انتشار الأمواج الكهرطيسية

أذكّر بمعادلات مكسويل:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{MG}$$

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{MF}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad \text{M}\Phi$$

$$\mathbf{rotB} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad \text{MA}$$

يجب على الطالب تذكّر هذه المعادلات.

انطلاقاً من هذه المعادلات سنستنتج معادلة الانتشار ونوجد حلّها في حالة خاصة وهي حالة الموجة المستوية، ثُمَّ سنستنتج خصائص الموجة المستوية، ونتعرّف على عبارة الطاقة الكهرطيسية التي تعبر سطح أثناء انتشار الموجة.

2. انتشار الحقل الكهرطيسي

1.2. معادلة الانتشار

لنطبق المؤثّر : **rot** على طرفي معادلة مكسويل —فارادي:

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{rotrotE} = -\frac{\partial(\mathbf{rotB})}{\partial t}$$

سنعوّض في الطرف الثاني من العلاقة السابقة قيمة **rotB** باستخدام معادلة مكسويل أمبير: $\mathbf{rotB} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$

وسنستخدم المساواة: $\mathbf{rotrot} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$ لكتابة الطرف الأول بصيغة أخرى.

فنجد:

$$\mathbf{grad}\left(\mathrm{div}\,\mathbf{E}\right) - \Delta\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{grad}\rho + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}}$$

من ناحية ثانية:

$$\mathbf{rotB} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \mathbf{rotrotB} = \mu_0\left(\mathbf{rotj} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{rotE}}{\partial t}\right)$$

وباستخدام معادلة مكسويل –فارادي نجد:

$$\mathbf{rotrotB} = \mu_0\left(\mathbf{rotj} + \varepsilon_0\frac{\partial\left(\mathbf{rotE}\right)}{\partial t}\right)$$

$$\mathbf{grad}\left(\mathrm{div}\,\mathbf{B}\right) - \Delta\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{rotj} - \varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B}\right)$$

ومن ثمَّ:

$$\boxed{\Delta\mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{rotj}}$$

في المناطق الخالية من الشحن والتيارات لدينا $\rho = 0$ و $\mathbf{j} = 0$ ومن ثمَّ:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathbf{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\\ \Delta\mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0\end{aligned}}$$

لاحظ أنّ لكل من الحقلين ثلاث معادلات تفاضلية متماثلة، حيث أنّ لكل مركّبة من مركبات الحقل معادلة تفاضلية.

تُسمى المعادلات السابقة بمعادلات انتشار الحقلين الكهربائي والمغناطيسي.

ملاحظة:

1. كان من الممكن التوصّل بشكل أبسط للعلاقتين السابقتين بوضع $\rho = 0$ و $\mathbf{j} = 0$ في معادلات مكسويل وإتمام الحساب.
2. ضمن عيار لورنتز وجدنا (الدرس السابق):

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \mathbf{j} = 0$$

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

في المناطق الخالية من الشحن والتيارات نجد:

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

النتيجة: إن للمقادير : V ومركبات الحقول $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{A}$ معادلات الانتشار نفسها. ومن ثَمَّ يكفي أن نجد حلاً للمعادلة:

$$\boxed{\Delta S - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0}$$

حيث S مقدار سلمي يمثل الكمون السلمي أو إحدى مركبات واحد من الحقول $\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$.

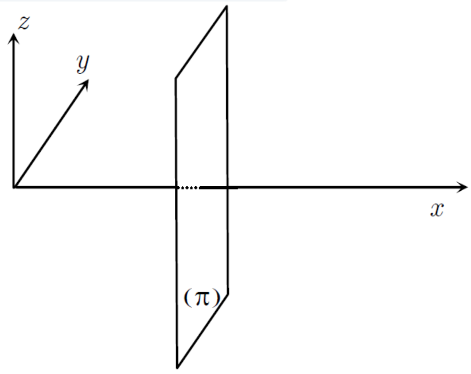
2.2. حل معادلة الانتشار

1.2.2. تعاريف

أ. المُوجة: نُسمي موجة كل حل $S(M,t)$ لمعادلة الانتشار تابع للموضع والزمن.

ب. الموجة المستوية: نقول عن موجة إنها مستوية إذا كان التابع S يأخذ القيمة نفسها في كل نقطة من مستوٍ ثابت (π) عمودي على اتجاه ثابت معرَّف بشعاع واحدة $\mathbf{n}$.

أي $S = S(x,t)$ انظر الشكل الآتي.



