تحليل رياضي 2

المحاضرة 16

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

الفصل السادس: التحليل العقدي

Complex Analysis

١. المتتاليات العقدية The Complex Sequences

٢. السلاسل العقدية The Complex Series

The Sequences المتتاليات

تعريف: تشكل مجموعة الأعداد العقدية $\{z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$ ، بحيث يتقابل كل عدد طبيعي n بعدد عقدي z_n ، متتالية عددية عقدية، ويرمز لها بـ $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. يسمى العدد z_1 حدها الأول، بينما يسمى z_n حدها العام.

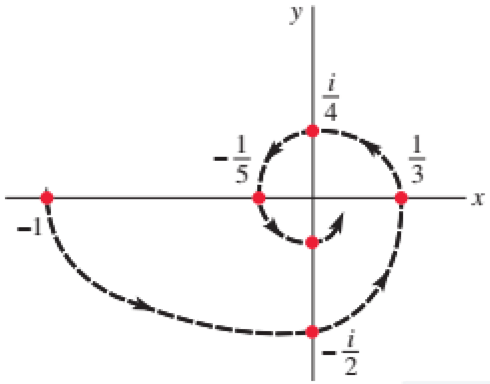
$$\begin{array}{ccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i,\ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5,\ldots \end{array}$$

مثال: مثّل بيانياً حدود المتتالية $\left\{\frac{i^{n+1}}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، وماذا تستنتج:

الحل

إن حدود هذه المتتالية هي:

$$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{i}{6}, \frac{1}{7}\ldots$$



نستنتج أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{i^{n+1}}{n}=0$$

مبرهنة: إذا كانت المتتالية العددية العقدية $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، وكان $a = \alpha + i\beta$، فإن الشرط اللازم والكافي حتى تتقارب المتتالية $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إلى العدد العقدي a، هو أن تتقارب المتتالية العددية الحقيقية $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إلى العدد الحقيقي α، المتتالية الحقيقية $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ إلى العدد الحقيقي β.

نتيجة: تكون متتالية الأعداد العقدية متباعدة، إذا كانت نهايتها غير موجودة، أي بمعنى أنه إذا كان لها أكثر من نهاية أو كانت تسعى على اللانهاية.

مثال: احسب نهاية المتتالية الآتية $\left\{\dfrac{ni}{n+2i}\right\}$

الحل

$$z_n = \frac{ni}{n+2i} = \frac{2n}{n^2+4} + i\,\frac{n^2}{n^2+4},$$

$$\mathrm{Re}(z_n) = 2n/(n^2+4) \to 0 \qquad \mathrm{Im}(z_n) = n^2/(n^2+4) \to 1 \text{ as } n \to \infty. \qquad \Rightarrow z_n = \frac{ni}{n+2i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + i$$

The Series السلاسل

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_k + \cdots$$

convergent متقاربة ⟺ sequence of partial sums is convergent متتالية المجاميع الجزئية متقاربة

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ ; \ S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_n \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k = S$$

Geometric Series السلسلة الهندسية

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = a + az + \cdots + az^k + \cdots = \frac{a}{1-z} \ ; \ |z| < 1$$

مثال: هل السلسلة الآتية متقاربة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2i)^k}{5^k}=\frac{1+2i}{5}+\frac{(1+2i)^2}{5^2}+\frac{(1+2i)^3}{5^3}+\cdots$

الحل

السلسلة المعطاة سلسلة هندسية $\frac{1+2i}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^k}{5^k}$

$$a=\frac{1+2i}{5}\,,\; z=\frac{1+2i}{5} \qquad \left|\frac{1+2i}{5}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2i)^k}{5^k}$$

متقاربة Convergent

مجموعها

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2i)^k}{5^k}=\frac{(1+2i)/5}{1-(1+2i)/5}=\frac{i}{2}$$

الشرط اللازم للتقارب Necessary Criterion Convergence

$$\sum_{k=0}^{\infty}z_k \text{ متقاربة convergent } \Rightarrow \lim_{k\to\infty}z_k=0$$

Absolute Convergence التقارب المطلق

$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ convergent متقاربة $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ متقاربة مطلقاً Absolutely convergent

Tests of Absolute Convergence اختبارات التقارب المطلق

Ratio Test اختبار النسبة

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = L$$

root Test اختبار الجذر

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|z_k|} = L$$

1. $L<1$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ متقاربة مطلقاً Absolutely convergent
2. $L>1$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ متباعدة مطلقاً Absolutely divergent
3. $L=1$ $\Rightarrow$ لا نتيجة inconclusive

مثال: ادرس التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{n!}{(1+i)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(1+i)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{\sqrt{2}} = \infty$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$ متباعدة مطلقاً absolutely divergent

