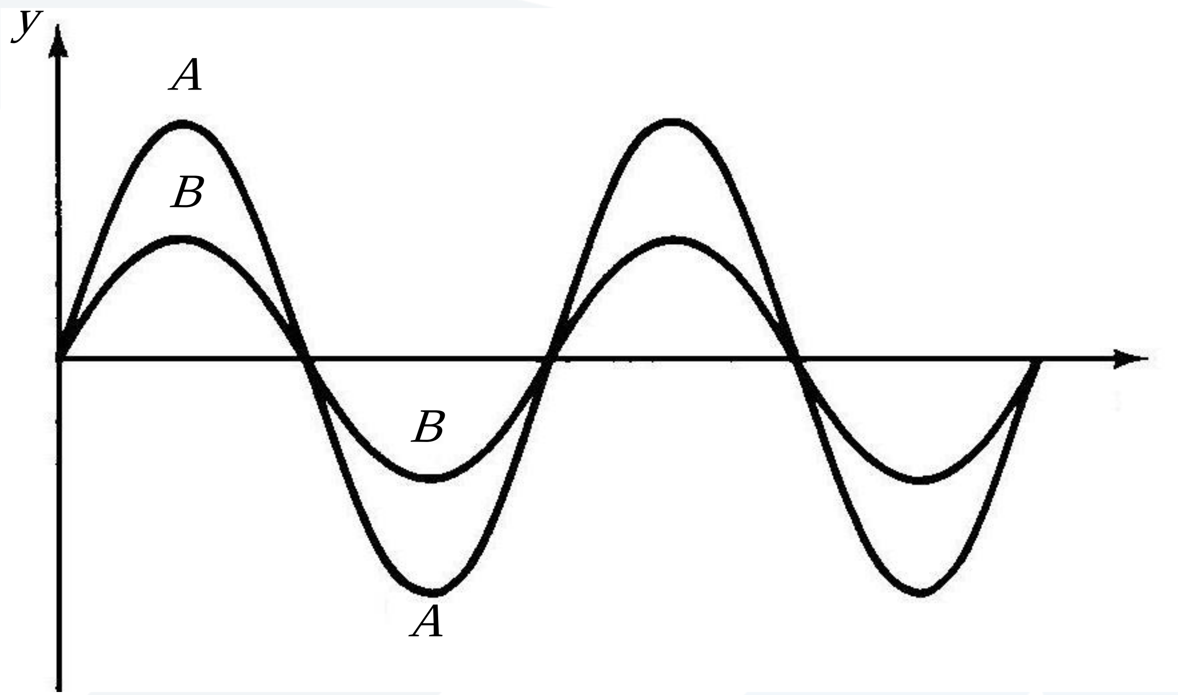
تُعدّ الكمية الجيبية التي تبلغ الدور قبل الأخرى متقدّمة بالطور (**Lead**)، بينما تُعدّ الكمية التي تبلغ القيمة نفسها، ولكن بشكل متأخر عن الكمية الأولى متأخرة بالطور (**Lag**).



