تحليل رياضي 2

المحاضرة 14

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

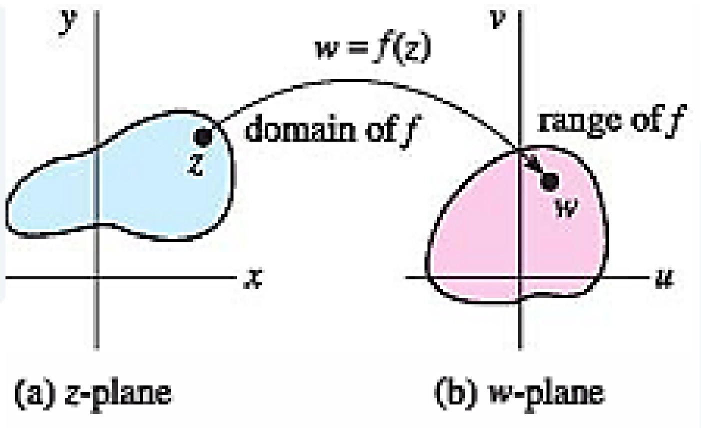
Function of a Complex Variable تابع لمتحول عقدي

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

tow real functions تابعان حقيقيان

$u(x,y)$ real part القسم الحقيقي

$v(x,y)$ imaginary part القسم التخيلي



مثال: اكتب التابع $f(z) = z^2 - 4z$ بالشكل: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

الحل

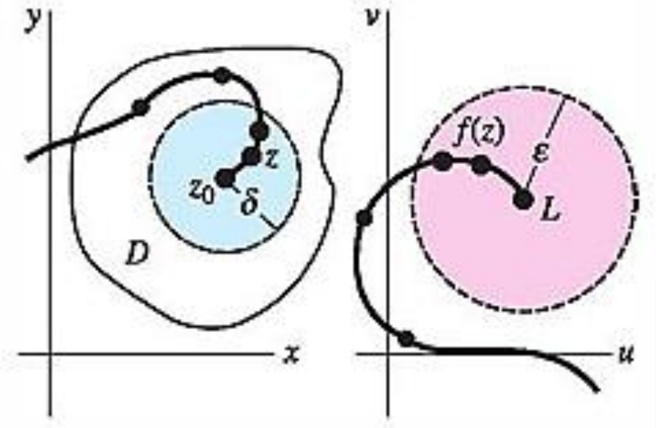
$$f(z) = z^2 - 4z = (x+iy)^2 - 4(x+iy) = (x^2 - y^2 - 4x) + i(2xy - 4y)$$

$u(x,y)$ $v(x,y)$

Limits and Continuity النهايات والاستمرار

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 ; \left| z - z_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(z) - L \right| < \varepsilon$$



(a) δ-neighborhood (b) ε-neighborhood

Limits Properties خواص النهايات

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1 \ , \ \lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$$

$$a) \ \lim_{z \to z_0} \left[f(z) + g(z) \right] = L_1 + L_2$$

$$b) \ \lim_{z \to z_0} \left[f(z).g(z) \right] = L_1.L_2$$

$$c) \ \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{L_1}{L_2} \ ; L_2 \neq 0$$

Continuity الاستمرار

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

معيار عدم وجود النهاية

إذا كان $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L_1$ و $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L_2$ ، مع $L_1\neq L_2$ ، فإن النهاية غير موجودة.

مثال: أثبت أن النهاية الآتية غير موجودة $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\bar z}$

الحل

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+iy}{x-iy}=\lim_{y\to 0}\frac{iy}{-iy}=-1=L_1$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar z}=\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\frac{x+iy}{x-iy}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1=L_2$$

نلاحظ أن $L_1\neq L_2$ ، وبالتالي فإن النهاية المطلوب حسابها غير موجودة.