إنّ أغلب الموجات التي نجدها في التطبيقات العملية يُمكن تقريبها بموجات مستوية، فأمواج الراديو والتلفزيون والهاتف النقال والموجات الصادرة عن الأقمار الصنعية ترد إلينا من منابع بعيدة عنا بمسافات كبيرة مقارنة بأبعاد المنابع، ويُمكن تقريب الأمواج الصادرة عن هذه المنابع بأمواج كروية (نقصد بذلك أن مجموعة النقاط التي تصلها الموجة في الوقت نفسه تنتمي إلى سطح كرة). وبما أننا نقوم باستشعار الموجة في منطقة محدودة بعيداً عن المنبع فإنّ سطح الكرة السابقة في منطقة الدراسة يُمكن تقريبه بمستوٍ، وبالتالي نقبل بتقريب الموجة المستوية.

إنّ حل معادلة الانتشار في حالة الموجة المستوية بسيط نسبياً، وشكل الحل هو الآخر بسيط، وسوف نكتفي بالموجة المستوية لجمل الأسباب التي ذكرناها.

وهنا نعيد تعريف سطح الموجة: نسمي سطح موجة: مجموعة النقاط التي تصلها الموجة في اللحظة نفسها،

سطوح الموجة للموجة الكروية هي كرات لها المركز نفسه،
وسطوح الموجة للموجة المستوية هي مستويات متوازية.

2.2.2. حل معادلة الانتشار

تمرين محلول: (يُطلب فهم النتيجة)

أوجد حل معادلة الانتشار في حالة الموجة المستوية.

الحل:

تُكتب معادلة الانتشار كما يلي:

$$\Delta S - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \quad \text{مع} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

لِنُجرِ التغيير التالي في المتحولات:

$$u = x - ct$$
$$v = x + ct$$

لدينا:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial t}dt$$

ولكن:

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(du+dv)$$
$$t = \frac{1}{2c}(v-u) \Rightarrow dt = \frac{1}{2c}(dv-du)$$

ومن ثَم:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(du+dv)\right] + \frac{\partial S}{\partial t}\left[\frac{1}{2c}(dv-du)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)du + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)dv$$

ولكن:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial u}du + \frac{\partial S}{\partial v}dv$$

إذن:

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)S$$
$$\frac{\partial S}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)S$$

أي:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

ومن ثَمّ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}(S) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial v}S\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)S\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right) = 0$$

إذن يُمكننا كتابة معادلة الانتشار بالشكل:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$$

ومن ثَمّ:

$$\frac{\partial S}{\partial v} = g_1(v) \Rightarrow S = \int g_1(v)\, dv + f(u)$$

ليكن $g(v) = \int g_1(v)\, dv$ إذن:

$$S = g(v) + f(u)$$

أي:

$$S(x,t) = g(x+ct) + f(x-ct)$$

يُشترط في التابعين f و g أن يكونا قابلين للاشتقاق مرتين.

النتيجة: حل معادلة الانتشار هو:

$$\boxed{S(x,t) = g(x+ct) + f(x-ct)}$$

لنحلل ماذ يُمثّل كل من التابعين:

نلاحظ أن f يُمثل موجة متقدمة في الاتجاه الموجب للمحور Ox، لأنه إذا أخذ f القيمة f_0 في اللحظة $t=0$ وفي الموقع $x=0$ نلاحظ أنه يأخذ القيمة نفسها في الموقع $x = x_0$ في اللحظة $t = \dfrac{x_0}{c}$

أي إنّ هذا الجزء من الموجة ينتشر في الاتجاه الموجب لـ Ox بسرعة قدرها $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

وبالأسلوب نفسه نرى أن g يُمثل موجة تنتشر في الاتجاه السالب لـ Ox.

نقول عن f إنها موجة متقدمة وعن g إنها موجة متراجعة.

3.2. الموجة المستوية المتقدمة في الخلاء

1.3.2. عرضانية الموجة المستوية

نفترض أنّ الوسط الذي تنتشر فيه الموجة هو الخلاء حيث لا يوجد شحنات كهربائية ولا يوجد تيارات.

كما نفترض أن الموجة تنتشر وفق الاتجاه Ox.

يتحقق شرط لورنتز إذا أخذنا $V = 0$ و $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ أي بأخذ الحقل الكهربائي الساكن معدوماً.

ولنفترض أن الحقل المغناطيسي الساكن والكمون الشعاعي الساكن معدومين.

