جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 13

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

Complex Number العدد العقدي

$$i^2 = -1$$

$$z = a + ib$$

Re(z) real part القسم الحقيقي ← a ; b → Imaginary part القسم التخيلي Im(z)

Equality المساواة

$$z_1 = x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 = z_2 \quad \Leftrightarrow x_1 = x_2 \, , y_1 = y_2$$

Complex Conjugate مر افق عدد عقدي

$$\bar{z} = a - ib$$

addition الجمع

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

Multiplication الجداء

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) = (x_1.x_2 - y_1.y_2) + i\,(x_1.y_2 + y_1.x_2)$$

Division القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}$$

Modulus الطويلة

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال: إذا كان $z_1 = 2-3i \;,\; z_2 = 4+6i$ ، أوجد $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1.z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \frac{z_1}{z_2}, |z_1|, |z_2|$

الحل

$$z_1+z_2 = (2+4)+(-3+6)i = 6+3i$$

$$z_1-z_2 = (2-4)+(-3-6)i = -2-9i$$

$$z_1.z_2 = (2-3i).(4+6i) = 26$$

$$\overline{z_1} = 2+3i \;,\; \overline{z_2} = 4-6i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{(2-3i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{-10-24i}{16+36} = \frac{-5}{26} - \frac{6}{13}i$$

$$|z_1| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|z_2| = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

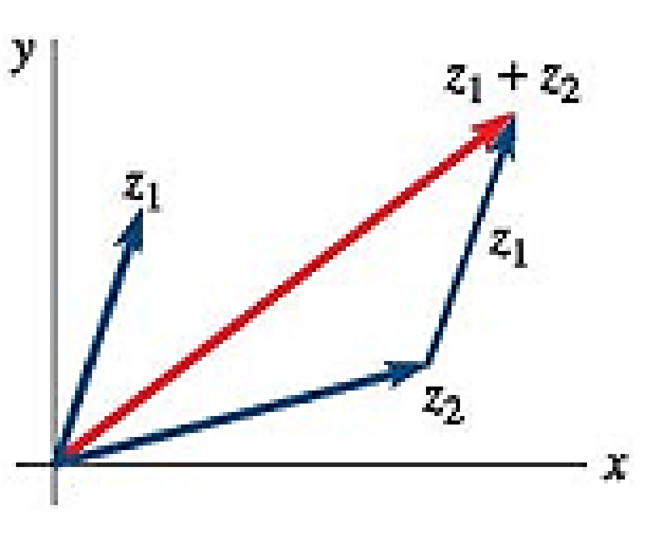
Modulus Properities خواص الطويلة

$$|-z| = |z|$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \; ; z_2 \neq 0$$



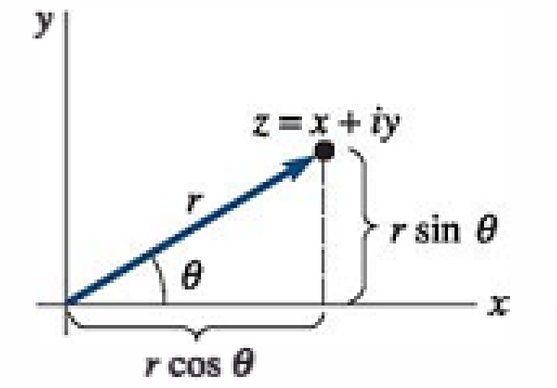
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Triangle Inquality متراجحة المثلث

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

Polar Form الشكل القطبي

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r = |z|$$



argument سعة العدد العقدي

$$\theta = \arg z = \mathrm{Arg} z + 2\pi k\ ;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

principle argument السعة الأساسية

Finding the principle argument إيجاد السعة الأساسية

$$\cos\alpha = \frac{|x|}{r},\ \sin\alpha = \frac{|y|}{r}\ \begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow Arg(z) = \alpha \\ x < 0, y \ge 0 \Rightarrow Arg(z) = \pi - \alpha \\ x < 0, y \le 0 \Rightarrow Arg(z) = \pi + \alpha \\ x \ge 0, y < 0 \Rightarrow Arg(z) = 2\pi - \alpha \end{cases}$$