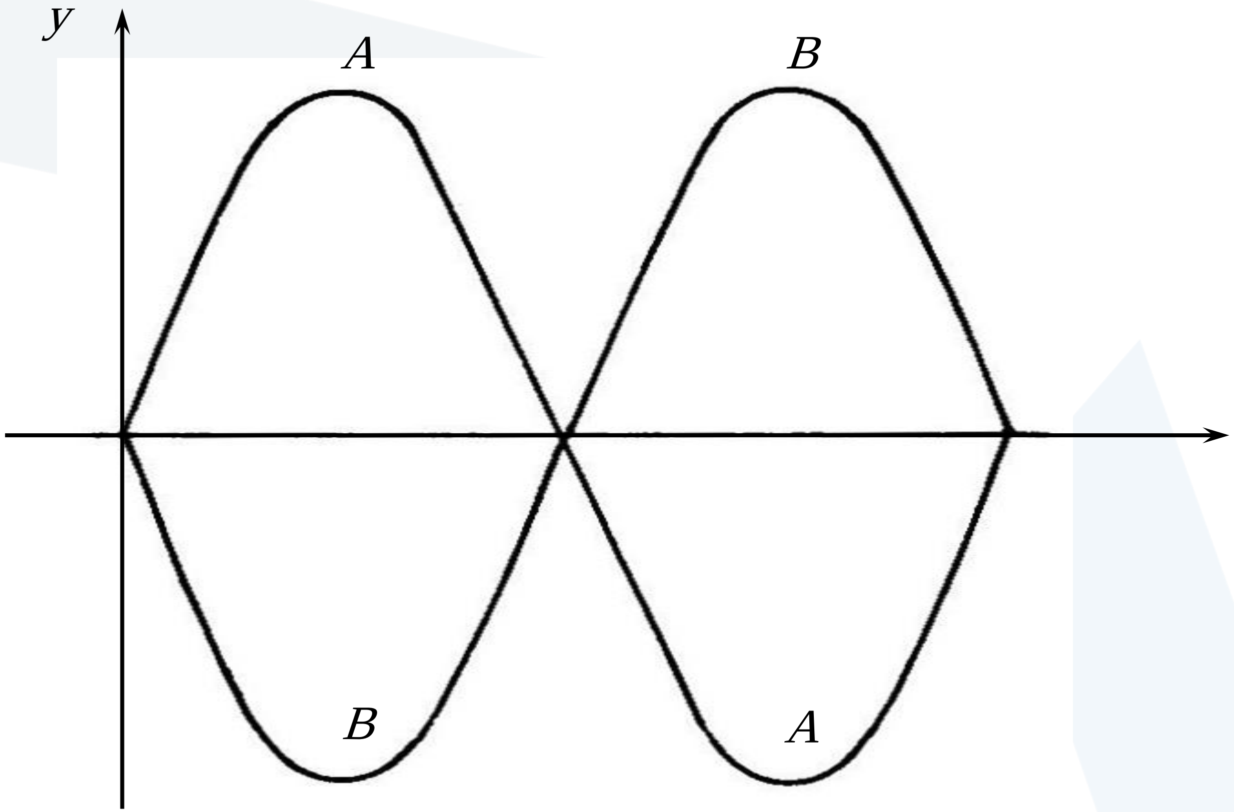
الموجة B متقدمة على الموجة A



الموجة A متقدمة على الموجة B

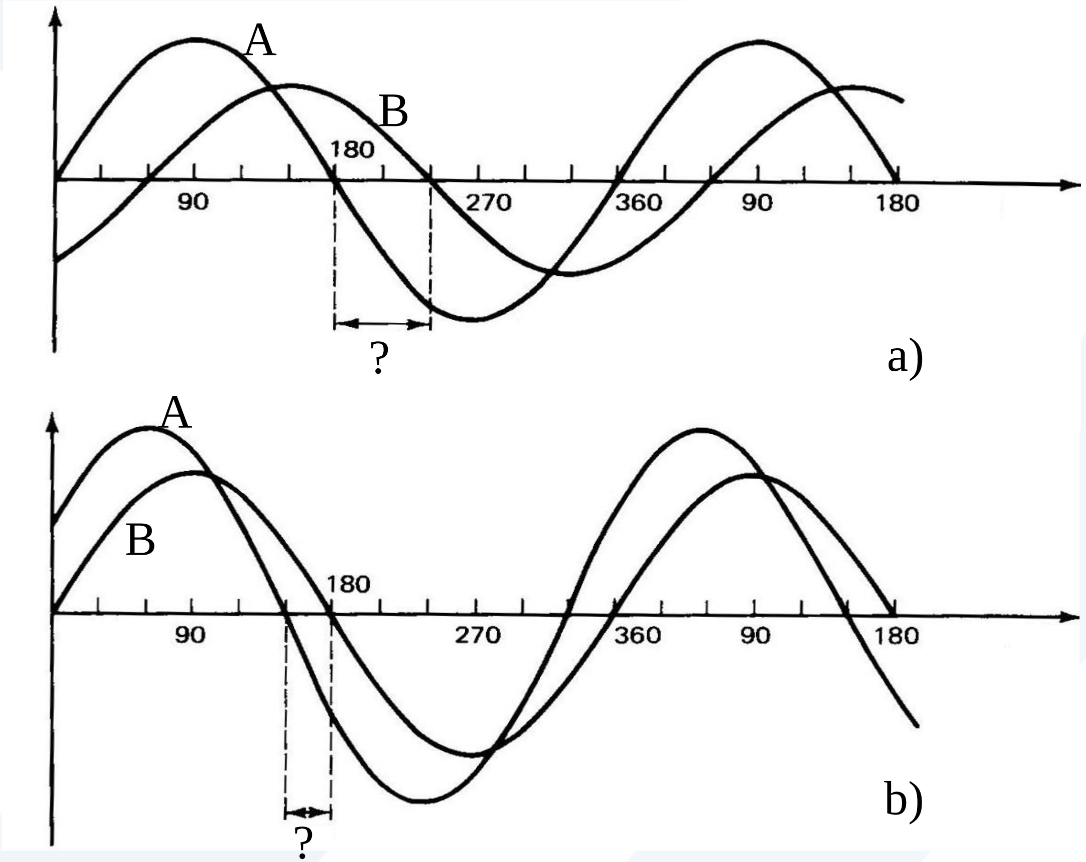


الموجة A مطابقة بالطور للموجة B



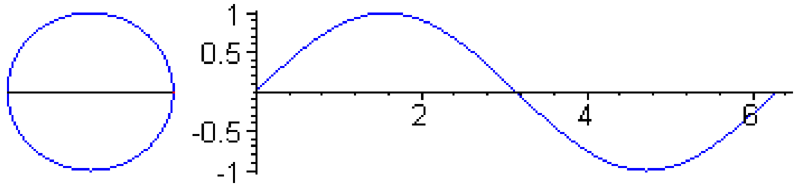
الموجة A متعاكسة بالطورمع الموجة B

الموجة A متقدمة على الموجة B بزاوية 60 درجة

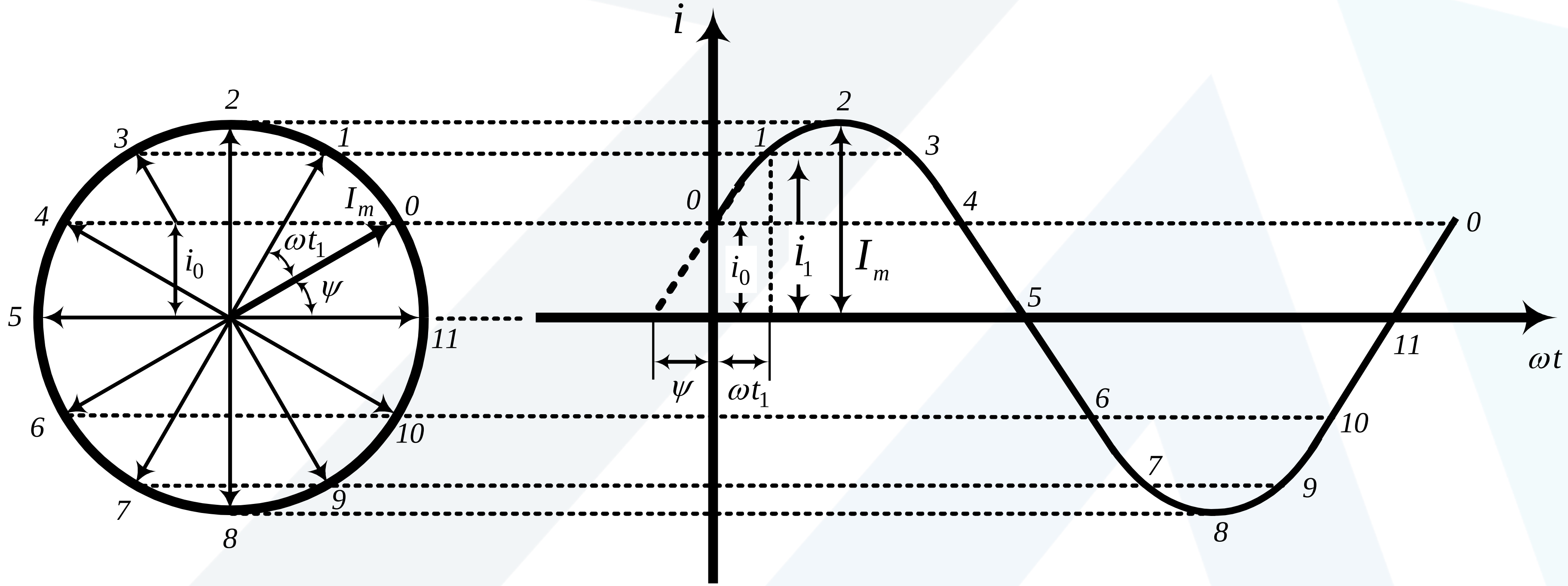


الموجة A متقدمة على الموجة B بزاوية 30 درجة

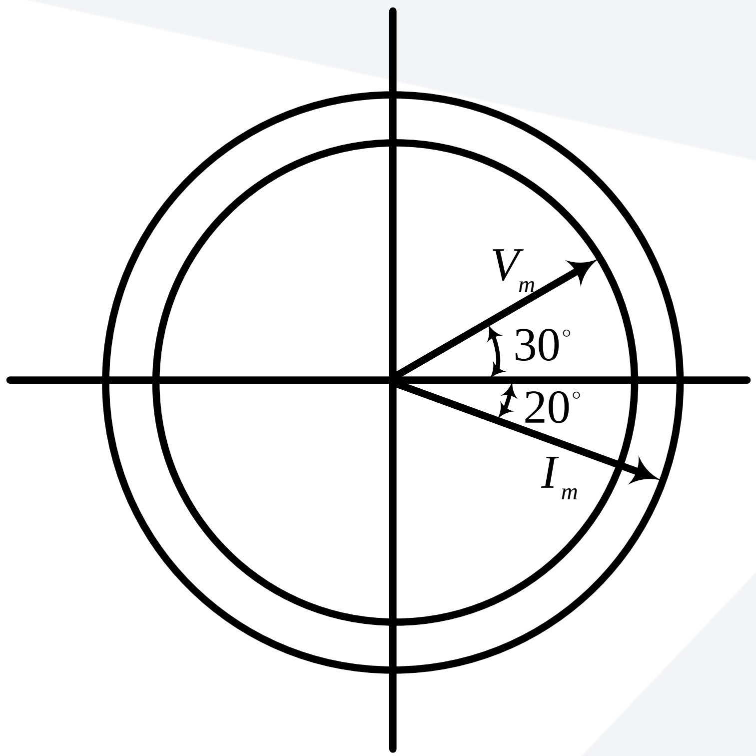
Sine Function



التمثيل الشعاعي للتوابع المتناوبة الجيبية واستعمالاته:



$$v = 125 \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + 30^{\circ})$$
$$i = 12 \cdot \mathrm{Sin}(\omega t - 20^{\circ})$$

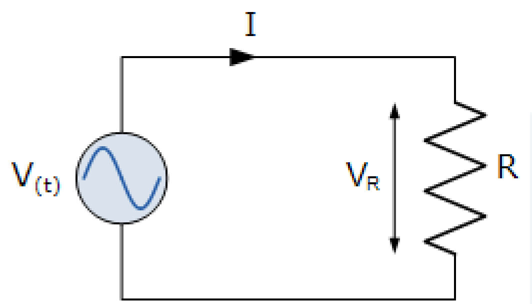


فإذا اعتمدنا مقاييس الرسم الآتية:

$$M_v = 50 volts/cm, M_i = 4A/cm$$

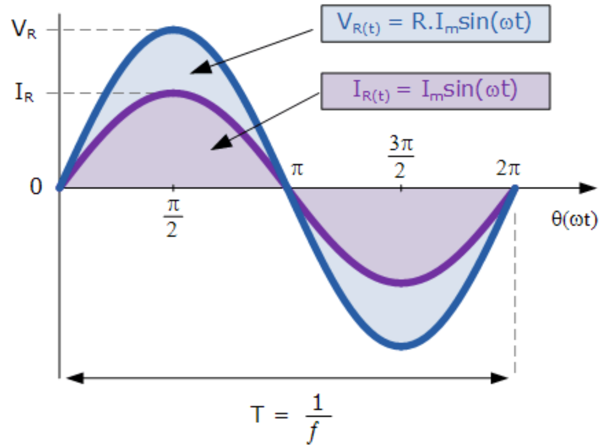
فإن قيم الجهد والتياركأطوال تكون مساوية:

$$V_m(cm) = \frac{V_m(volts)}{M_v} = \frac{125}{50} = 2.5[cm]$$
$$I_m(cm) = \frac{I_m(A)}{M_v} = \frac{12}{4} = 3[cm]$$



الأشكال الأساسية لدارات التيار المتناوب:

1. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة أومية فقط :

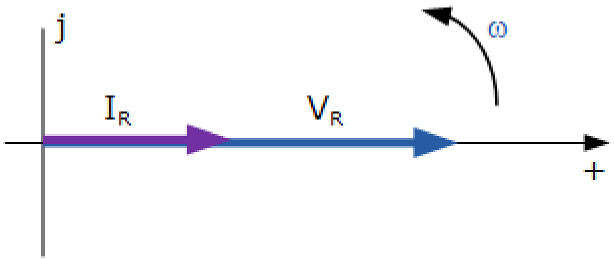


$$v_R = V_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \cdot \text{Sin}\omega t}{R} = I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

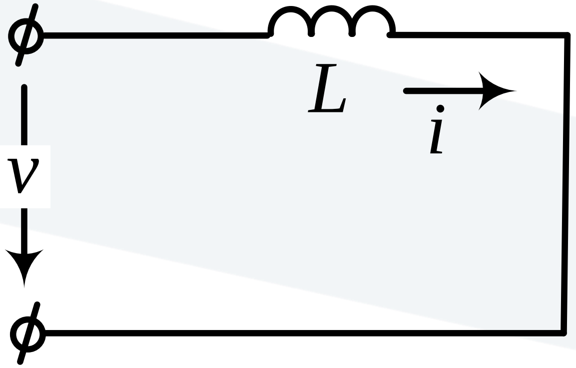
$$i = I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$v_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

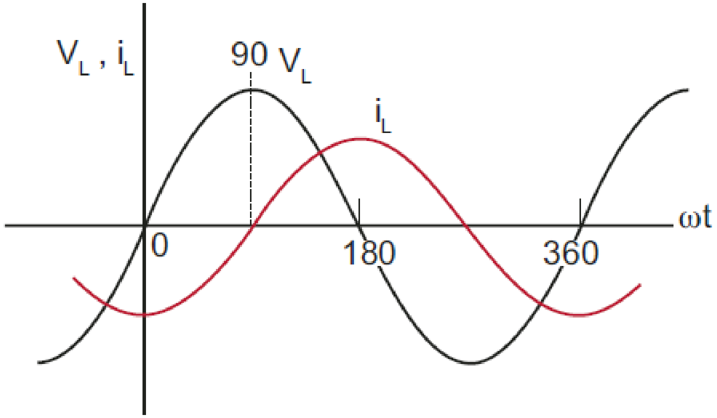


$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot I_m = 0.707 \cdot \frac{V_m}{R} = \frac{V}{R}$$

2. دارة كهربائية تحتوي على ملف فقط :



$$i = I_m \cdot Sin\omega t$$



$$e = -L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{d(I_m \cdot Sin\omega t)}{dt} = -L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Cos\omega t$$

$$e = -E_m \cdot Cos\omega t = E_m \cdot Sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$v + e = 0 \Rightarrow v = -e$$

$$\Rightarrow v = -(-L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Cos\omega t) = L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = V_m \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$V_m = E_m = I_m \cdot \omega \cdot L$$

* المفاعلة التحريضية:

يمكن من هذه العلاقة كتابة قانون أوم بالنسبة للقيم الأعظمية كما يأتي:

$$I_m = \frac{V_m}{\omega \cdot L} = \frac{V_m}{X_L}$$

يسمّى الجداء $X_L = \omega . L$ بالممانعة أو المفاعلة التحريضية للملف.

نقسم طرفي العلاقة الأخيرة على $\sqrt{2}$ فنحصل على قيمة قانون أوم بالنسبة للقيم الفعّالة:

أي أن:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L} = \frac{V_m}{\sqrt{2} \cdot X_L} \Rightarrow I = \frac{V}{\omega \cdot L} = \frac{V}{X_L}$$

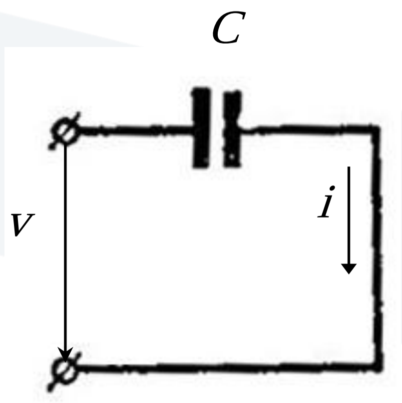
$$\frac{V}{I} = X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L$$

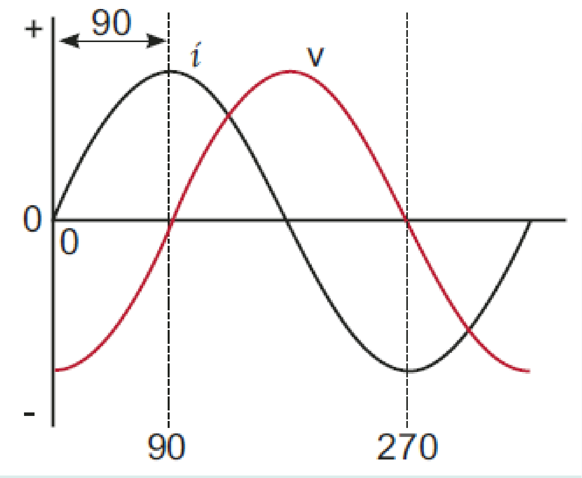
نلاحظ أن المفاعلة التحريضية تتناسب طرداً مع عامل التحريض الذاتي ومع التردد، وبالتالي تكون هذه المفاعلة في حالة التيار المستمر مساوية للصفر.

