انتشار الأمواج الكهرطيسية

(3)

نذكّر بمعادلات مكسويل:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{MG}$$

$$\mathbf{rotE}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{MF}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \qquad \text{M}\Phi$$

$$\mathbf{rotB}=\mu_0\left(\mathbf{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad \text{MA}$$

ونذكّر بأننا كتبنا معادلة الانتشار وأوجدنا حلّها في حالة موجة مستوية، ودرسنا خصائص الموجة المستوية، وتعرّفنا شعاع بوينتينغ.

سنتناول في هذا الدرس حالة خاصة من الموجة المستوية المتقدّمة، وهي الموجة المستوية المتقدّمة الجيبية.

في البداية ننوّه إلى أنّ دراسة الموجة المتقدمة الجيبية تأخذ أهميتها مما تعلمتموه في الرياضيات وهو:

يُمكن كتابة أي تابع دوري كمجموع لتوابع جيبية بتواترات مختلفة (سلسلة فوريية)، فهناك تواتر أساسي، والتوترات الأخرى هي مضاعفات لهذا التواتر تسمى التوافقيات.

والشائع سواء في التطبيقات العملية أو في الطبيعة أن نجد توابع دورية ليست بالضرورة جيبية، من هنا أتت أهمية دراسة الموجة الجيبية، وهذا يماثل ما رأيناه في الدارات الكهربائية حيث درسنا التيارات الجيبية، علماً أن التيار المتناوب هو تيار دوري ولكنه ليس جيبي بالضرورة.

3. الموجة الكهرطيسية المستوية الجيبية

1.3. تعريف

إذا كانت مركبات الحقل الكهرطيسي تتغير جيبياً قلنا عن الموجة الكهرطيسية إنها جيبية. ومن ثَمَّ يُكتب شعاع الحقل لموجة تنتشر وفق الاتجاه Ox بالشكل:

$$\mathbf{s}(x,t)=\mathbf{s}_0\cos\left[\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)(ct-x)\right]$$

{ لاحظ أنّ كل مركّبة من مركبات شعاع الحقل تأخذ هذا الشكل}

أي:

$$\mathbf{s}(x,t)=\mathbf{s}_0\cos(\omega t-kx)$$

نسمي:

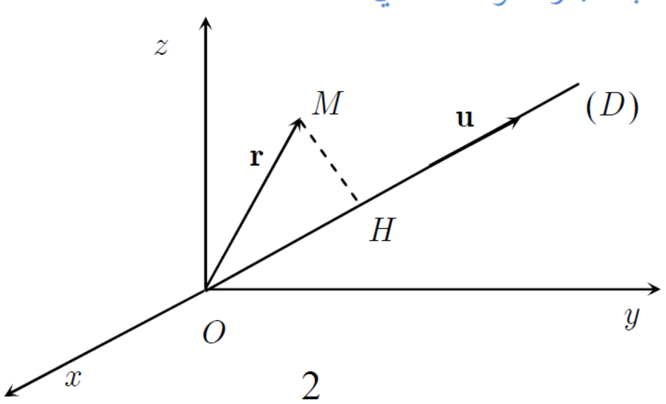
$\mathbf{s}_0$: سعة الموجة.

ν : تواتر (أو تردد) الموجة.

ω : نبض الموجة.

k : القيمة الجبرية لشعاع الموجة $\mathbf{k}$ وهو شعاع محمول على Ox وطويلته تساوي $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ حيث $\lambda=\dfrac{c}{\nu}$ طول الموجة.

لنتأمل موجة تنتشر وفق المحور (D)، وليكن $\mathbf{u}$ شعاع واحدة محمولاً على (D). لتكن M نقطة في الفراغ ولنكتب عبارة الموجة S في هذه النقطة.



2

لما كانت الموجة مستوية فإن قيمة S في النقطة M تساوي قيمتها في النقطة H مسقط M على المحور (D).

