جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 17

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

الرواسب Residues

تعريف: إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في الحلقة $D: 0<|z-z_0|<r$، يسمى المعامل a_{-1} (معامل الحد $(z-z_0)^{-1}$) في سلسلة لوران الممثلة لهذا التابع في هذه الحلقة، راسب التابع $f(z)$ عند النقطة z_0، ويرمز له بالرمز $\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$ أو بالرمز $\operatorname{Res}(f(z), z_0)$،

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

The residue at isolated singular point راسب التابع عند النقطة الشاذة المعزولة

مثال: أوجد راسب التابع الآتي عند النقطة $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z-3)}$$

الحل

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z-3)} = \frac{-1}{2(z-1)^2} + \frac{-1/4}{(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{6} - \cdots$$

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = a_{-1} = -1/4$$

مثال: أوجد راسب التابع الآتي عند النقطة $z = 0$

$$f(z) = e^{3/z}$$

الحل

$$f(z) = e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots$$

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = a_{-1} = 3$$

جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

حساب الراسب

Evaluating Residue at a Sample Pole حساب الراسب عند قطب بسيط

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

Evaluating Residue at a Pole of Order *n* حساب الراسب عند قطب من المرتبة

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z - z_0)^n \cdot f(z)\right]$$

مثال: أوجد راسب التابع الآتي عند أقطابه

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

الحل

$z=1$ قطب من المرتبة 2 Pole of order 2

$z=3$ قطب بسيط Sample pole

$z=1 \qquad n=2$

$$\operatorname{Res}(f(z),1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\cdot f(z)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right]$$

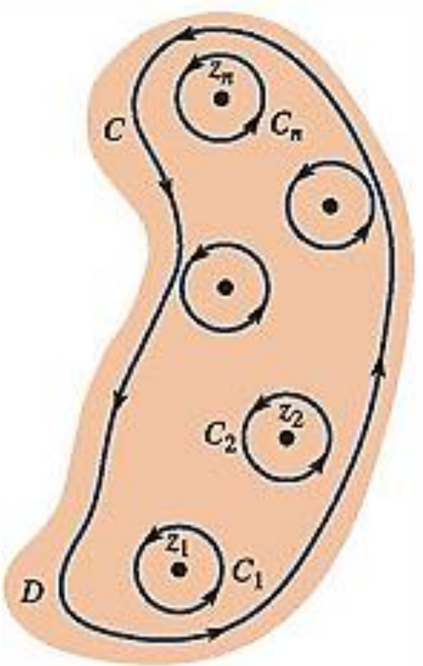
$$=\lim_{z\to 1}\left[\frac{-1}{(z-3)^2}\right]=\frac{-1}{4}$$

$z=3 \qquad n=1$ Sample pole قطب بسيط

$$\operatorname{Res}(f(z),3)=\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}$$

مبرهنة: (مبرهنة كوشي للرواسب)

بفرض أن D منطقة بسيطة الاتصال وأن C منحني بسيط مغلق يقع كلياً داخل المنطقة D، وإذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً على وداخل المنحني C باستثناء عند عدد منته من النقاط الشاذة المعزولة $z_1, z_2, \dots, z_n$، عندئذ فإن:



$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

مثال: احسب التكامل الآتي

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz$$

1. C هو المستطيل المعرف بـ $x=0, x=4, y=-1, y=1$ C is the rectangle defined by

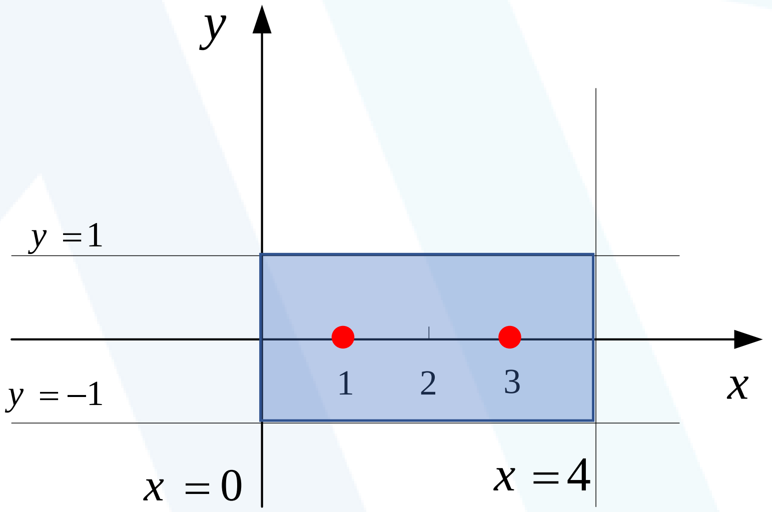
2. C هو الدائرة $|z|=2$ C is the circle

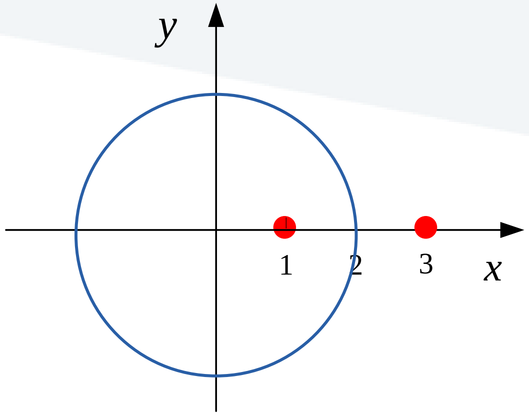
الحل

$z=1$ قطب من المرتبة 2 Pole of order 2 $z=3$ قطب بسيط Sample pole

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f(z),1)+\operatorname{Res}(f(z),3)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\right]=0$$



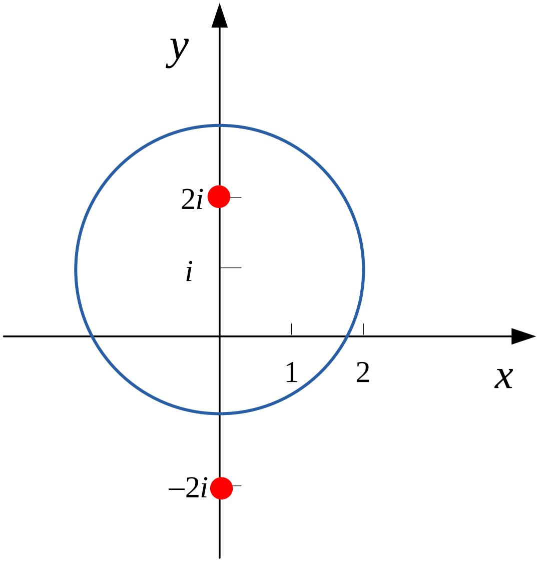


$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f(z),1\right)\right] = 2\pi i\left[\frac{-1}{4}\right] = \frac{-\pi i}{2}$$

مثال: احسب التكامل الآتي $\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz \quad ; C:|z-i|=2$

الحل

Tow sample poles قطبان بسيطان $z=\pm 2i$



$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f(z),2i\right)\right] = 2\pi i\left[\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{2z+6}{(z-2i)(z+2i)}\right]$$