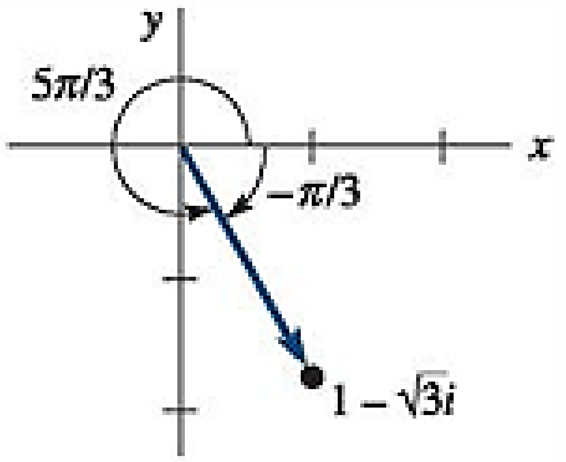
مثال: اكتب العدد العقدي الآتي بالشكل المثلثي $z = 1 - \sqrt{3}i$

الحل

$$x = 1 , y = -\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{|x|}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$x = 1 > 0 , y = -\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

Argument Properties خواص السعة

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg(z_1 . z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

Multiplication, Division and Powers الضرب والقسمة والقوى

$$z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

$$z^n = r^n \left(\cos n\theta + i \sin n\theta\right)$$

مثال: إذا كان $z = 1-\sqrt{3}i$ أوجد z^3

الحل

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = 2^3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^3 = 8\left(\cos\frac{15\pi}{3} + i\sin\frac{15\pi}{3}\right)$$

$$= 8(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$$

Finding nth root for a complex number إيجاد الجذر النوني لعدد عقدي

لإيجاد الجذر النوني للعدد العقدي $z = a + ib$ ، أي $\sqrt[n]{z} = ?$ نتبع الخطوات الآتية

1. نضع $w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w^n = z$
2. حيث $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)\,,\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
3. نساوي العددين العقديين $\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
4. $\rho = \sqrt[n]{r} \quad \phi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}\ ;\ k = 0,1,2,\dots,n-1$ حيث θ معلومة السعة الأساسية العدد العقدي z
5. $w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] \quad ; k = 0,1,2,\dots,n-1$

مثال: أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي $z = i$

الحل

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

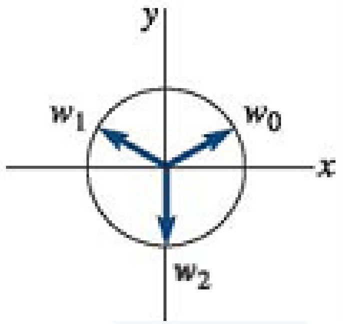
$$z = i \Rightarrow r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \quad \cos\alpha = \frac{|x|}{r} = \frac{0}{1} = 0 \;,\; \sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{1}{1} = 1 \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow n = 3 \Rightarrow w_k = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right)\right] \quad ; k = 0,1,2$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \left(\sqrt{3}/2\right) + (1/2)i$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = \left(-\sqrt{3}/2\right) + (1/2)i$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) = -i$$



مثال: أوجد الجذور الأربعة للعدد العقدي $z = 1 + i$

الحل

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

$$\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \cos\alpha = \frac{|x|}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow w_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4 + 2\pi k}{4}\right)\right]; \; k = 0,1,2,3$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2^{1/8}\left(\cos(\pi/16) + i\sin(\pi/16)\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2^{1/8}\left(\cos(9\pi/16) + i\sin(9\pi/16)\right)$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2^{1/8}\left(\cos(17\pi/16) + i\sin(17\pi/16)\right)$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2^{1/8}\left(\cos(25\pi/16) + i\sin(25\pi/16)\right)$$

تمارين

1 اكتب الأعداد العقدية الآتية بالشكل $a + ib$.

$2i^3 - 3i^2 + 5i$ $\quad$ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i)(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i)$ $\quad$ $\dfrac{2-4i}{3+5i}$ $\quad$ $\dfrac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)}$

الحل

$$2i^3 - 3i^2 + 5i = 2i^2 i - 3i^2 + 5i = 2(-1)i - 3(-1) + 5i = 3 + 3i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i\right) = \frac{2}{6} + \frac{5}{6}i - \frac{1}{6}i - \frac{5}{12}i^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{2-4i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{-14-22i}{34} = -\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$$

$$\frac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)} \qquad \frac{2-11i}{6-i} \cdot \frac{6+i}{6+i} = \frac{23-64i}{37} = \frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$$