إذن:

$$\mathbf{S}(M,t) = \mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{S}(H,t) = \mathbf{S}(|\mathbf{OH}|,t) = \mathbf{S}_0 \cos(\omega t - k|\mathbf{OH}|)$$

ولكن:

$$k|\mathbf{OH}| = k\mathbf{u}.\mathbf{OM} = \mathbf{k}.\mathbf{OM} = \mathbf{k}.\mathbf{r}$$

نستنتج:

$$\boxed{\mathbf{S}(M,t) = \mathbf{S}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})}$$

2.3. التمثيل العقدي

غالباً ما نلجأ إلى التمثيل العقدي للموجة لتبسيط العمليات الحسابية، فنكتب:

$$\underline{\mathbf{S}}(M,t) = \mathbf{S}_0 \exp j(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})$$

مع $j = \sqrt{-1}$. عندها للحصول على الموجة الحقيقية يكفي أن نأخذ الجزء الحقيقي للعبارة العقدية للموجة: $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\,\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r},t)$.

تمرين: برهن العلاقات الآتية التي يحققها الشكل العقدي لأحد الحقول الكهرطيسية للموجة المستوية المتقدّمة:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial t} = j\omega \mathbf{S},\ \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{S}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\mathbf{S}}$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial x} = -jk_x \underline{\mathbf{S}},\ \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{S}}}{\partial x^2} = -k_x^2 \underline{\mathbf{S}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{S}} = -i\mathbf{k}.\underline{\mathbf{S}}$$

$$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{S}} = -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{S}}$$

3.3. شعاع بوينتينغ العقدي

يُكتب شعاع بوينتينغ العقدي:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}} \wedge \frac{\underline{\mathbf{B}}^*}{\mu_0}$$

حيث $\underline{\mathbf{B}}^*$ هو المقدار العقدي المرافق للمقدار $\mathbf{B}$.

ولكننا وجدنا:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u_x} \wedge \mathbf{E}}{c} \Rightarrow \underline{\mathbf{B}}^* = \frac{\mathbf{u_x} \wedge \underline{\mathbf{E}}^*}{c}$$

إذن:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2\mu_0}\underline{\mathbf{E}} \wedge \left(\frac{\mathbf{u}_x \wedge \underline{\mathbf{E}}^*}{c}\right) = \frac{1}{2\mu_0 c}\left(\underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{E}}^*\right)\mathbf{u_x}$$

ومن ثمّ:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(\underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{E}}^*\right)\mathbf{u_x}$$

وهو مقدار حقيقي وتدفقه من خلال سطح S هو الاستطاعة المتوسطة التي تعبر هذا السطح. (لاحظ أن القيمة المتوسطة للمقدار $|\mathbf{E}|^2$ تساوي $\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{E}}^*\right)$).

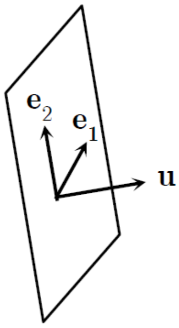
4.3. استقطاب الموجة الجيبية المستوية

يعبّر استقطاب موجة مستوية متقدّمة جيبية عن منحى الحقل الكهربائي للموجة، فنقول إنَّ استقطاب الموجة يكون خطياً إذا وازى الحقل الكهربائي للموجة محوراً ثابتاً في الفراغ وحافظ على هذه الخاصة أثناء انتشار الموجة.

وإذا غيّر الحقل الكهربائي جهته بحيث ترسم نهايته دائرة في مستوي ثابت عمودي على جهة الانتشار قلنا عن الاستقطاب إنّه دائري.

وبالشكل نفسه نعرّف الاستقطاب الإهليلجي.

لنتأمـل الحقـل الكهربـائي $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp j(\omega t - \mathbf{k.r})$ لموجـة مسـتوية جيبيـة. لـيكن $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ شعاعي واحدة متعامدين في المستوي (Σ) العمودي على اتجاه الانتشار.



لدينا:

$$\mathbf{E}_0 = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2$$

$$\underline{\mathbf{E}} = E_1 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r})\right]\mathbf{e}_1 + E_2 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r})\right]\mathbf{e}_2$$

نتحقق بسهولة أن كلاً من:

$$E_1 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r})\right]\mathbf{e}_1$$

$$E_2 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r})\right]\mathbf{e}_2$$

هو حلٌّ لمعادلة الانتشار.

ومن ثَم:

$$E_1 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r}) \exp(j\phi_1)\right]\mathbf{e}_1$$

$$E_2 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r}) \exp(j\phi_2)\right]\mathbf{e}_2$$

هما حلان أيضاً لمعادلة الانتشار،

إذن:

$$\underline{\mathbf{E}} = E_1 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r}) \exp(j\phi_1)\right]\mathbf{e}_1 + E_2 \left[\exp j(\omega t - \mathbf{k.r}) \exp(j\phi_2)\right]\mathbf{e}_2$$

هو حل أيضاً.