لما كانت الموجة مستوية وتنتشر وفق Ox فإنّ كل من الحقول الكهرطيسية الآتية: $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ لا يتعلق إلا بـ x و t، أي:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x,t), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(x,t)$$

ولكن بغياب التيارات والشحنات وباستخدام معادلات مكسويل وعيار لورنتز نجد:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

إذن:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

ولكن: $\mathbf{rotE} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ و $(\mathbf{rotE})_x = 0$ إذن:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

من ناحية ثانية: $\mathbf{rotB} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ولدينا $(\mathbf{rotB})_x = 0$ إذن:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

أي إنّ المشتقين الجزئيين لكلٍ من E_x و B_x معدومان. إذن $E_x = C_1$ و $B_x = C_2$ أي ثابتين.

ولكن افترضنا أنّ الحقل الساكن المغناطيسي والكهربائي معدومان، إذن: $C_1 = 0$ و $C_2 = 0$.

ومن ثمَّ:

$$\boxed{B_x = 0 \quad \text{و} \quad E_x = 0}$$

ولدينا:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x = 0$$

ولما كان $\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ فإن: $A_x = C_3$ أي ثابت وباستبعاد الحالة الساكنة نجد:

$$A_x = 0$$

النتيجة: ليس للحقول $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$ مركبات على المحور Ox

نقول عن هذه الحقول إنها عرضانية فهي عمودية على جهة الانتشار. ونقول عن الموجة المستوية إنها عرضانية.

2.3.2. الموجة المستوية المتقدمة

نسمي موجة متقدمة كل موجة لها جهة واحدة للانتشار. بناء على ما تقدم يُكتب الكمون الشعاعي لموجة متقدمة تنتشر في الاتجاه Ox بالشكل:

$$\mathbf{A} = \left| \begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y = f(x - ct) \\ A_z = h(x - ct) \end{array} \right.$$

لنحسب $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ c\dfrac{\partial f}{\partial u} \\ c\dfrac{\partial h}{\partial u} \end{array} \right.$$

مع $u = x - ct$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{array} \right.$$

نلاحظ ما يلي:

أ. لدينا: $\mathbf{E}.\mathbf{B} = -c\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial h}{\partial u} + c\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$ أي إنَّ الحقلين متعامدان.

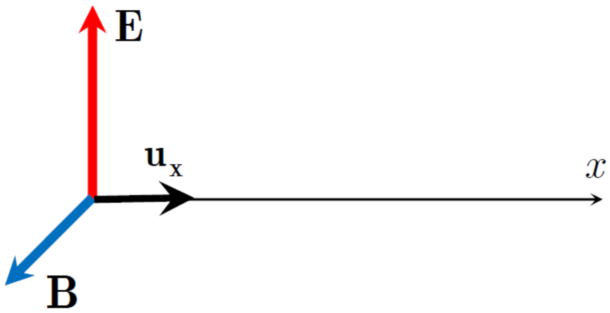
ب.لدينا: $\|\mathbf{E}\|^2 = c^2\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$ و $\|\mathbf{B}\|^2 = \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$

إذن: $\|\mathbf{B}\|^2 = \dfrac{\|\mathbf{E}\|^2}{c^2}$.

بناءً على الملاحظتين السابقتين نستنتج أن:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u_x} \wedge \mathbf{E}}{c}}$$

وهكذا نمثّل الحقلين بالشكل الآتي:



4.2. شعاع بوينتينغ Poynting

تمرين محلول: لنتأمل وسطاً متجانساً ومتماثل المناحي تنتشر فيه موجة شعاع الحقل الكهربائي لها $\mathbf{E}$ وشعاع الحقل المغناطيسي للموجة $\mathbf{B}$. لتكن ε السماحية و μ_0 النفوذية. لتكن ρ الشحنة الحجمية، و $\mathbf{j}$ شعاع كثافة التيار الحجمي. لتكن (D) منطقة في هذا الوسط يحدّها السطح (Σ) اكتب العلاقة التي تُعطي الاستطاعة التي تخرج من السطح (Σ).

الحل:

لننطلق من معادلتي مكسويل–فارادي ومكسويل– أمبير:

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{rotB} = \mu_0\left[\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E})\right]$$

لنضرب المعادلة الأولى بـ $\mathbf{B}$ والثانية بـ $-\mathbf{E}$ ونجمع الناتج طرفاً إلى طرف:

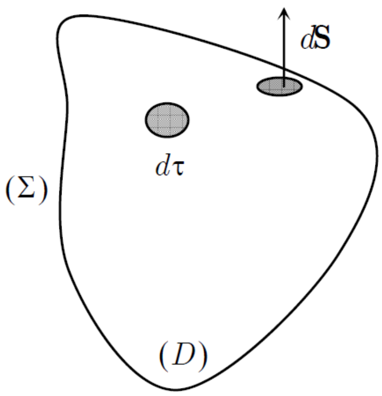
$$\mathbf{B}.\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}.\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mathbf{B}.\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0\left[\mathbf{E}.\mathbf{j} + \mathbf{E}.\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E})\right] \Rightarrow$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) = -\mu_0\left[\mathbf{E}.\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}\right) = -\mathbf{j}.\mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)$$