مثال: ادرس التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n}$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{(1+i)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|n^2|}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n}$ متقاربة مطلقاً absolutely convergent

Power Series سلاسل القوى

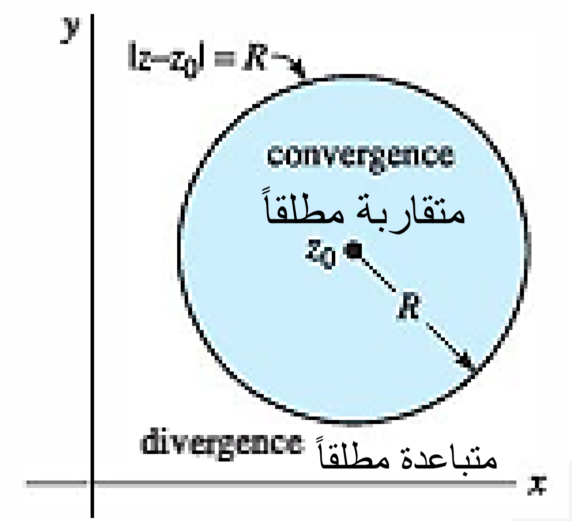
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Center of Series مركز السلسلة z_0

Circle of Convergence دائرة التقارب

يحسب نصف قطر دائرة التقارب
بإحدى العلاقتين

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$



$R = 0$ السلسلة متقاربة مطلقاً فقط في النقطة z_0

$R = \infty$ السلسلة متقاربة مطلقاً في كامل المستوي العقدي

مثال: احسب نصف قطر دائرة التقارب للسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(z-1-i)^k}{k!}$

الحل

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \Rightarrow R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}/k!}{(-1)^{k+2}/(k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{1} = \infty$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(z-1-i)^k}{k!}$ متقاربة مطلقاً في كامل المستوي العقدي

مثال: احسب نصف قطر دائرة التقارب للسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k (z-2i)^k$

الحل

$$a_k = \left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k \Rightarrow R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left|\left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k\right|}} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+5}{6k+1} = \frac{1}{3}$$

دائرة التقارب Circle of Convergence $|z-2i| = 1/3$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k (z-2i)^k$ متقاربة مطلقاً Absolutely convergent $|z-2i| < 1/3$

تمارين

1 حدد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل العقدية الهندسية الآتية متقاربة أم متباعدة، وأوجد مجموعها إذا كانت متقاربة.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4i\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{k}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2i}\right)^{k}$

الحل

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4i\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $\quad a = 4i \quad z = 1/3. \longrightarrow |z| = 1/3 < 1$

السلسلة متقاربة ومجموعها $\dfrac{4i}{1-1/3} = 6i.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{k}$ $\quad a = i/2 \quad z = i/2 \longrightarrow |z| = 1/2 < 1$

السلسلة متقاربة ومجموعها $\dfrac{i/2}{1-i/2} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i.$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{2}{1+2i}\right)^{k}$ $\quad a = 3 \quad z = 2/(1+2i) \longrightarrow |z| = 2/\sqrt{5} < 1$

السلسلة متقاربة ومجموعها $\dfrac{3}{1-\dfrac{2}{1+2i}} = \dfrac{9}{5} - \dfrac{12}{5}i$

تمارين

2 أوجد دائرة ونصف قطر التقارب لكل من السلاسل الآتية:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k2^k}(z-1-i)^k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{i}{1+i}\right)^k z^k$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$

الحل

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{k+1}}(z-2i)^k$$

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1/(1-2i)^{k+1}}{1/(1-2i)^{k+2}}\right|=|1-2i|=\sqrt{5}$$

نصف قطر التقارب $R=\sqrt{5}$ دائرة التقارب $|z-2i|=\sqrt{5}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{i}{1+i}\right)^k z^k$$

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{i}{1+i}\right)^k}{\frac{1}{k+1}\left(\frac{i}{1+i}\right)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\left|\frac{i+1}{i}\right|=\left|\frac{i+1}{i}\right|=\sqrt{2}$$ نصف قطر التقارب

دائرة التقارب $|z|=\sqrt{2}$

تمارين

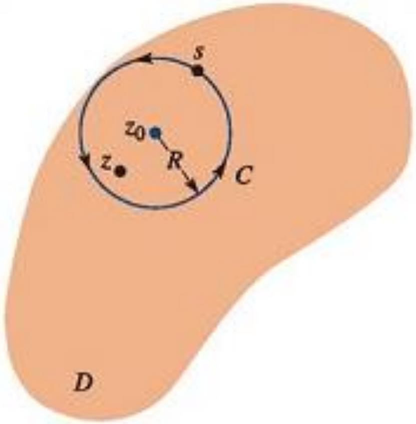
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k2^k}(z-1-i)^k$$