ويُكتب الحل الحقيقي الموافق:

$$\boxed{\mathbf{E} = E_1 \cos\left(\omega t - \mathbf{k.r} + \phi_1\right)\mathbf{e_1} + E_2 \cos\left(\omega t - \mathbf{k.r} + \phi_2\right)\mathbf{e_2}}$$

وهنا نميز ثلاث حالات:

أ. حالة الاستقطاب الخطي

إذا كان $\phi_1 = \phi_2$ نجد:

$$\mathbf{E} = \left(E_1\mathbf{e_1} + E_2\mathbf{e_2}\right)\cos\left(\omega t - \mathbf{k.r} + \phi_1\right)$$
$$= \mathbf{E_0} \cos\left(\omega t - \mathbf{k.r} + \phi_1\right)$$

والحقل الكهربائي يحافظ على اتجاهٍ ثابت حيث يوازي الحقل حامل الشعاع الثابت $\mathbf{E_0}$. لذلك نقول عن الموجة إنها مستقطبة خطياً.

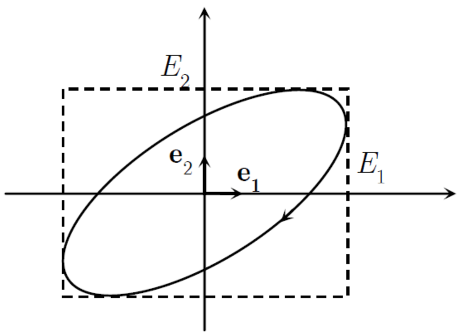
ب. حالة الاستقطاب الإهليلجي

لنفترض أن $\phi_1 \neq \phi_2$. نأخذ مثلاً $\phi_1 = 0$ و $\phi_2 = \phi$. في هذه الحالة:

$$\mathbf{E} = E_1 \cos\left(\omega t - \mathbf{k.r}\right)\mathbf{e_1} + E_2 \cos\left(\omega t - \mathbf{k.r} + \phi\right)\mathbf{e_2}$$

نميز حالتين:

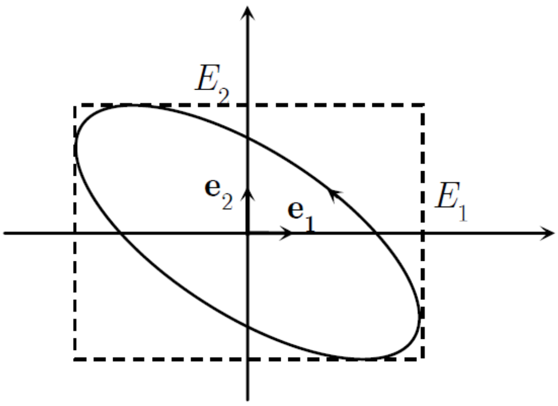
- $\phi \in]0, \pi[$ في هذه الحالة يدور الشعاع $\mathbf{E}$ باتجاه عقارب الساعة راسماً قطعاً ناقصاً كما في الشكل التالي $\left(\phi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$:



لذلك نقول عن الاستقطاب إنه إهليلجي غير مباشر.

تمرين: تحقق أنّ شعاع الحقل الكهربائي يدور باتجاه عقارب الساعة.

- $\phi \in]\pi, 2\pi[$ في هذه الحالة يدور الشعاع $\mathbf{E}$ بعكس اتجاه عقارب الساعة راسماً قطعاً ناقصاً كما في الشكل التالي $\left(\phi \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\right)$:

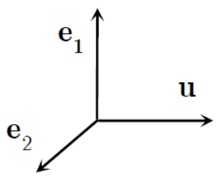


لذلك نقول عن الاستقطاب إنه إهليلجي مباشر.

حالة خاصة: إذا كان $E_1 = E_2$ و $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ يُصبح القطع الناقص دائرة، ونقول عن الاستقطاب إنه دائري.

5.3. الأمواج المستقرة

تمرين محلول: لنتأمل موجتين مستويتين جيبيتين تنتشران وفق المحور Ox في اتجاهين متعاكسين:



$$\mathbf{E}_1 = E_0\left[\exp j\left(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r}\right)\right]\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0\left[\exp j\left(\omega t + \mathbf{k}.\mathbf{r}\right)\right]\mathbf{e}_1$$

1. اكتب عبارة الحقلين المغناطيسيين للموجتين.