تُقاس المفاعلة التحريضية بواحدة $[\Omega]$، حيث:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L \Rightarrow [X_L] = [f] \cdot [L] = [\frac{1}{s}] \cdot [\Omega \cdot s] = [\Omega]$$

3. دارة كهربائية تحتوي على مكثف فقط:





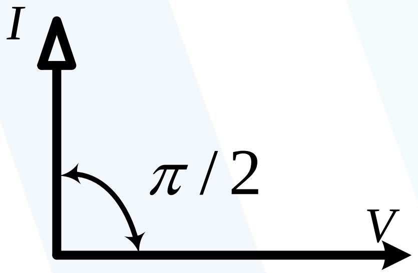
$$v = V_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$q = C \cdot v = C \cdot V_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt} \cdot (V_m \cdot \text{Sin}\omega t)$$

$$= C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \text{Cos}\omega t$$

$$\Rightarrow i = C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



* المفاعلة الردية (السعوية):

$$I_m = C \cdot \omega \cdot V_m \Rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{C \cdot \omega \cdot V_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = C \cdot \omega \cdot V = \frac{V}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{V}{X_C} \quad \Rightarrow V = \frac{I}{\omega \cdot C} = X_C \cdot I$$

تمثل هذه العلاقة قانون أوم بالقيم الفعّالة للدارة الحاوية على مكثّف سعته C.

تسمّى القيمة X_C بالممانعة (المفاعلة) السعوية (الردّية) للمكثّف، ويعبرعنها بواحدة [Ω]، حيث:

$$[X_C] = \frac{1}{[f] \cdot [C]} = \frac{1}{\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{\Omega}} = [\Omega]$$

نلاحظ من علاقة المفاعلة السعوية أنها تتناسب عكساً مع كلٍ من السعة وتردد التيار المتناوب.
فعند تغيّر التردد من $f=0$ حتى $f=\infty$ تتغيرهذه المفاعلة كم $X_C=\infty$ حتى $X_C=0$.

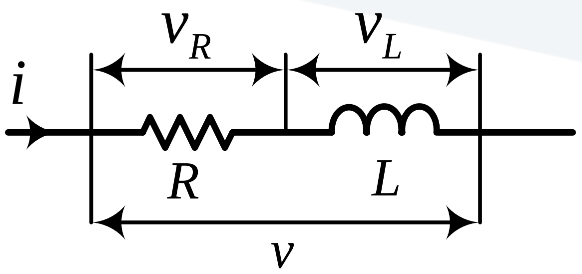
جدول يبين الجهد عبر كل عنصر في حالة مرور تيار متناوب جيبي:

الجهد في حالة تيار $i = I_m \cdot Cos\omega t$	الجهد في حالة تيار $i = I_m \cdot Sin\omega t$	الجهد في حالة تيار عام i	العنصر
$v_R = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t$	$v_R = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t$	$v_R = R \cdot i$	مقاومة R
$v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot (-Sin\omega t)$	$v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot Cos\omega t$	$v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$	ملف L
$v_C = \frac{I_m}{\omega \cdot C} \cdot Sin\omega t$	$v_C = \frac{I_m}{\omega \cdot C} \cdot (-Cos\omega t)$	$v_C = \frac{1}{C}\int i \cdot dt$	مكثّف C

جدول يبين التيار المار في كل عنصر في حالة تطبيق جهد جيبي:

العنصر	التيار نتيجة تطبيق جهد عام v	التيار نتيجة تطبيق جهد $v = V_m \cdot Sin\omega t$	التيار نتيجة تطبيق جهد $v = V_m \cdot Cos\omega t$
مقاومة R	$i_R = \frac{v}{R}$	$i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t$	$i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Cos\omega t$
ملف L	$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$	$i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t)$	$i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot Sin\omega t$
مكثّف C	$i_C = C \cdot \frac{dv}{dt}$	$i_C = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot Cos\omega t$	$i_C = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot (-Sin\omega t)$

4. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف بوصل تسلسلي (دارة R_L):



$$i = I_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

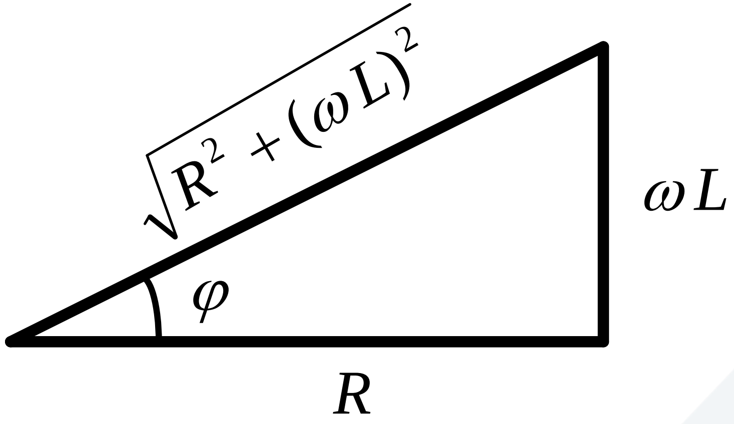
$$v = v_R + v_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \quad ، \quad v = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t + L \cdot \frac{d}{dt} \cdot (I_m \cdot Sin\omega t)$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t + L \cdot \omega \cdot I_m \cdot Cos\omega t$$

معادلة الجهد هي من الشكل:

$$v = A \cdot Sin(\omega t + \varphi) = A \cdot Sin\omega t \cdot Cos\varphi + A \cdot Cos\omega t \cdot Sin\varphi$$

$$R \cdot I_m = A \cdot Cos\varphi, L \cdot \omega \cdot I_m = A \cdot Sin\varphi$$

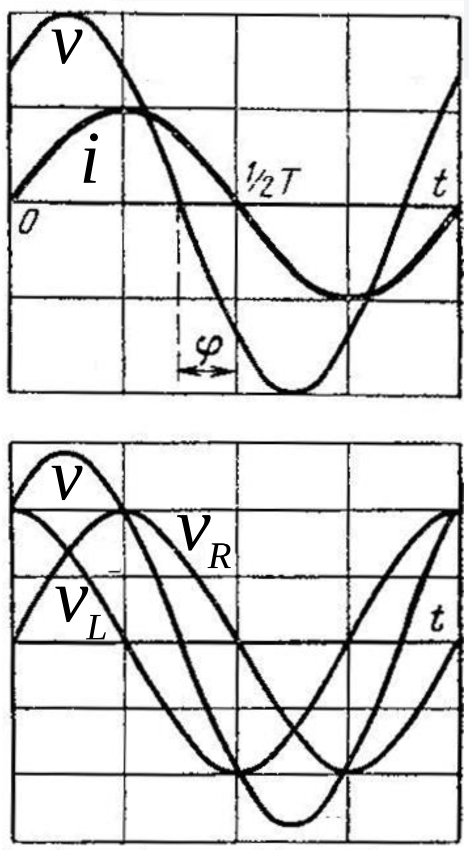


$$\mathbf{tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = arctg(\frac{\omega L}{R})}$$

$$\mathbf{Cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{Cos\phi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = I_m \cdot Z}$$

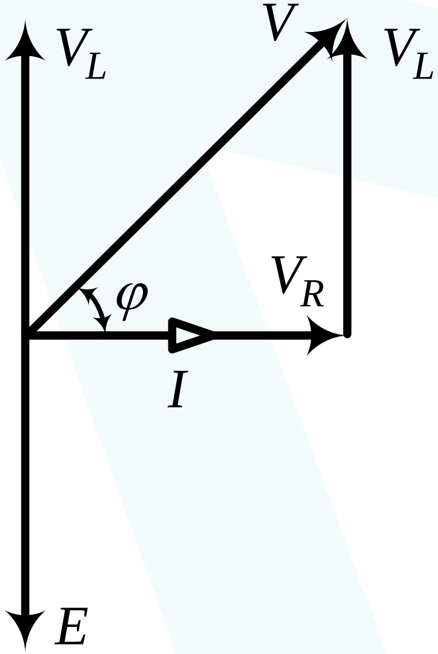
وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:



$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \mathrm{arctg}(\frac{\omega L}{R}))$$

أي أن التيارمتأخرعن الجهد بمقدار

$$\phi = \mathrm{arctg}(\frac{\omega L}{R})$$



مناقشة:

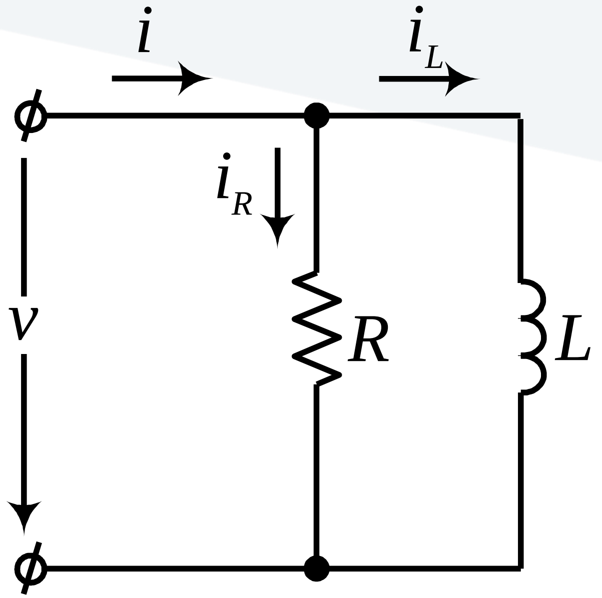
$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \mathrm{arctg}(\frac{\omega L}{R}))$$

❖ إذا كانت $R >> \omega L$ فإن $\frac{\omega L}{R} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة. $v_R = R \cdot I_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t$

❖ إذا كانت $R << \omega L$ فإن $\frac{\omega L}{R} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود ملف فقط في الدارة. $v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \mathrm{Cos}\omega t$

إذاً يكون التيارفي الدارات الحاوية على R و L متصلان تسلسلياً متأخراً عن الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωL

5. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف بوصل تفرعي (دارة RL):



$$v = V_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$i = i_R + i_L = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t + \frac{1}{L} \int V_m \cdot Sin\omega t \cdot dt$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t + \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t) \Rightarrow \quad i = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot Cos\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة نتيجة تطبيق الجهد، هي من الشكل:

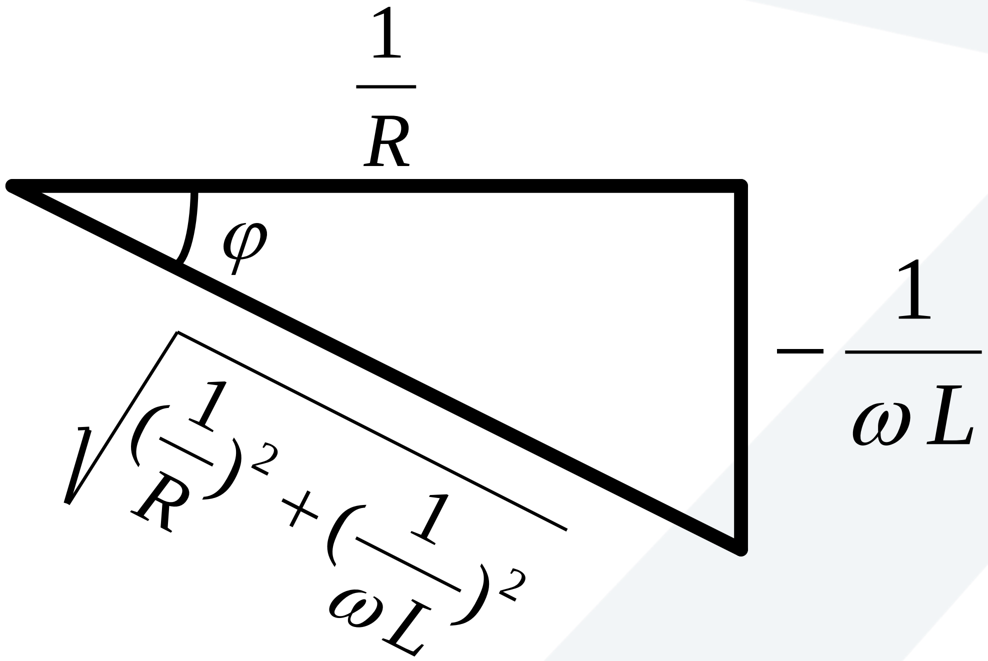
$$i = A \cdot Sin(\omega t + \varphi) = A \cdot Sin\omega t \cdot Cos\varphi + A \cdot Cos\omega t \cdot Sin\varphi$$

$$\frac{V_m}{R} = A \cdot \text{Cos}\varphi \Rightarrow \text{Cos}\varphi = \frac{V_m}{R \cdot A}, -\frac{V_m}{\omega \cdot L} = A \cdot \text{Sin}\varphi \Rightarrow \text{Sin}\varphi = -\frac{V_m}{\omega \cdot L \cdot A}$$

$$tg\varphi = \frac{\text{Sin}\varphi}{\text{Cos}\varphi} = -\frac{\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = -\frac{R}{\omega L} \Rightarrow \varphi = -arctg\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$ وبالتالي فإن:

$$\text{Cos}\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{R \cdot \text{Cos}\varphi} = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}} = \frac{V_m}{Z}$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:



$$i = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega L})^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t - \mathrm{arctg}(\frac{R}{\omega L}))$$

أي أن التيار متأخر على الجهد بمقدار:

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{R}{\omega L})$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

مناقشة:

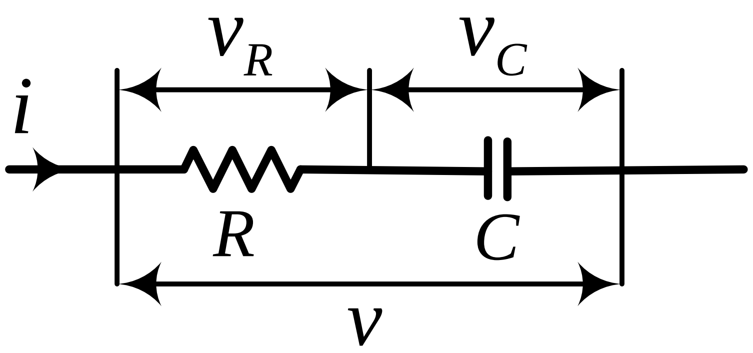
$$i = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega L})^2} \cdot Sin(\omega t - arctg(\frac{R}{\omega L}))$$

❖ إذا كانت $R << \omega L$ فإن $\frac{R}{\omega L} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة. $i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t$

❖ إذا كانت $R >> \omega L$ فإن $\frac{R}{\omega L} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود ملف فقط في الدارة. $i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t)$

إذاً يكون التيارفي الدارات الحاوية على R و L متصلان تفرعياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωL

6. دارة كهربائية تحتوي على مقاومةومكثف بوصل تسلسلي (دارة RC):



$$i = I_m \cdot Cos\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$v = v_R + v_C = R \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

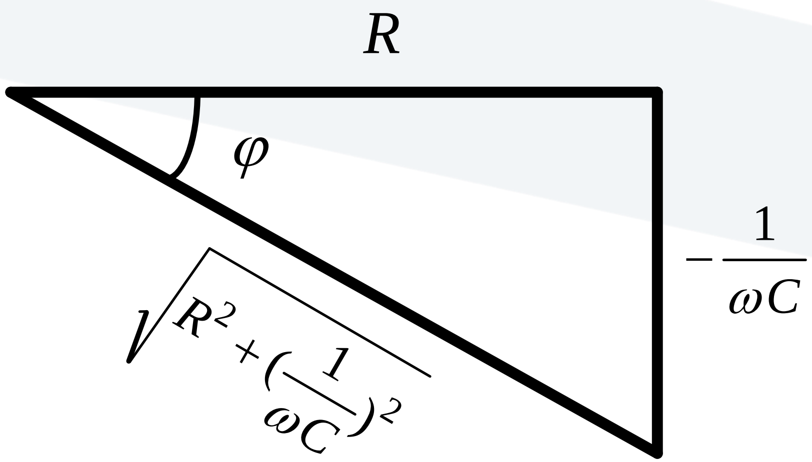
$$v = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t + \frac{1}{C}\int I_m \cdot Cos\omega t \cdot dt$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t + \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة الجهد، المفترض أن يكون مطبقاً، هي من الشكل:

$$v = A \cdot Cos(\omega t + \varphi) = A \cdot Cos\omega t \cdot Cos\varphi - A \cdot Sin\omega t \cdot Sin\varphi$$

$$R \cdot I_m = A \cdot \cos\varphi \quad , \quad \frac{1}{\omega C} \cdot I_m = -A \cdot \sin\phi$$



من مثلث الممانعات:

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega CR} \Rightarrow \varphi = -\text{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{\cos\varphi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}}$$

$$\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = I_m . Z$$

وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:

$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t - \mathrm{arctg}(\frac{1}{\omega CR}))$$

أي أن التيارمتقدم على الجهد بمقدار:

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{1}{\omega CR})$$

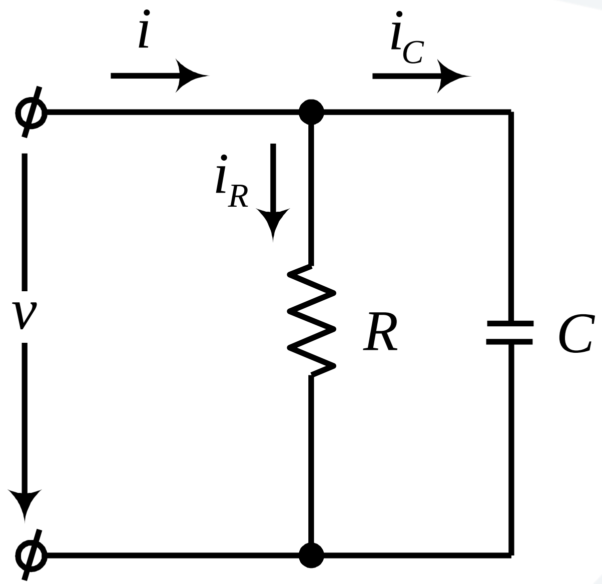
مناقشة:

$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \mathrm{Sin}\left(\omega t - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

- إذا كانت $R >> \frac{1}{\omega C}$ فإن $\frac{1}{\omega CR} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة.
- إذا كانت $R << \frac{1}{\omega C}$ فإن $\frac{1}{\omega CR} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مكثف فقط في الدارة.

إذاً يكون التيار في الدارات الحاوية على R و C متصلان تسلسلياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و $\frac{1}{\omega C}$

7. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة ومكثف بوصل تفرعي (دارة RC):



$$v = V_m \cdot \sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

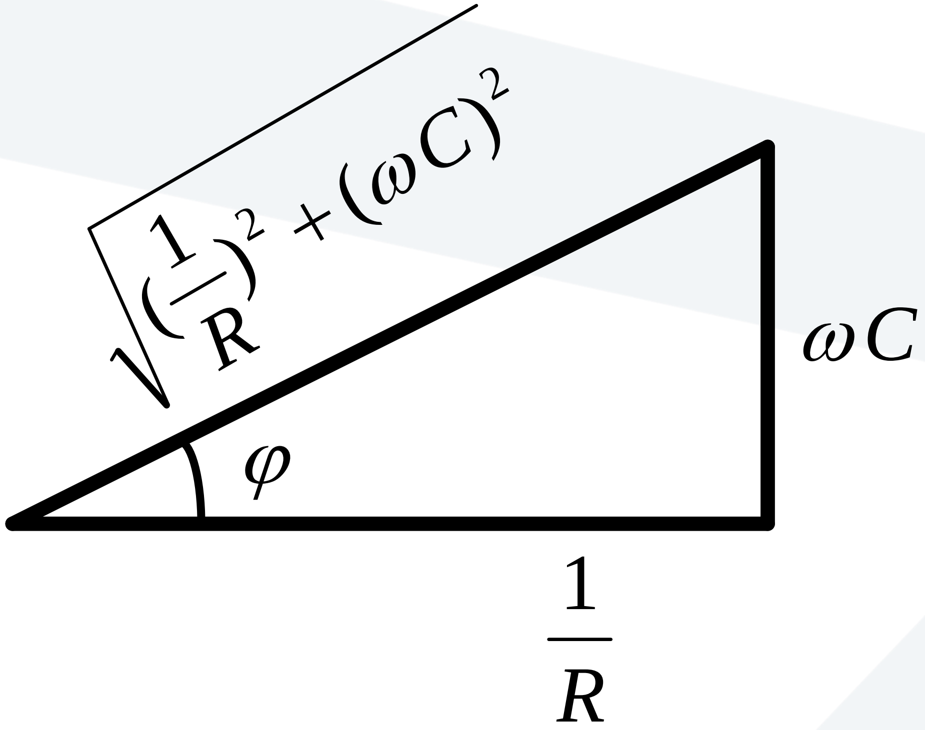
$$i = i_R + i_C = \frac{v}{R} + C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{V_m \cdot \sin\omega t}{R} + C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot \sin\omega t)$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \sin\omega t + C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \cos\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$i = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$



$$\frac{V_m}{R} = A \cdot Cos\varphi \Rightarrow Cos\varphi = \frac{V_m}{R \cdot A}$$

$$C \cdot \omega \cdot V_m = A \cdot Sin\varphi \Rightarrow Sin\varphi = \frac{C \cdot \omega \cdot V_m}{A}$$

وبالتالي فإن:

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \omega \cdot C \cdot R \Rightarrow \varphi = arctg(\omega \cdot C \cdot R)$$