تمارين

3 استخدم تعريف تساوي عددين عقديين لحل المعادلات الآتية

- $2z = i(2+9i)$
- $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$
- $z + 2\bar{z} = \dfrac{2-i}{1+3i}$

الحل

- $2z = i(2+9i)$

$2x + 2yi = -9 + 2i \longrightarrow 2x = -9 \quad 2y = 2 \longrightarrow z = -\frac{9}{2} + i$

- $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

$-x + 3yi = -7 + 6i \longrightarrow -x = -7 \quad 3y = 6 \longrightarrow z = 7 + 2i$

- $z + 2\bar{z} = \dfrac{2-i}{1+3i}$

$x + iy + 2(x - iy) = \dfrac{2-i}{1+3i}\,\dfrac{1-3i}{1-3i} = \dfrac{-1-7i}{10} \longrightarrow 3x = \dfrac{-1}{10}, \; -y = \dfrac{-7}{10}$

$\longrightarrow \quad z = \dfrac{-1}{30} + \dfrac{7}{10}i$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

4 احسب الجذور الآتية

- $(8)^{1/3}$
- $(-1+i)^{1/3}$
- $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

الحل

- $(8)^{1/3}$

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

$$z=8 \Rightarrow r=\sqrt{8^2+0^2}=8 \quad \cos\alpha=\frac{|x|}{r}=\frac{8}{8}=1 \ , \ \sin\alpha=\frac{|y|}{r}=\frac{0}{8}=0 \longrightarrow \alpha=0$$

$$\longrightarrow n=3 \Rightarrow w_k=\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{0+2\pi k}{3}\right)\right] \quad ; k=0,1,2$$

$$k=0 \Rightarrow w_0=2\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)$$

$$k=1 \Rightarrow w_1=2\left(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)\right)$$

$$k=2 \Rightarrow w_2=2\left(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)\right)$$

تمارين

- $(-1+i)^{1/3}$

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

$$\Rightarrow r=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2} \qquad \cos\alpha=\frac{|x|}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\alpha=\frac{|y|}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \alpha=\pi/4$$

$$x=-1<0\ ,\ y=1>0 \quad \Rightarrow \quad \theta=Arg(z)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\longrightarrow \quad n=3 \quad \Rightarrow w_k=\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right)\right] \qquad ; k=0,1,2$$

$$k=0 \Rightarrow w_0=2^{1/6}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)$$

$$k=1 \Rightarrow w_1=2^{1/6}\left(\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)\right)$$

$$k=2 \Rightarrow w_2=2^{1/6}\left(\cos(19\pi/12)+i\sin(19\pi/12)\right)$$

تمارين

- $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

$$\Rightarrow r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2 \qquad \cos\alpha=\frac{|x|}{r}=\frac{1}{2}\ ,\ \sin\alpha=\frac{|y|}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \alpha=\pi/3$$

$$x=-1<0\ ,\ y=\sqrt{3}>0 \Rightarrow \theta=Arg(z)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\longrightarrow n=2 \Rightarrow w_k=\sqrt[2]{r}\left[\cos\left(\frac{2\pi/3+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi/3+2\pi k}{2}\right)\right] \quad ; k=0,1$$

$$k=0 \Rightarrow w_0=\sqrt{2}(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$$

$$k=1 \Rightarrow w_1=\sqrt{2}(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$$

تمارين

4 أوجد جميع حلول المعادلة الآتية $z^4 + 1 = 0$

الحل يؤول حل هذه المعادلة إلى إيجاد الجذور الأربعة للعدد -1

نوجد أولاً طويلة وسعة العدد العقدي المعطى

$$\Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \qquad \cos\alpha = \frac{|x|}{r} = \frac{1}{1} \;,\; \sin\alpha = \frac{|y|}{r} = \frac{0}{1} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 0$$

$$x = -1 < 0 \;,\; y = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = Arg(-1) = \pi - 0 = \pi$$

$$\longrightarrow \quad n = 4 \quad \Rightarrow w_k = \sqrt[4]{r}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right] \;;\; k = 0,1,2,3$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = (\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = 1/\sqrt{2} + i(1/\sqrt{2})$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = (\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -1/\sqrt{2} + i(1/\sqrt{2})$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = (\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -1/\sqrt{2} - i(1/\sqrt{2})$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = (\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = 1/\sqrt{2} - i(1/\sqrt{2})$$