2. استنتج عبارة كل من الحقلين الكهربائي والمغناطيسي للموجة الناجمة عن تركيب الموجتين. وبيّن أنّه لا يعود هناك انتشار. ومثل في لحظة ما كل من الحقلين الكهربائي والمغناطيسي.

3. أوجد عبارة كل من الطاقة الكهربائية الحجمية والطاقة المغناطيسية الحجمية.

4. بيّن من خلال العلاقتين السابقتين أنّه يوجد تبادل دائم بالطاقة.

الحل:

1. عبارة الحقلين المغناطيسيين للموجتين:

$$\underline{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}_1}{c} = \frac{E_0}{c}\left[\exp j\left(\omega t - \mathbf{k.r}\right)\right]\mathbf{e}_2$$

$$\underline{\mathbf{B}}_2 = \frac{-\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}_2}{c} = -\frac{E_0}{c}\left[\exp j\left(\omega t + \mathbf{k.r}\right)\right]\mathbf{e}_2$$

2. الحقلان الناتجان هما:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2 = 2E_0 e^{j\omega t}\cos\left(\mathbf{k.r}\right)\mathbf{e}_1$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{B}}_2 = -\frac{2}{c}jE_0 e^{j\omega t}\sin\left(\mathbf{k.r}\right)\mathbf{e}_2$$

والحقلان الحقيقيان هما:

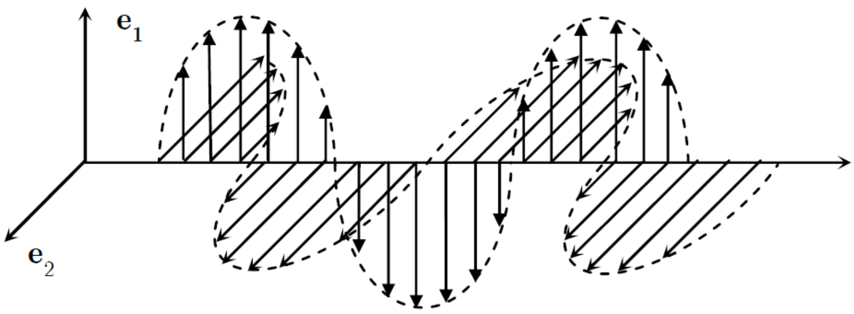
$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathbf{E}}\right) = 2E_0\cos\left(\omega t\right)\cos\left(\mathbf{k.r}\right)\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathbf{B}}\right) = \frac{2}{c}E_0\sin\left(\omega t\right)\sin\left(\mathbf{k.r}\right)\mathbf{e}_2$$

نلاحظ أنه لم يعد هنالك انتشار، ففي كل نقطة لدينا اهتزاز للحقل الكهربائي بنبض قدره ω وبمطال أعظمي قدره $2E_0\cos\left(\mathbf{k.r}\right)$، يبلغ هذا المطال قيماً حدية في حال $\mathbf{k.r} = n\pi$، حيث n عدد صحيح. أما الحقل المغناطيسي فيهتز بنفس الشكل ولكن بفارق

في الطور قدره $\frac{\pi}{2}$ ويبلغ المطال الأعظمي للاهتزاز قيماً حدية في حال $\mathbf{k.r} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

في الشكل التالي مثلنا بعض أشعة الحقل الكهربائي والمغناطيسي في لحظة ما:



نلاحظ أن لدينا بطوناً لاهتزاز الحقل الكهربائي يوافقها عُقَد اهتزاز للحقل المغناطيسي، وبالعكس. من ناحية ثانية نلاحظ من عبارتي $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ أن أشعة الحقل المغناطيسي تنعدم في اللحظات التي تبلغ فيها أشعة الحقل الكهربائي قيمها العظمى، وبالعكس.