نصف قطر التقارب

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k/k\,2^k}{(-1)^{k+1}/(k+1)2^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}|2|=2$$

دائرة التقارب $|z-1-i|=2$

Taylor’s Series سلسلة تايلور



$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

Maclaurin Series سلسلة ماكلورين

بعض السلاسل الشهيرة

$$\frac{a}{1-z}=a+az+az^2+\cdots \; ; \; |z|<1$$

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$(1+z)^k=1+kz+\frac{k(k-1)}{2!}z^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}z^3+\cdots \quad |z|<1 \quad k\in\mathbb{Q}$$

مثال: أوجد سلسلة ماكلورين للتابع الآتي: $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$

الحل

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots\ ;\ |z|<1$$

بالاشتقاق حداً حداً

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+4z^3+\cdots\ ;\ |z|<1$$

مثال: أوجد سلسلة تايلور للتابع الآتي: $f(z)=\dfrac{1}{1-z}\ ;\ z_0=2i$

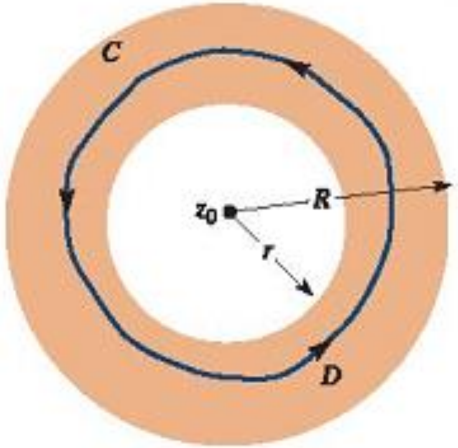
الحل

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}\ ,\ f''(z)=\frac{2.1}{(1-z)^3}\ ,\ f'''(z)=\frac{3.2.1}{(1-z)^4}=\frac{3!}{(1-z)^4}\qquad \Rightarrow f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(2i)=\frac{n!}{(1-2i)^{n+1}}\qquad \boxed{\Rightarrow \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}(z-2i)^n}$$

سلسلة لورنت Laurent’s Series

قد يصادفنا في بعض الأحيان نشر تابع في جوار نقطة غير تحليلية، أي النشر في حلقة $D: r_1 < |z - z_0| < r_2$ ، حيث نستخدم في هذه الحالة سلسلة لورنت.



مبرهنة: إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً ووحيد القيمة في الحلقة $D: r_1 < |z - z_0| < r_2$ ، فإن التابع $f(z)$ يُمثَّل بسلسلة قوى وحيدة في هذه المنطقة ولها الشكل التالي:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حيث تحسب الأمثال a_n بالعلاقة الآتية:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وأن C أي منحني بسيط مغلق واقع في المنطقة D له الاتجاه الموجب ويحوي النقطة z_0 بداخله.

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{Principal Part الجزء الرئيسي}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n}}_{\text{Analytic Part الجزء التحليلي}}$$

تحدد الأمثال a_n بالاعتماد على سلاسل تايلور أو ماكلورين

مثال: أوجد سلسلة لورنت للتابع الآتي في كل من المناطق المعطاة:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$$

$$a)\ 0<|z|<1\ ,\ b)\ 1<|z|\ ,\ c)\ 0<|z-1|<1\ ,\ d)\ 1<|z-1|$$

الحل

$a)\ 0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{-1}{z}.\frac{1}{(1-z)}=\frac{-1}{z}\left[1+z+z^{2}+z^{3}+\cdots\right]=-\frac{1}{z}-1-z-z^{2}-\cdots$$

$b)\ 1<|z|$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\begin{cases}\dfrac{-1}{z}.\dfrac{1}{(1-z)}=\dfrac{-1}{z}\left[1+z+z^{2}+z^{3}+\cdots\right]\ ;\ 0<|z|<1 & ✖\\[2ex] \dfrac{1}{z^{2}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{z^{2}}\left[1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^{2}}+\dfrac{1}{z^{3}}+\cdots\right]\ ;1<|z| & \checkmark\end{cases}$$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z^{2}}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z^{3}}+\cdots\right]=\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z^{3}}+\frac{1}{z^{4}}+\frac{1}{z^{5}}+\cdots$$

$c)\ 0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1+1)(z-1)}=\frac{1}{\left[1-(-(z-1))\right](z-1)}$$

$$=\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{1}{\left[1-(-(z-1))\right]}=\frac{1}{(z-1)}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(z-1)}-1+(z-1)-(z-1)^2+\cdots$$