$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C)^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{R \cdot Cos\varphi} = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C)^2}}} = \frac{V_m}{Z}$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:

$$i = V_m \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega \cdot C)^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \mathrm{arctg}(\omega \cdot C \cdot R))$$

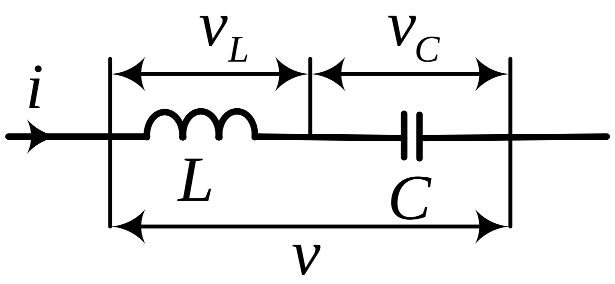
أي أن التيار متقدم على الجهد بمقدار:

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\omega \cdot C \cdot R)$$

إذاً يكون التيار في الدارات الحاوية على R و C متصلان تفرعياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωC

8. دارة كهربائية تحتوي على ملف ومكثف بوصل تسلسلي (دارة LC):

$$i = I_m \cdot \sin\omega t$$



معادلة تشغيل الدارة:

$$v = v_L + v_C = L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

$$v = L \cdot \frac{d}{dt} \cdot (I_m \cdot \sin\omega t) + \frac{1}{C} \cdot \int I_m \cdot \sin\omega t \cdot dt$$

$$v = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t + \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot (-\cos\omega t)$$

$$v = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot \cos\omega t \Rightarrow$$

$$v = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m \cdot \cos\omega t = V_m \cdot \cos\omega t$$

$$v = (L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}) \cdot I_m \cdot Cos\omega t = V_m \cdot Cos\omega t$$

$$v = V_m \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

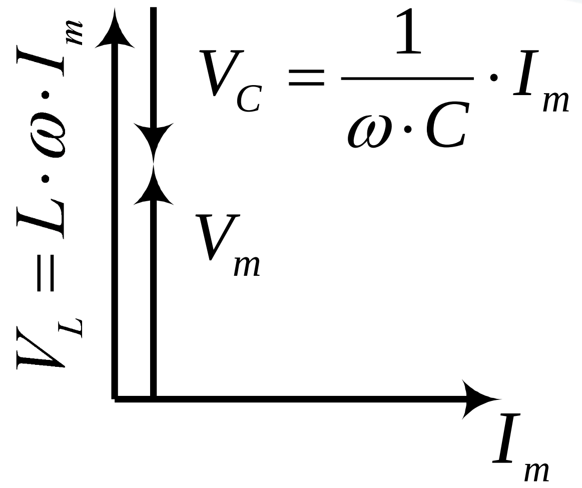
معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$v = A \cdot Sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

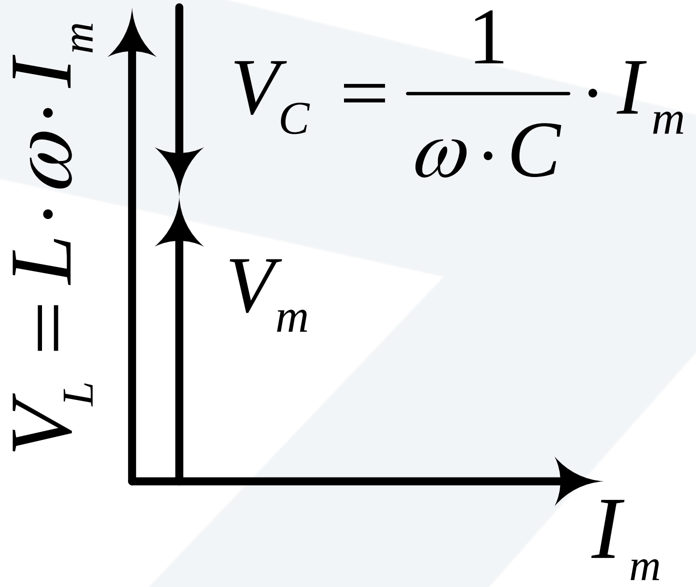
وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة سريان التيار i هي:



$$\mathbf{v = (L\cdot\omega - \frac{1}{\omega\cdot C})\cdot I_m\cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

أي أن التيارمتأخرعن الجهد بمقدار: $\frac{\pi}{2}$

إذاً يكون التيارفي الدارات الحاوية على L و C متصلان تسلسلياً متأخراً عن الجهد بزاوية مقدارها 90°.



$$\left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m \cdot Cos\omega t = V_m \cdot Cos\omega t$$

$$\Rightarrow Z = \frac{V_m}{I_m} = L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

مناقشة:

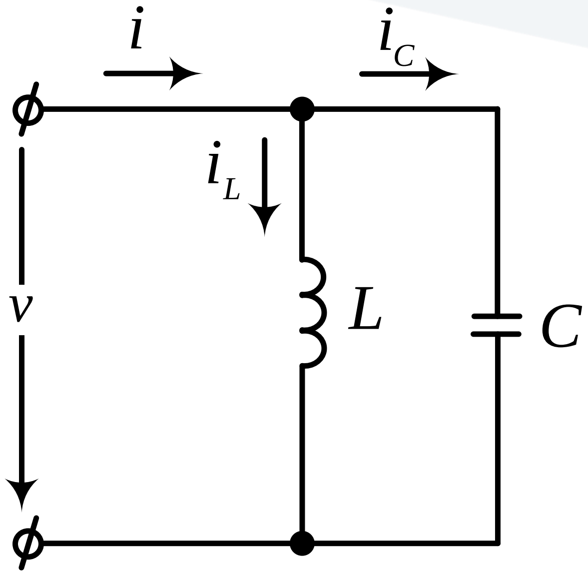
$$Z = \frac{V_m}{I_m} = L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

- إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ فإن للدارة صفة تحريضية، وعندها يكون اتجاه شعاع الجهد الكلي هو من اتجاه شعاع الجهد المطبّق على الوشيعة.

- إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ فإن للدارة صفة سعوية، وعندها يكون اتجاه شعاع الجهد الكلي هو من اتجاه شعاع الجهد المطبّق على المكثف.

- إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون الدارة في حالة طنين Resonance.

9. دارة كهربائية تحتوي على ملف ومكثف بوصل تفرعي (دارة LC):



$$\mathbf{v = V_m \cdot Sin\omega t}$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$\mathbf{i = i_L + i_C = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt + C \cdot \frac{dv}{dt}}$$

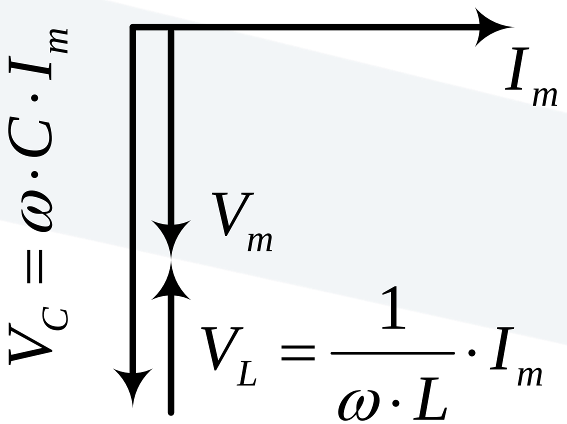
$$\mathbf{i = C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot Sin\omega t) + \frac{1}{L} \cdot \int V_m \cdot Sin\omega t}$$

$$\mathbf{i = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot Cos\omega t + \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t)}$$

$$\mathbf{i = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot Cos\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot Cos\omega t}$$

$$\mathbf{= (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot Cos\omega t}$$

$$\mathbf{i = (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$



معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$i = A \cdot Sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m = Z \cdot V_m$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:

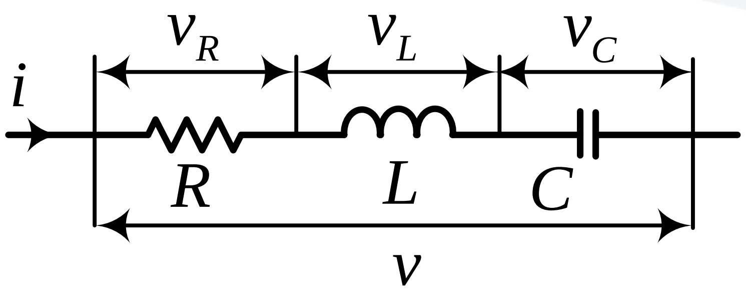
$$i = (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

أي أن الجهد متأخر عن التيار بمقدار $\frac{\pi}{2}$

إذاً يكون الجهد في الدارات الحاوية على L و C متصلان تفرعياً متأخراً عن التيار بزاوية مقدارها 90^o.

10. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف ومكثف بوصل تسلسلي (دارة RLC):

$$i = I_m \cdot \sin\omega t$$



معادلة تشغيل الدارة:

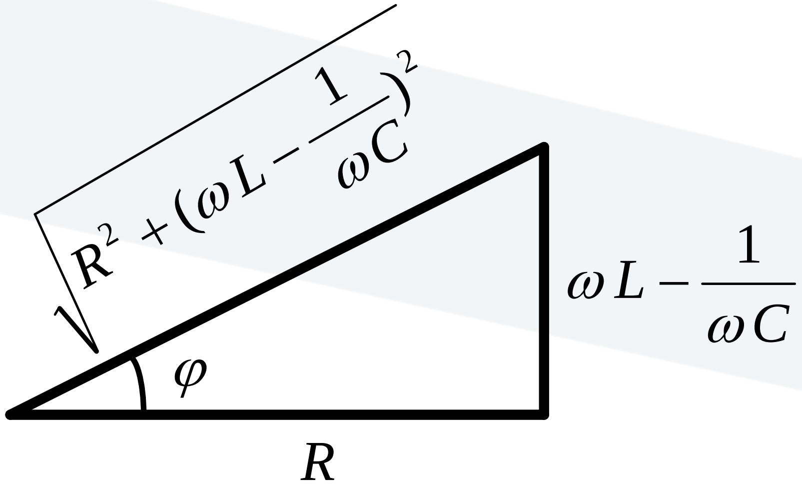
$$v = v_R + v_L + v_C = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

$$v = R \cdot I_m \cdot \sin\omega t + L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t + \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot (-\cos\omega t)$$

$$v = R \cdot I_m \cdot \sin\omega t + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot I_m \cdot \cos\omega t$$

معادلة الجهد هي من الشكل: $v = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$

$$R \cdot I_m = A \cdot \cos\varphi \quad , \quad (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot I_m = A \cdot \sin\varphi$$



$$\mathbf{tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}$$

$$\mathbf{Cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{Cos\varphi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = I_m . Z}$$