Derivative الاشتقاق

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Derivative Rules قواعد الاشتقاق

$$\frac{d}{dz}(c)=0 \quad , \quad \frac{d}{dz}\left(cf(z)\right)=c.f'(z)$$

Sum Rule قاعدة الجمع

$$\frac{d}{dz}\left[f(z)+g(z)\right]=f'(z)+g'(z)$$

Product Rule قاعدة الضرب

$$\frac{d}{dz}\left[f(z).g(z)\right]=f'(z)g(z)+f(z).g'(z)$$

Quotient Rule قاعدة القسمة

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)g(z)-f(z).g'(z)}{g^2(z)}$$

Chain Rule قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dz}f\left(g(z)\right)=f'\left(g(z)\right)g'(z)$$

مثال: أوجد مشتق التابعين الآتيين

$$a)\ f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z \qquad b)\ f(z) = \frac{z^2}{4z+1}$$

الحل

$$a)\ f'(z) = 12z^3 - 15z^2 + 2$$

$$b)\ f'(z) = \frac{2z(4z+1) - 4z^2}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2 + 2z}{(4z+1)^2}$$

مبرهنة (أوبيتال): ليكن f و g تابعين عقديين تحليليين في نقطة ما z_0، وبفرض أن $f(z_0)=0$ و $g(z_0)=0$، لكن $g'(z_0)\neq 0$، عندئذ فإن:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

مثال: احسب النهاية $\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}$

الحل

بوضع $f(z)=z^2-4z+5$، و $g(z)=z^3-z-10i$، حيث نجد أن كل منهما تابع تحليلي في كامل المستوي العقدي، أي تحليليان في $z_0=2+i$، ويحققان أن $f(2+i)=0$ و $g(2+i)=0$ و $f'(2+i)=2i$، $g'(2+i)=8+12i$،

حسب أوبيتال نحصل على

$$\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{f'(2+i)}{g'(2+i)}=\frac{2i}{8+12i}=\frac{3}{26}+\frac{i}{13}$$

التوابع التحليلية Analytic Functions

f تحليلي في النقطة z_0 إذا كان التابع f قابل للاشتقاق في z_0 وفي كل نقطة مجاورة لها

معادلات كوشي ريمان Cauchy–Riemann Equations

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

إذا كان $f(z)$ تحليلي على كامل D ، فإن u و v يحققان معادلتي كوشي ريمان على كامل D .

Criterion for Analyticity معيارالتحليلية

1. $u(x,y), v(x,y)$ مستمرة على D

2. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ موجودة مستمرة على D

3. $u(x,y), v(x,y)$ يحققان معادلتي كوشي ريمان على كل D

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

تحليلي على D

مثال: أين يكون التابع الآتي تحليلي

$$f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

الحل

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x^2+y^2\neq 0\quad\Leftrightarrow z\neq 0$$

$f(z)$ تحليلي في كامل المستوي العقدي باستثناء $z=0$.

مثال: هل التابع الآتي تحليلي $f(z) = (2x^2 + y) + i(y^2 - x)$

الحل

$$u(x, y) = 2x^2 + y \qquad v(x, y) = y^2 - x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

نلاحظ أن $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ محقق، لكن الشرط $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ محقق فقط على المستقيم $y = 2x$، أي التابع المعطى قابل للاشتقاق فقط على المستقيم المذكور، لكنه غير قابل للاشتقاق خارج هذا المستقيم، بالتالي لا يوجد أي جوار للنقطة z بحيث يكون التابع المعطى قابل للاشتقاق فيه.

لذلك التابع المعطى غير تحليلي في أي نقطة.

النقاط الشاذة

تعريف: تسمى النقاط التي يكون عندها التابع العقدي غير تحليلي بالنقاط الشاذة.

تعريف: تسمى النقطة الشاذة z_0 للتابع العقدي $f(z)$، نقطة شاذة معزولة، إذا كان التابع $f(z)$ تحليلي في الجوار الحلقي للنقطة z_0، أي إذا وجد $\delta > 0$ بحيث أن الدائرة $|z - z_0| = \delta$ لا تحوي أي نقطة شاذة أخرى، وإذا لم نتمكن من إيجاد δ، فإنها تسمى نقطة شاذة غير معزولة.