$d)\ 1<|z-1|$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1+1)(z-1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-1)}\cdot\dfrac{1}{\left[1-(-(z-1))\right]} & ;\ 0<|z-1|<1 \quad ✖ \\[2ex] \dfrac{1}{(z-1)^2}\cdot\dfrac{1}{\left[1-(-1/(z-1))\right]} & ;\ 1<|z-1| \quad \checkmark \end{cases}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{\left[1-(-1/(z-1))\right]}=\frac{1}{(z-1)^2}\left[1-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}-\frac{1}{(z-1)^5}+\cdots$$

مثال: أوجد سلسلة لورنت للتابع الآتي :

$$f(z)=\frac{8z+1}{z(1-z)} \qquad ;\ 0<|z|<1$$

الحل

$$f(z)=\frac{8z+1}{z(1-z)}=\frac{8z+1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)}=\left(8+\frac{1}{z}\right).\left[1+z+z^2+z^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z}+9+9z+9z^2+9z^3+\cdots$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مثال: أوجد سلسلة لورنت للتابع الآتي :

$$f(z)=e^{3/z} \qquad ; 0<|z|$$

الحل

$$f(z)=e^{3/z}=1+\frac{3/z}{1!}+\frac{(3/z)^2}{2!}+\frac{(3/z)^3}{3!}+\cdots=1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{2!z^2}+\frac{3^3}{3!z^3}+\cdots$$

تمارين

1 انشر كل من التوابع الآتية في سلسلة لورنت في المنطقة المشار لها بجانبه

- $f(z)=\dfrac{\cos z}{z},\ 0<|z|$
- $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^5},\ 0<|z|$
- $f(z)=\dfrac{e^z}{z-1},\ 0<|z-1|$

الحل

$f(z)=\dfrac{\cos z}{z},\ 0<|z|$

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\cdots$$

$f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^5},\ 0<|z|$

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)\right]=\frac{1}{3!z^2}-\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}-\frac{z^4}{9!}+\cdots$$

$f(z)=\dfrac{e^z}{z-1},\ 0<|z-1|$

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{z-1}=\frac{e}{z-1}\left(1+\frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{e}{z-1}+\frac{e}{1!}+\frac{e(z-1)}{2!}+\frac{e(z-1)^2}{3!}+\cdots$$

تمارين

2 انشر التابع في كل منطقة من المناطق المعطاة $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)}$

- $0 < |z| < 3$
- $|z-3| > 3$
- $1 < |z-4| < 4$

الحل

$0 < |z| < 3$

$$f(z) = -\frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3z}\left[1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \cdots\right] = -\frac{1}{3z} - \frac{1}{3^2} - \frac{z}{3^3} - \frac{z^2}{3^4} - \cdots$$

$|z-3| > 3$

$$f(z) = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{z-3+3} = \frac{1}{(z-3)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-3}} = \frac{1}{(z-3)^2}\left[1 - \frac{3}{z-3} + \frac{3^2}{(z-3)^2} - \frac{3^3}{(z-3)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(z-3)^2} - \frac{3}{(z-3)^3} + \frac{3^2}{(z-3)^4} - \frac{3^3}{(z-3)^5} + \cdots$$

تمارين

$1<|z-4|<4$

نفرق الكسر ونكتب بالشكل الآتي

$$f(z)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-4+1}-\frac{1}{4+z-4}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-4}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-4}{4}}\right]$$

$1<|z-4|$

$|z-4|<4$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-4}\left(1-\frac{1}{z-4}+\frac{1}{(z-4)^2}-\frac{1}{(z-4)^3}+\cdots\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{z-4}{4}+\frac{(z-4)^2}{4^2}-\frac{(z-4)^3}{4^3}+\cdots\right)\right]$$

$$=\cdots-\frac{1}{3(z-4)^2}+\frac{1}{3(z-1)}-\frac{1}{12}+\frac{z-4}{3\cdot 4^2}-\frac{(z-4)^2}{3\cdot 4^3}+\cdots$$

Classification of Isolated Singular Points تصنيف النقاط الشاذة المعزولة

Laurent Series سلسلة لوران	Singular Point النقطة الشاذة $z = z_0$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$	Removable Point نقطة قابلة للحذف
$f(z) = \sum_{n=1}^{m} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$	Pole of order m قطب من المرتبة
$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$	Essential Singularity نقطة شاذة أساسية

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots$$

نقطة شاذة قابلة للحذف $z = 0$

Removable singular point

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots$$

Sample pole قطب بسيط $z = 0$

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$$

Pole of order 2 قطب من المرتبة الثانية $z = 0$

$$f(z) = e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots$$

نقطة شاذة أساسية $z = 0$

Essential singular point