لنكامل طرفي العلاقة السابقة على (D):

$$\iiint_{(D)} \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}\right)d\tau = -\iiint_{(D)} \mathbf{j}.\mathbf{E}\,d\tau - \iiint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)d\tau \Rightarrow$$



وبتطبيق علاقة غرين–أورستروغرادسكي على الطرف الأوّل:

$$\iint_{(\Sigma)}\left(\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}\right)d\mathbf{S}=-\iiint_{(D)}\mathbf{j}.\mathbf{E}d\tau-\frac{d}{dt}\iiint_{(D)}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)d\tau\Rightarrow$$

$$(1)\quad\frac{d}{dt}\iiint_{(D)}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)d\tau=-\iiint_{(D)}\mathbf{j}.\mathbf{E}d\tau-\iint_{(\Sigma)}\left(\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}\right)d\mathbf{S}\Rightarrow$$

يُمثل المقدار $\mathbf{j}.\mathbf{E}$ الاستطاعة المتلقاة في واحدة الحجم من الشحن الحرة في المنطقة (D)، ومن ثم يُمثّل المقدار $\iiint_{(D)}\mathbf{j}.\mathbf{E}d\tau$ الاستطاعة المقدّمة إلى الشحن الحرة في كامل المنطقة

يُمثل المقدار $\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0\mathbf{E}^2}{2}$ الطاقة الكهرطيسية الحجمية في المنطقة المدروسة. إذن الطاقة الكهرطيسية للمنطقة (D) تساوي:

$$\iiint_{(D)}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0\mathbf{E}^2}{2}\right)d\tau$$

وتغير الطاقة الكهرطيسية في المنطقة (D) في واحدة الزمن يساوي:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{(D)}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{2}\right)d\tau$$

حسب العلاقة (1) نلاحظ أنّ تغيّر الطاقة الكهرطيسية للمنطقة (D) يساوي مجموع حدّين:

<u>الحد الأوّل:</u> يُمثّل طاقة حركية تكتسبها الشحن الحرة،

<u>الحد الثاني:</u> يُمثّل جزء من الطاقة يخرج من السطح (Σ).

وبـذلك تكـون الاسـتطاعة المفقـودة مـن المنطقـة (D) مسـاوية تـدفق الشـعاع $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$ من خلال السطح (Σ).

نسمي الشعاع $\mathbf{R}$ بشعاع بوينتينغ.

نعمم ما سبق على كل سطح تجتازه موجة، ونأخذ بالنتيجة الآتية:

النتيجة: الاستطاعة المنقولة من جهة إلى أخرى لسطح بوساطة الموجة، تساوي تدفق شعاع بوينتينغ من خلال هذا السطح. وشعاع بوينتينغ يُكتب:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$$

5.2. شعاع بوينتينغ في حالة موجة متقدمة مستوية

نتأمل موجة مستوية متقدمة في وسط خال من الشحن والتيارات في الاتجاه Ox.

لدينا:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{E}}{v}$$

حيث $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$ يمثل سرعة الانتشار في الوسط.

يُكتب شعاع بوينتينغ:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \wedge \left(\frac{\mathbf{u_x} \wedge \mathbf{E}}{v}\right) = \frac{1}{\mu_0 v}\mathbf{E}^2\mathbf{u_x}$$

ولكن $\mu_0 v = \frac{1}{\varepsilon v}$ إذن:

$$\boxed{\mathbf{R} = \varepsilon v \mathbf{E}^2\mathbf{u_x} = \frac{v}{\mu_0}\mathbf{B}^2\mathbf{u_x}}$$

ملاحظات:

1. في حال موجة مستوية متقدمة لدينا $\varepsilon \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}$ أي إنَّ الطاقة الحجمية الكهربائية تساوي الطاقة الحجمية المغناطيسية.
2. لدينا $\mathbf{R} = u_{em} v \mathbf{u_x}$ إذن الاستطاعة التي تجتاز السطح S هي الطاقة المحتواة ضمن مجسم أسطواني مستند إلى محيط S ومولد بالشعاع $\mathbf{v}$. إذن تنتقل الطاقة بسرعة مساوية لسرعة انتشار الموجة v.