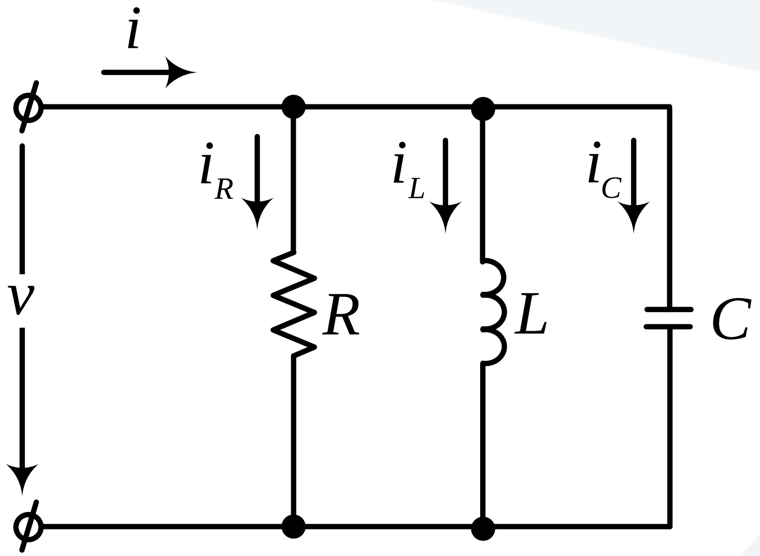
وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:

$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t - \mathrm{arctg}(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}))$$

مناقشة:

- إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ موجبة، ويكون التيارمتأخراً عن الجهد، والتأثير العام للدارة تحريضي.
- إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ سالبة، ويكون التيارمتقدماً على الجهد، والتأثير العام للدارة سعوي.
- إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ مساوية للصفر، ويكون لكل من التياروالجهد الطورنفسه، وعندها تصبح الممانعة مساوية للمقاومة $Z = R$ يسمّى هذا الشرط شرط رنين أو **طنين الجهد** **Voltage Resonance**.

11. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف ومكثف بوصل تفرعي (دارة RLC):



$$v = V_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt + C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{V_m \cdot Sin\omega t}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int V_m \cdot Sin\omega t \cdot dt + C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot Sin\omega t)$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot Cos\omega t + C \cdot \omega \cdot V_m \cdot Cos\omega t$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot Cos\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة نتيجة تطبيق الجهد، هي من الشكل:

$$i = A \cdot Sin(\omega t + \varphi) = A \cdot Sin\omega t \cdot Cos\varphi + A \cdot Cos\omega t \cdot Sin\varphi$$

$$\frac{V_m}{R} = A \cdot Cos\varphi$$

$$(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m = A \cdot Sin\varphi$$

وبالتالي فإن:

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})}{\frac{1}{R}} \Rightarrow \varphi = arctg(\frac{(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})}{\frac{1}{R}})$$

$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2}}}$$

$$\Rightarrow A = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2} = V_m \cdot Z$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:

$$i = Z \cdot V_m \cdot Sin(\omega t + arctg(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}})$$

إذاً تعتمد زاوية التيار في الدارات الحاوية على R و C و L بوصل تفرعي على القيم النسبية لكلٍ من $1/\omega \cdot L$ و $\omega \cdot C$

$$i = Z \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \operatorname{arctg}(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}}))$$

مناقشة:

- إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ موجبة، ويكون التيار متقدماً على الجهد، والتأثير العام للدارة سعوي.
- إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ سالبة، ويكون التيار متأخراً عن الجهد، والتأثير العام للدارة تحريضي.
- إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ مساوية للصفر، ويكون لكل من التيار والجهد الطور نفسه، وعندها تصبح الممانعة مساوية لمقلوب المقاومة $Z = 1/R$

يسمّى هذا الشرط شرط رنين أو طنين التيار **Current Resonance** .

مسائل

1. دارة مكونة من مقاومة ومكثف RC حيث $R=5\ [\Omega]$ و $C=20[\mu F]$. يمر فيها تيار معادلته الزمنية $i=2.\cos 5000t$. اكتب معادلة الجهد الكلي المطبق عليها.

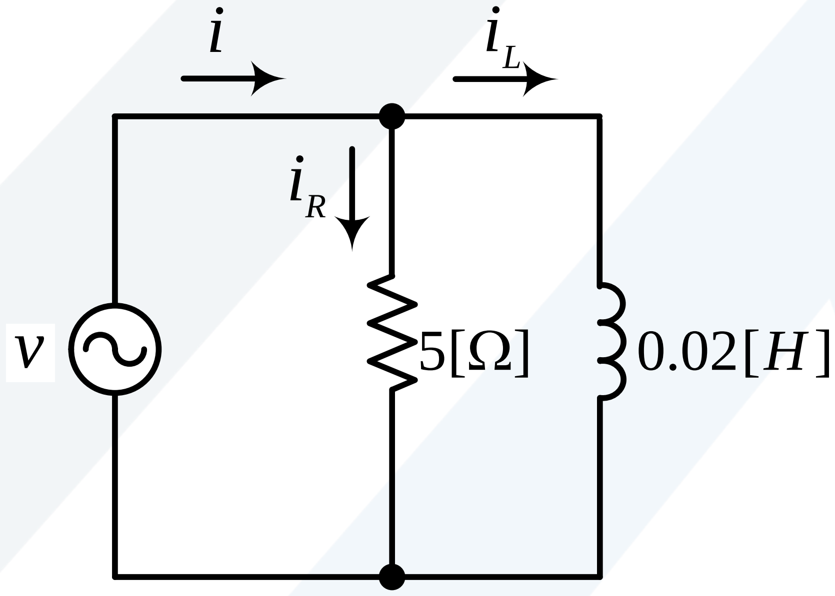
2. يمر في دارة RL تسلسلية التيار $i=2.\sin 500t$

حيث $R=10\ [\Omega]$ و $L=20\ [mH]$.

احسب الجهد الكلي المطبق عليها.

3. إذا كانت المعادلة الزمنية للجهد المطبق على الدارة التفرعية الموضحة بالشكل هي: $v=100.\sin(1000t+50^{o})$ [V]

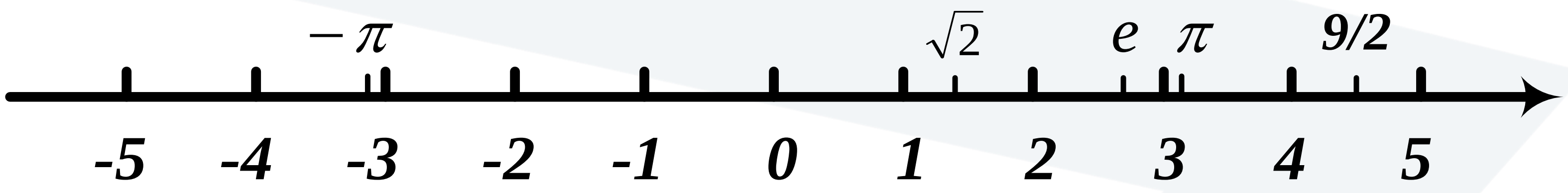
فما هي المعادلة الزمنية للتيار الكلي المار في الدارة؟



التمثيل العقدي لبارامترات دارات التيار المتناوب

الأعداد المركبة والتمثيل العقدي:

1. الأعداد الحقيقية Real Numbers:

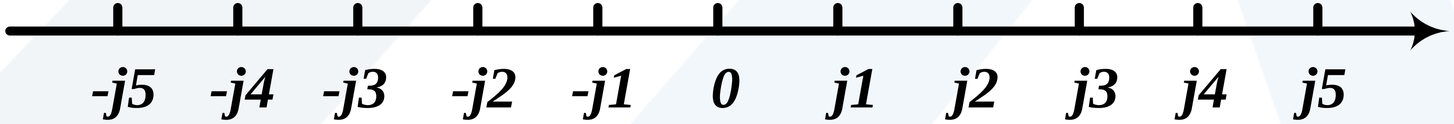


2. الأعداد التخيّلية Imaginary Numbers: يسمّى الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب عدداً تخيّلياً نقياً، مثل:

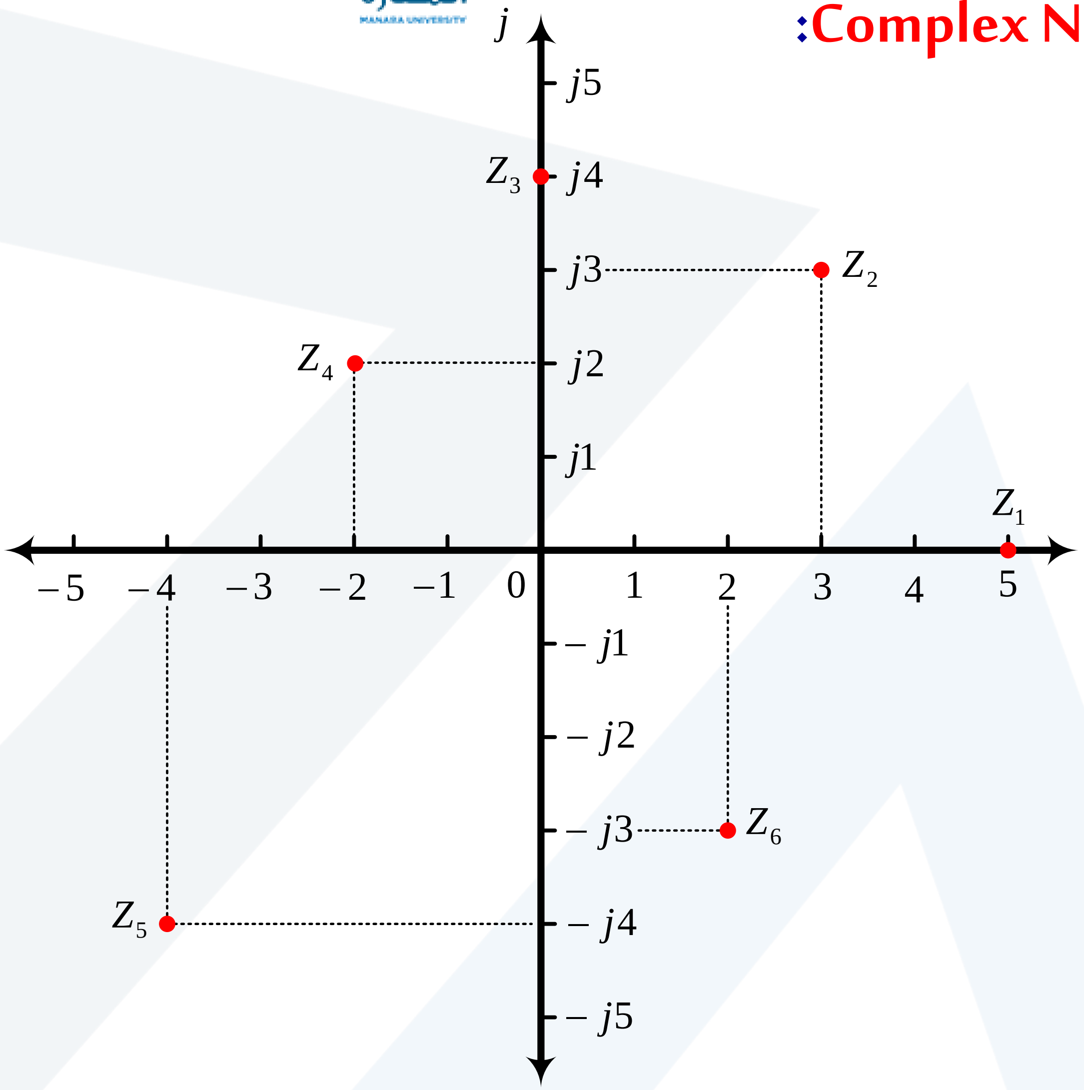
$$\sqrt{-12}, \sqrt{-7}, \sqrt{-2}, \sqrt{-1}$$