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$.

نلاحظ أن $z = \pm 2i$، نقطتان شاذتان معزولتان، لأن التابع المعطى تحليلي في الجوار $|z - 2i| < 1$ و $|z + 2i| < 1$، باستثناء $z = 2i$ و $z = -2i$، أي أن الدائرة $|z - 2i| = 1$ لا تحوي إلا النقطة $z = 2i$ كنقطة شاذة، وكذلك الدائرة $|z + 2i| = 1$ لا تحوي إلا النقطة $z = -2i$ كنقطة شاذة.

تعريف: تسمى النقطة الشاذة المعزولة z_0 للتابع العقدي $f(z)$، نقطة شاذة قابلة للحذف، إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ موجودة.

مثال: حدد نوع النقطة الشاذة $z = 2i$ للتابع $f(z) = \dfrac{z-2i}{z^2+4}$.

الحل

$$\lim_{z \to 2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{z-2i}{z^2+4} = \frac{1}{4i}$$

فإن النهاية موجودة وبالتالي فإن النقطة $z = 2i$ نقطة شاذة قابلة للحذف.

تعريف: تسمى النقطة الشاذة المعزولة z_0 للتابع العقدي $f(z)$، قطب من المرتبة n، إذا وجد عدد طبيعي n، بحيث يتحقق أن:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

وإذا كانت $n = 1$، عندها تسمى z_0 قطباً بسيطاً للتابع $f(z)$.

مثال: حدد نوع النقطة الشاذة $z=0$ للتابع $f(z)=\dfrac{2\cos z+z^2-2}{z^6}$.

الحل

$$\lim_{z\to 0} z^n f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{2\cos z+z^2-2}{z^{6-n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{-2\sin z+2z}{(6-n)z^{5-n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{-2\cos z+2}{(6-n)(5-n)z^{4-n}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{2\sin z}{(6-n)(5-n)(4-n)z^{3-n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{2\cos z}{(6-n)(5-n)(4-n)(3-n)z^{2-n}}$$

فحتى تكون قيمة النهاية السابقة مختلفة عن الصفر، يجب أن يكون $2-n=0$، أي يجب أن تكون $n=2$، وفي هذه الحالة نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z)=\frac{2}{(4)(3)(2)}(1)=\frac{1}{12}\neq 0$$

وهذا يعني أن $z=0$ قطب من المرتبة الثانية للتابع المعطى $f(z)$.

تعريف: تسمى النقطة الشاذة المعزولة z_0 للتابع العقدي $f(z)$، نقطة شاذة أساسية، إذا لم تكن نقطة قابلة للحذف أو قطب.

مثال: إن النقطة $z=0$ نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)=e^{3/z}$.

تمارين

1 احسب النهايتين الآتيتين

- $\lim_{z \to i} \frac{z^4 - 1}{z - i}$
- $\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2i}$

الحل

$$\lim_{z \to i} \frac{z^4 - 1}{z - i} = \lim_{z \to i} \frac{(z^2 - 1)(z - i)(z + i)}{z - i} = -4i$$

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2i} = \lim_{z \to 1+i} \frac{[z - (1+i)][z - (1-i)]}{[z - (1+i)][z - (-1-i)]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

2 بين أن النهاية الآتية غير موجودة $\lim_{z \to 1} \frac{x + y - 1}{z - 1}$

الحل

نسعى بالنهاية أولاً عبر المستقيم $x = 1$:

$$\lim_{z \to 1} \frac{x + y - 1}{z - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{iy} = \frac{1}{i} = -i$$

نسعى بالنهاية أولاً عبر المحور x- :

$$\lim_{z \to 1} \frac{x + y - 1}{z - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

نلاحظ أن النهايتين مختلفتين، لذلك النهاية غير موجودة.