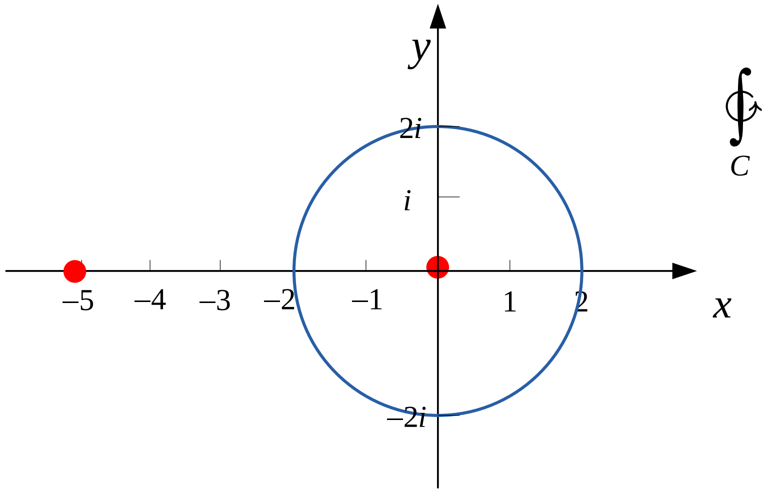
$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to 2i}\frac{2z+6}{(z+2i)}\right] = 2\pi i\left(\frac{3+2i}{2i}\right) = \pi(3+2i)$$

مثال: احسب التكامل الآتي $\oint_C \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz \quad ; C : |z| = 2$

الحل

$z = 0$ قطب من المرتبة 3 Pole of order 3

$z = -5$ قطب بسيط Sample pole



$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(f(z),0\right)\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[z^3\frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^z}{(z+5)}\right]\right] = \pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{\left(z^2+8z+17\right)e^z}{(z+5)^3}\right]$$

$$= \frac{17\pi}{125}i$$

تمارين

1 بين أن النقطة $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للحذف لكل من التابعين الآتيين

- $f(z) = \dfrac{\sin 4z - 4z}{z^2}$
- $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$

الحل

$$f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z}$$

نستخدم السلسلة $e^{2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^k}{k!}$

$$\frac{e^{2z}-1}{z} = \frac{\left(1 + \frac{2}{1!}z + \frac{2^2}{2!}z^2 + \frac{2^3}{3!}z^3 + \cdots\right) - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{2}{1!}z + \frac{2^2}{2!}z^2 + \frac{2^3}{3!}z^3 + \cdots\right) = \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!}z + \frac{2^3}{3!}z^2 + \cdots.$$

نستنتج أن $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للحذف لأنه لا يوجد إلا الجزء التحليلي من سلسلة لورنت.

تمارين

$$f(z)=\frac{\sin 4z-4z}{z^2}$$

نستخدم السلسلة $\sin 4z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4z)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\frac{\sin 4z-4z}{z^2}=\frac{\left(\frac{4}{1!}z-\frac{4^3}{3!}z^3+\frac{4^5}{5!}z^5-\frac{4^7}{7!}z^7+\cdots\right)-4z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(-\frac{4^3}{3!}z^3+\frac{4^5}{5!}z^5-\frac{4^7}{7!}z^7+\cdots\right)$$

$$=-\frac{4^3}{3!}z+\frac{4^5}{5!}z^3-\frac{4^7}{7!}z^5+\cdots.$$

نستنتج أن $z=0$ نقطة شاذة قابلة للحذف لأنه لا يوجد إلا الجزء التحليلي من سلسلة لورنت.

2 صنّف النقاط الشاذة لكل من التوابع الآتية باستخدام سلسلة لورنت:

- $f(z)=z^3\sin(1/z).$
- $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$
- $f(z)=\frac{1-\cosh z}{z^4}$

تمارين

الحل

$$f(z)=\frac{1-\ \cosh z}{z^4}$$

$$f(z)=\frac{1-\cosh z}{z^4}=\frac{1-\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)}{z^4}=-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}-\cdots$$

نستنتج أن $z=0$ قطب من المرتبة الثانية.

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2}$$

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2}=\frac{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\cdots$$

نستنتج أن $z=0$ قطب من المرتبة الثانية.

$$f(z)=z^3\sin(1/z).$$

$$f(z)=z^3\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{z}^7\right)+\cdots\right]=z^2-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!z^2}-\frac{1}{7!z^4}+\cdots,\quad 0<|z|,$$

نلاحظ أن الجزء الرئيسي لا نهائي، لذلك $z=0$ نقطة شاذة أساسية.