فإذا فرضنا أن $j = \sqrt{-1}$ فإن: $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}, \sqrt{-5} = j\sqrt{5}, \ldots$

ويكون: $j^2 = -1, j^3 = j^2 \times j = -1j, \ldots.$



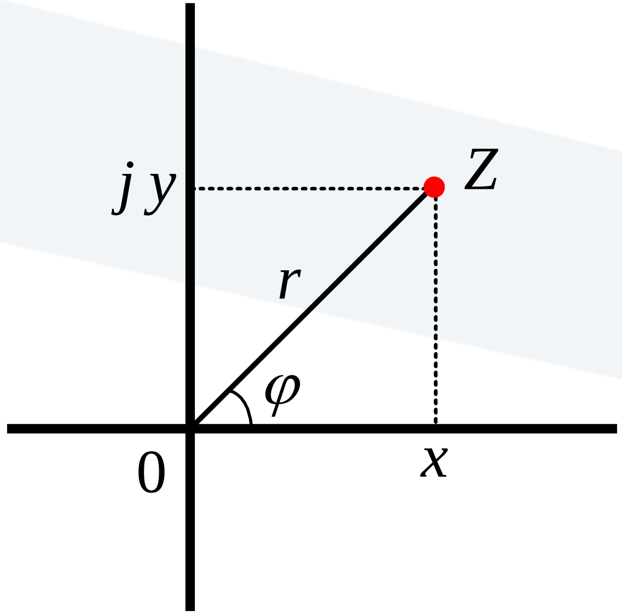
3. الأعداد المركبة Complex Numbers:



الشكل الديكارتي
لتمثيل العدد المركّب

$$Z_1 = 5$$
$$Z_2 = 3 + j3$$
$$Z_3 = j4$$
$$Z_4 = -2 + j2$$
$$Z_5 = -4 - j4$$
$$Z_6 = 2 - j3$$

4. أشكال أخرى لتمثيل الأعداد المركبة:



أ- صيغة حساب المثلثات:

$$Z = x + jy = r \cdot Cos\varphi + jr \cdot Sin\varphi = r \cdot (Cos\varphi + jSin\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg(\frac{y}{x})$$

ب- الصيغة الأسّيّة:

$$e^{j\varphi} = Cos\varphi + jSin\varphi$$

$$Z = r \cdot (Cos\varphi + jSin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$$

ج- الصيغة القطبية:

$$Z = r \cdot \angle\varphi$$

حيث يُعبّر عن الزاوية φ عادةً بالدرجات.

5. مرافق العدد المركّب:

مرافق $Z = x + jy$ هو $Z^* = x - jy$

مرافق $Z = r \cdot e^{j\phi}$ هو $Z^* = r \cdot e^{-j\phi}$

مرافق $Z = r \cdot \angle\phi$ هو $Z^* = r \cdot \angle - \phi$

مرافق $Z = r \cdot (\mathrm{Cos}\phi + j\mathrm{Sin}\phi)$ هو $Z^* = r \cdot (\mathrm{Cos}\phi - j\mathrm{Sin}\phi)$

6. مجموع وفرق الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = 5 - j2, Z_2 = -3 - j8$$

$$Z_1 + Z_2 = 5 - j2 - 3 - j8 = (5 - 3) + j(-2 - 8)$$

$$= 2 - j10$$

7. ضرب الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}, Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \times (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$Z_1 = r_1\angle\varphi_1, Z_2 = r_2\angle\,\varphi_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1\angle\varphi_1) \times (r_2\angle\varphi_2) = r_1 \cdot r_2\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$Z_1 = x_1 + jy_1, Z_2 = x_2 + jy_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + jy_1) \times (x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

8. قسمة الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \;, Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$Z_1 = r_1 \angle \varphi_1 \;, Z_2 = r_2 \angle \varphi_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Z_1 = x_1 + jy_1, Z_2 = x_2 + jy_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \cdot \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

تُعد الصيغتان القطبية والأسّيّة أفضل صيغ لإجراء عمليتي الضرب القسمة، أما الصيغة الديكارتية فهي الأفضل لإجراء عمليتي الجمع والطرح.

Impedance and Admittance

Impedances and admittances of passive elements.

Element	Impedance	Admittance
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

الشكل العقدي للممانعة المكافئة:

$$\bar{Z} = R + jX_L$$
$$\bar{Z} = R - jX_C$$

الشكل العقدي للسماحية Admittance المكافئة:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{\bar{Z}}} = \frac{1}{R+jX} = G + jB = \frac{1}{R+jX} \cdot \frac{R-jX}{R-jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2}$$

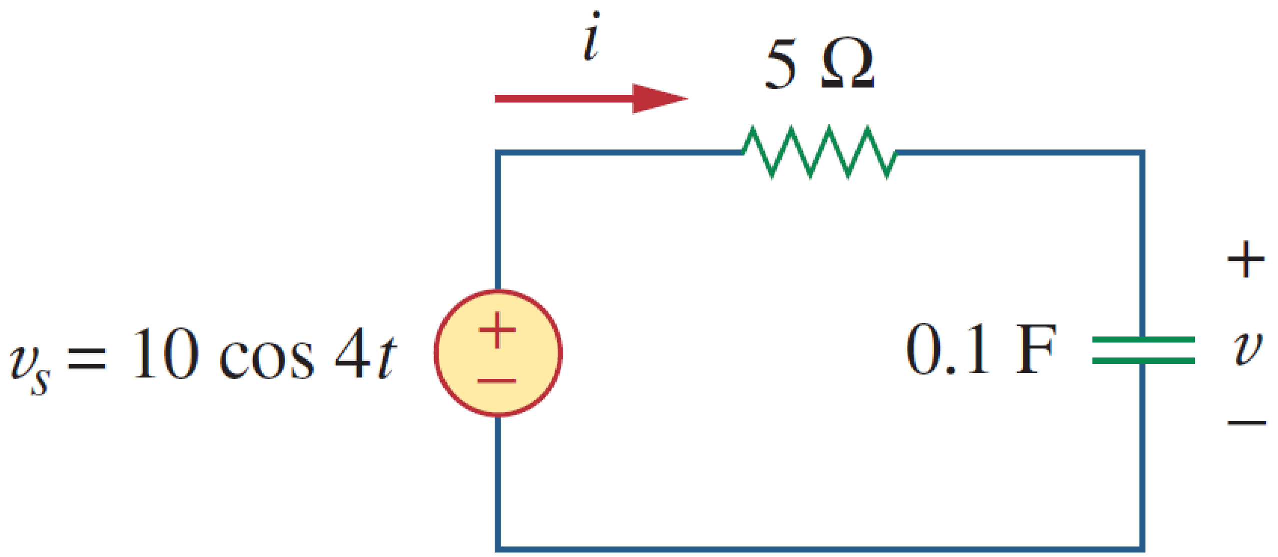
$$\Rightarrow \quad G = \frac{R}{R^2+X^2} \quad , \qquad B = -\frac{X}{R^2+X^2}$$

$$\bar{Y} = G + jB_C, \bar{Y} = G - jB_L$$
$$\bar{Y} = g + jb_C, \bar{Y} = g - jb_L$$

G- conductance

B-susceptance.

Find v(t) and i(t) in the circuit shown in Fig.



Solution:

From the voltage source $10\cos 4t$, $\omega=4$, $V_S = 10\angle 0^\circ V$

The impedance is

$$\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = 5 - j2.5\ \Omega$$

Hence the current

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2}$$
$$= 1.6 + j0.8 = 1.789\angle 26.57^\circ \text{ A}$$

The voltage across the capacitor is

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789\angle 26.57^\circ}{j4 \times 0.1}$$

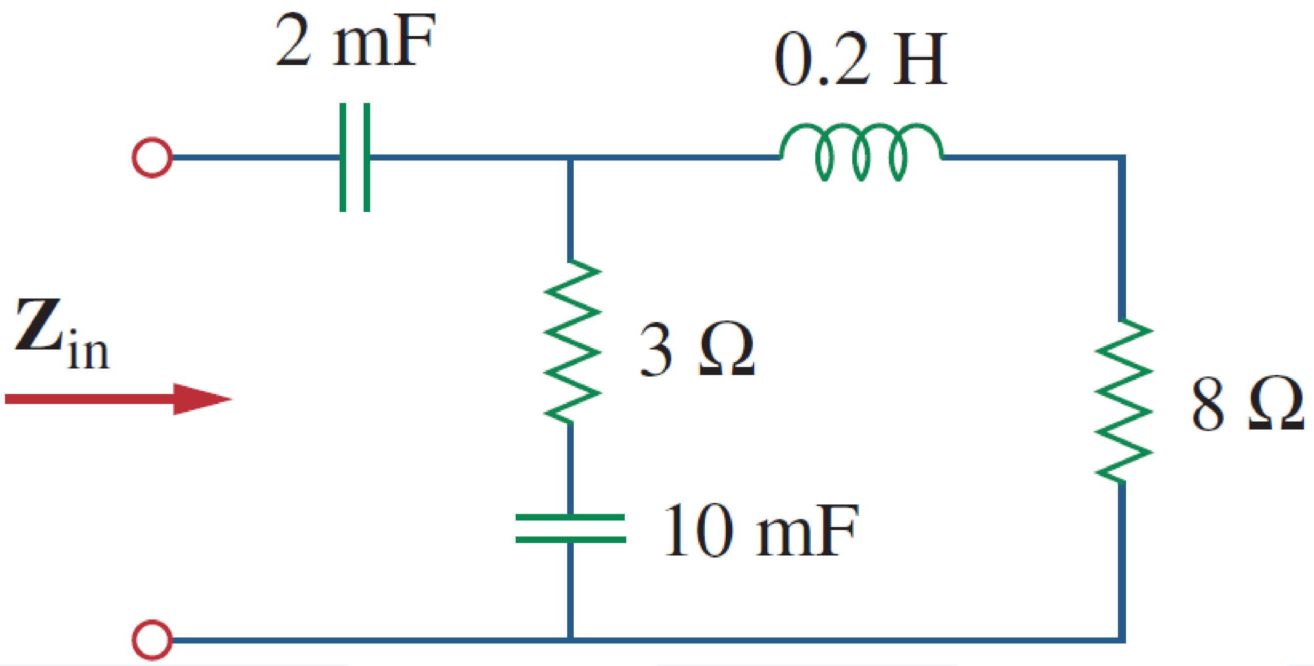
$$= \frac{1.789\angle 26.57^\circ}{0.4\angle 90^\circ} = 4.47\angle -63.43^\circ \text{ V}$$

$$i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) \text{ A}$$

$$v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ) \text{ V}$$

جميع المعادلات والقوانين وطرق الحل المتبعة في تحليل الدارات الكهربائية التي تعرفنا عليها في دارات DC تنطبق تماماً على دارات AC بالاستعاضة عن المقاومات بالممانعات.