تمارين

3 أوجد مشتق التابعين الآتيين

- $f(z) = \dfrac{5z^2 - z}{z^3 + 1}$
- $f(z) = (2z - 1/z)^6$

الحل

- $f'(z) = \dfrac{(z^3+1)(10z-1) - (5z^2-z)3z^2}{(z^3+1)^2} = \dfrac{-5z^4 + 2z^3 + 10z - 1}{(z^3+1)^2}$
- $f'(z) = 6(2z - 1/z)^5(2 + 1/z^2)$

4 بين أن التابع الآتي يحقق شرطي كوشي ريمان من أجل كل نقطة. $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

الحل

لدينا $u = 3x^2 - 3y^2 + 5x, \quad v = 6xy + 5y - 6$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 5 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تمارين

5 بين أن التابع الآتي لا يحقق شرطي كوشي ريمان من أجل كل نقطة. $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

الحل

لدينا $u = -2x + 3, \quad v = 10y$ $\longleftarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 10$

بما أن $-2 \neq 10$ فإن التابع المعطى غير تحليلي في أي نقطة.

6 أوجد العددين الحقيقيين a, b حتى يكون التابع الآتي تحليلياً. $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$

الحل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 = b = \frac{\partial v}{\partial y}\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 = -a = -\frac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow b = 3,\ a = 1$$

تمارين

7 أوجد النقاط الشاذة وبين نوعها للتوابع

$$1)\ f(z)=\frac{z+3i}{z^2+9} \qquad 2)\ f(z)=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2} \qquad 3)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}} \qquad 4)\ f(z)=\frac{2\sin z - z^2}{z^4}$$

الحل

$$1)\ f(z)=\frac{z+3i}{z^2+9}$$

النقاط الشاذة $z=-3i\,,3i$

$$f(z)=\frac{z+3i}{z^2+9}=\frac{z+3i}{(z+3i)(z-3i)}$$

$$\lim_{z\to -3i} f(z)=\lim_{z\to -3i}\frac{z+3i}{(z+3i)(z-3i)}=\lim_{z\to -3i}\frac{1}{(z-3i)}=\frac{-1}{6i}$$

بما أن النهاية موجودة، بالتالي النقطة $z=-3i$ نقطة شاذة قابلة للحذف.

$$\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{z+3i}{(z+3i)(z-3i)}=1\neq 0$$

بما أن النهاية موجودة، بالتالي النقطة $z=3i$ قطب بسيط.

تمارين

$$2)\ f(z)=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}$$

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

النقاط الشاذة $z=-2i\,,2i$

$$\lim_{z\to-2i}(z+2i)^2 f(z)=\lim_{z\to-2i}(z+2i)^2\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=\lim_{z\to-2i}(z+2i)^2\frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}=\lim_{z\to-2i}\frac{1}{(z-2i)^2}=\frac{-1}{4i}\neq 0$$

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)^2\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=\lim_{z\to 2i}(z-2i)^2\frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)^2}=\frac{1}{4i}\neq 0$$

النقطتان $z=-2i\,,2i$ قطبان من المرتبة الثانية.

$$3)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$$

النقطة $z=1$ نقطة شاذة أساسية لأنها ليست قابلة للحذف وليست قطب.

$$4)\ f(z)=\frac{2\sin z-z^{2}}{z^{4}}$$

$$\lim_{z\to 0} z^{n} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin z-z^{2}}{z^{4-n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{2\cos z-2z}{(4-n)z^{3-n}}$$

فحتى تكون قيمة النهاية السابقة مختلفة عن الصفر، يجب أن يكون $3-n=0$، أي يجب أن تكون $n=3$، وفي هذه الحالة نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} z^{3} f(z)=\frac{2}{1}=2\neq 0$$

وهذا يعني أن $z=0$ قطب من المرتبة الثالثة للتابع المعطى $f(z)$.