تمارين

3 استخدم سلسلة لورنت لإيجاد الراسب لكل من التوابع الآتية في النقاط المشار لها بجانبه:

- $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}; \operatorname{Res}(f(z), 0)$
- $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)^3}; \operatorname{Res}(f(z), 0)$
- $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}; \operatorname{Res}(f(z), 1)$

الحل

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)(z+4)}; \operatorname{Res}(f(z), 1)$$

$$f(z) = \frac{2}{5(z-1)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-1}{5}} = \frac{2}{5(z-1)}\left(1 - \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} - \frac{(z-1)^3}{5^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2/5}{z-1} - \frac{2}{25} + \frac{2(z-1)}{5^3} - \frac{2(z-1)^2}{5^4} + \cdots$$

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = 2/5$$

تمارين

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)^3}; \text{Res}\,(f(z),0)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(1-z)^{-3} = \frac{1}{z^3}\left(1 + (-3)(-z) + \frac{(-3)(-4)}{2!}(-z)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}(-z)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^2} + \frac{6}{z} + 10 + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Res}(f(z),0) = 6$$

$$f(z) = \frac{4z-6}{z(2-z)}; \text{Res}\,(f(z),0)$$

نفرق الكسر ونكتب بالشكل الآتي

$$f(z) = -\frac{3}{z} - \frac{1}{z-2} = -\frac{3}{z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{3}{z} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right) = -\frac{3}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Res}(f(z),0) = -3$$

تمارين

4 استخدم النهاية لحساب الراسب في القطب لكل من التوابع الآتية:

- $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 16}$
- $f(z) = \dfrac{4z + 8}{2z - 1}$
- $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$

الحل

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 16}$$

لدينا $z = \pm 4i$ قطبان بسيطان.

$$\operatorname{Res}(f(z), 4i) = \lim_{z \to 4i} (z - 4i) \cdot \frac{z}{(z - 4i)(z + 4i)} = \lim_{z \to 4i} \frac{z}{z + 4i} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), -4i) = \lim_{z \to -4i} (z + 4i) \cdot \frac{z}{(z - 4i)(z + 4i)} = \lim_{z \to -4i} \frac{z}{z - 4i} = \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{4z + 8}{2z - 1}$$

لدينا $z = 1/2$ قطب بسيط.

$$\operatorname{Res}(f(z), 1/2) = \lim_{z \to 1/2} (z - 1/2) \frac{4z + 8}{2(z - 1/2)} = \lim_{z \to 1/2} (2z + 4) = 5$$

تمارين

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} = \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}$$

لدينا $z = 0$ قطب من المرتبة الثانية و $z = -2$ و $z = 1$ قطبان بسيطان.

$$\operatorname{Res}(f(z),1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z^2(z+2)(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2(z+2)} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{1}{z^2(z+2)(z-1)} = \lim_{z\to -2}\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{12}$$

$$\operatorname{Res}(F(z),0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-2z-1}{(z+2)^2(z-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

تمارين

5 استخدم مبرهنة كوشي للرواسب لحساب كل من التكاملات الآتية على المناطق المشار لها بجانب كل تكامل:

- $\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}dz \quad |z|=3$
- $\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}dz \quad |z-2i|=1$
- $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}dz,\ C: |z-3i|=3$

الحل

- $\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}dz \quad |z|=3$

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f(z),1)+\mathrm{Res}(f(z),-2)] = 2\pi i\left[\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{9}\right)\right]=0$$

- $\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}dz \quad |z-2i|=1$

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),2i) = \pi\left(1-\frac{1}{2}i\right)$$

تمارين

- $\oint_C \frac{1}{z^2 + 4z + 13} dz, \; C: |z - 3i| = 3$

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -2+3i) = \frac{\pi}{3}$$