Find the input impedance of the circuit in Fig. Assume that the circuit operates at $\omega = 50$ rad/s.



التوابع الدورية

PERIODIC FUNCTIONS

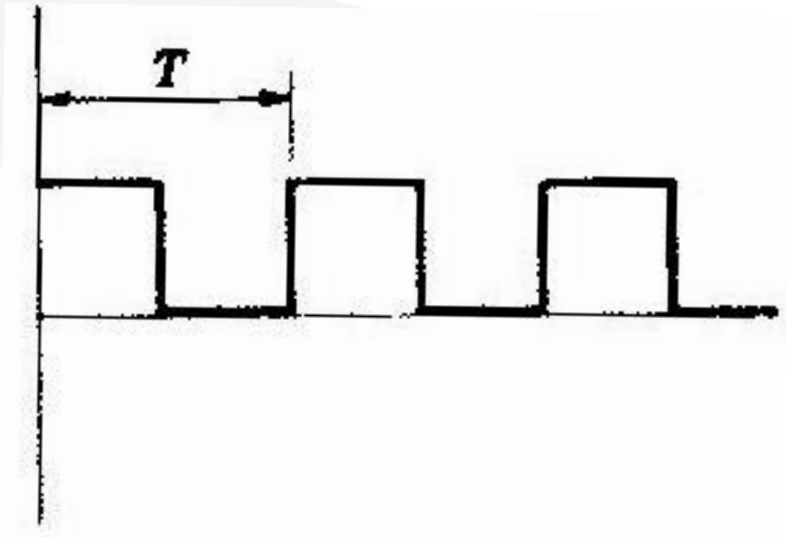
يُعرّف التابع الدوري f(t) بأنه تابع متغيّر مع الزمن، ويأخذ القيم نفسها بعد مرور فترات زمنية متساوية T، أي:

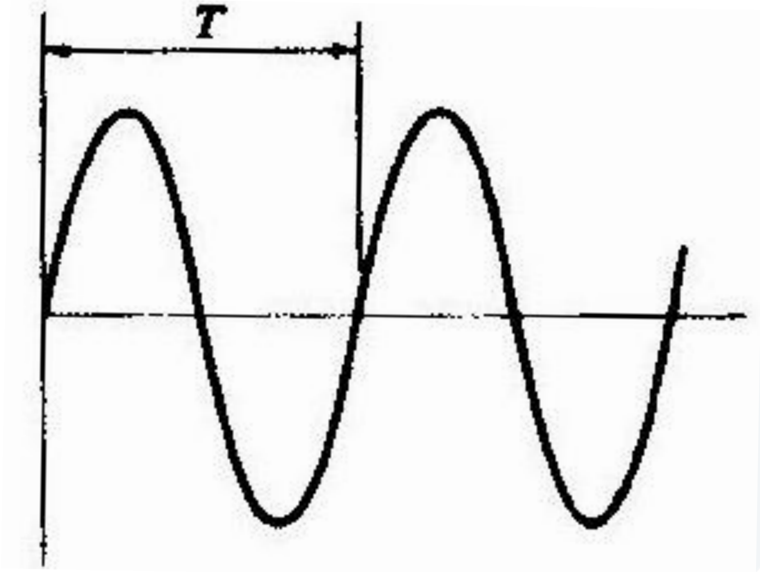
$$f(t) = f(t + T) + f(t + 2T) + \dots + f(t + nT)$$

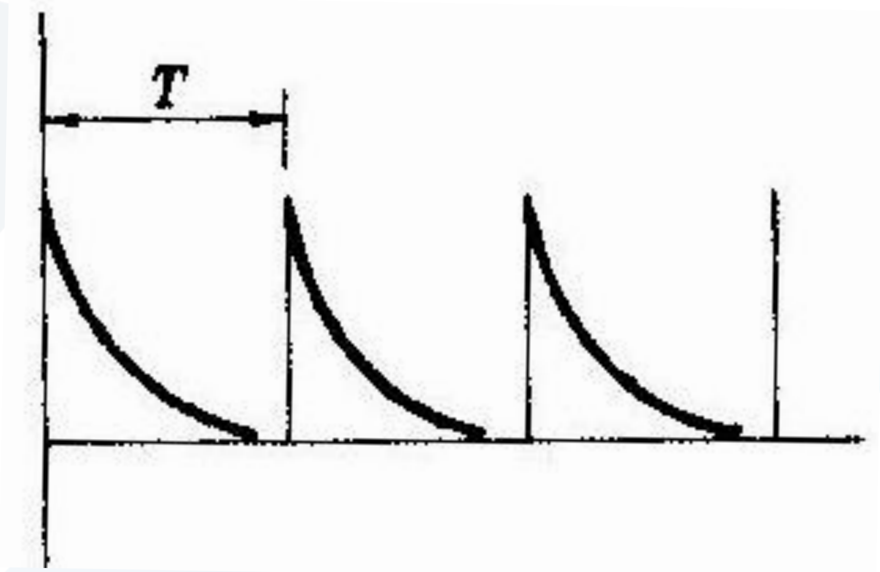
حيث:

n - عدد صحيح.

T - دور التابع، ويُعرّف بأنه أصغر فترة زمنية يبدأ عندها التابع برسم نفسه من جديد.







نماذج لتوابع موجيّة دورية.

التردد (Frequency): هو عدد الأدوار في الثانية الواحدة، ويرمزله بالرمز (f)، وهو قيمة تساوي مقلوب الدور، أي:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = [\frac{1}{s}] = [s^{-1}] = [Hz]$$

يسمّى جداء التردد بالمقدار (2π) بالتردد الزاوي، ويرمزله بالرمز (ω)

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

القيمة اللحظية (الآنية) (Instantaneous Value): هي القيمة التي يأخذها التابع في كل لحظة زمنية t ، ويُرمز لها عادةً بحرف صغير، فالقيمة اللحظية للتيار هي i، وللجهد v، وللاستطاعة p،... وهكذا.

القيمة العظمى (الأعظمية) (المطال) (Amplitude):

هي أكبر قيمة لحظية يأخذها التابع الدوري خلال دور واحد، ويُرمز لها عادةً بحرف كبير مع دليل m (max)، فالقيمة العظمى للتيار هي I_m، وللجهد V_m،... وهكذا.

خصائص التوابع الدورية:

1- القيمة الفعّالة (المنتجة) Effective Value:

تُسمى أيضاً (Root Mean Square Value) الجذر التربيعي لمتوسط مربع القيمة (rmsv)، ويرمزلها عادةً بحرف كبير، فمثلاً القيمة الفعّالة للتيار هي I، وللجهد V، وللقوة المحركة الكهربائية E،... وهذه القيمة هي التي تعطيها أجهزة القياس، وهي التي توضع على اللوحات الاسمية للتجهيزات. تُعرّف القيمة الفعّالة للتيار المتناوب بأنها قيمة التيار المستمر المكافئ الذي لو مرّ عبر المقاومة نفسها التي تعترض مسار التيار المتناوب لسبّب في انتشار كمية الحرارة نفسها (سخونة) فيها خلال دور واحد. كمية الحرارة التي ينشرها التيار المتناوب عند وجود مقاومة R خلال زمن صغير ومتناهي في الصغر dt هي:

$$dW = i^2 \cdot R \cdot dt$$

أما خلال دوورواحد T فتكون كمية الحرارة مساوية:

$$W_T = \int_0^T dW = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt$$

بمساواة العلاقة السابقة مع كمية الحرارة المنتشرة في المقاومة R نفسها عند مرور تيار مستمر I فيها، وذلك خلال دوورواحد T والمساوية $I^2.R.T$ يكون:

$$I^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt$$

قيمة المقاومة في الطرفين R هي نفسها، وهي كمية ثابتة، وبالتالي:

$$I^2 \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt}$$

$$Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \cdot dt}$$

وهي علاقة القيمة الفعّالة للتيار. وبشكل عام:

إذا تغيّر التيار وفق تابع جيبي $i = I_m \cdot \sin\omega t$ تحسب القيمة الفعّالة له كما يأتي:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2\omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t \cdot dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot I_m$$

2- القيمة المتوسطة Average Value:

$$\text{القيمة المتوسطة للتابع} = \frac{\text{المساحة الواقعة تحت منحني التابع خلال دور واحد}}{T\ \text{الدور}}$$

$$i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int i \cdot dt$$

تعطى القيمة المتوسطة للتيار حسب التعريف السابق وخلال دور واحد بالعلاقة:

$$I_{av} = \frac{Q}{T} \Rightarrow I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i \cdot dt$$

$$i = I_m \cdot \sin\omega t \Rightarrow I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T I_m \cdot \sin\omega t \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega \cdot T} \cdot \left(\cos\omega t\Big|_0^T\right)$$

$$I_{av} = -\frac{I_m}{\omega \cdot T} \cdot (\mathrm{Cos}2\pi - \mathrm{Cos}0) = -\frac{I_m}{\omega \cdot T} \cdot (1 - 1) = 0$$

أما خلال نصف الدورفتعطى القيمة المتوسطة للتياربالعلاقة:

$$I_{av} = \frac{2 \cdot Q}{T} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i \cdot dt$$

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t \cdot dt = -\frac{2 \cdot I_m}{\omega \cdot T} \cdot \left(\mathrm{Cos}\omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)$$

$$I_{av} = -\frac{2 \cdot I_m}{2\pi} \cdot \left(\mathrm{Cos}\frac{\omega \cdot T}{2} - \mathrm{Cos}0\right) = -\frac{I_m}{\pi} \cdot (\mathrm{Cos}\pi - \mathrm{Cos}0)$$

$$I_{av} = -\frac{I_m}{\pi} \cdot (-1 - 1) = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \approx 0.637 \cdot I_m$$

3- عامل الشكل Form Factor:

يُعرّف عامل الشكل بأنه النسبة بين القيمة الفعّالة والقيمة المتوسطة للشكل الموجي، ويرمزله بالرمز FF، فإذا كان التابع جيبياً فإن:

$$FF = \frac{Y}{Y_{av}} = \frac{Y_m/\sqrt{2}}{2 \cdot Y_m/\pi} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1.11$$

وهو مقياس لشكل موجة الخرج (أي مدى قربها من الجهد المستمر).

4- عامل المطال Amplitude Factor:

يُعرّف عامل المطال بأنه النسبة بين مطال التابع الدوري وبين قيمته الفعّالة، ويرمزله بالرمز AF، فإذا كان التابع جيبياً فإن:

$$AF = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$