3. لنحسب الطاقة الكهربائية الحجمية والطاقة المغناطيسية الحجمية:

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)\cos^2(\mathbf{k.r})$$

$$u_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} = \frac{2}{\mu_0 c} E_0^2 \sin^2(\omega t)\sin^2(\mathbf{k.r})$$

$$= 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t)\sin^2(\mathbf{k.r})$$

4. نلاحظ أنه في اللحظات التي تنعدم فيها الطاقة المغناطيسية تبلغ الطاقة الكهربائية طاقتها العظمى، والعكس صحيح. أي يتبادل الحقلان الكهربائي والمغناطيسي الطاقة باستمرار.

6.3. المُقَطِّب

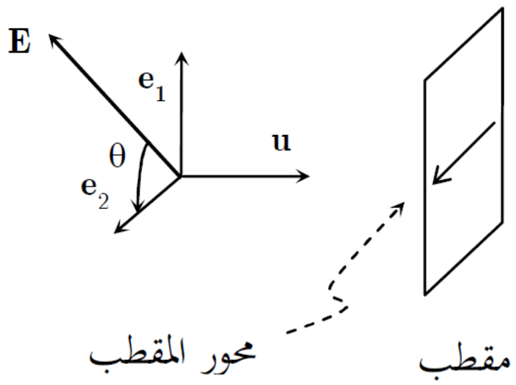
1.6.3. تعريف

المقطب: هو أداةٌ إذا وضعت في طريق الموجة لايمر من الحقل الكهربائي للموجة سوى الـمُرَكِّبة الموازية لمحور ثابت يسمى محور المقطب.

في حالة الضوء، يأخذ المقطب شكل صفيحة شفافة متوزية الوجهين مصنوعة من مادة تعكس أو تمتص إحدى مركبتي الحقل الكهربائي (المركبة العمودية على محور الصفيحة) وتسمح بمرور المركبة الثانية.

2.6.3. حالة استقطاب خطي

لنتأمل موجة ذات استقطاب خطي واردة على مقطب ويصنع اتجاه استقطاب هذه الموجة مع محور المقطب زاوية θ . يمكننا تحليل الحقل الكهربائي $\mathbf{E}$ إلى مركبتين ناظمية على محور المقطب $\mathbf{E}_n$ وموازية لهذا المحور $\mathbf{E}_t$. انظر الشكل التالي.



لدينا:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t = E_n\mathbf{e}_1 + E_t\mathbf{e}_2$$
$$= E\sin\theta\mathbf{e}_1 + E\cos\theta\mathbf{e}_2$$

والجزء الذي يعبر المقطب $\mathbf{E}_a$ هو:

$$\mathbf{E}_a = E\cos\theta\mathbf{e}_2$$

ومن ثم تُكتب نسبة الاستطاعة الواردة (التي تتناسب مع $\mathbf{E}^2$) على المقطب إلى الاستطاعة العابرة (التي تتناسب مع $\mathbf{E}_a^2$):

$$\frac{\mathbf{E}_a^2}{\mathbf{E}^2} = \cos^2\theta$$

في حالة حزمة ضوئية تتناسب الشدة الضوئية مع مربع مطال الحقل الكهربائي للموجة، إذن:

$$I_a = I_0 \cos^2\theta$$

حيث I_0 الشدة الضوئية قبل المقطب و I_a الشدة الضوئية بعد المقطب.

تُعرف العلاقة السابقة بقانون مالوس Malus.

3.6.3. حالة استقطاب إهليلجي

تمرين: ترد موجة مستقطبة إهليلجياً على المقطب، لتكن عبارة الحقل الكهربائي عند مدخل المقطّب هي:

$$\mathbf{E} = E_1 \cos\omega t \mathbf{e}_1 + E_2 \cos(\omega t - \phi)\mathbf{e}_2$$

نفترض أن محور المقطب يصنع الزاوية ψ مع $\mathbf{e}_1$،

ما طبيعة الاستقطاب بعد عبور المقطب؟ وما شدة الحقل الكهربائي؟

الجواب: بعد عبور المقطب يصبح الاستقطاب خطياً، اتجاه الحقل الكهربائي فيه يوازي محور المقطب، وقيمة هذا الحقل:

$$E' = E_1 \cos\omega t \cos\psi + E_2 \cos(\omega t - \phi)\sin\psi$$

4.6.3. الأوساط ثنائية الانكسار (المضاعفة الانكسار)

هي أوساط شفافة تتعلق قرينة انكسارها باتجاه الاستقطاب.

نميز في هذه الأوساط اتجاهين متعامدين ، لكل منهما قرينةُ انكسار مختلفة عن الآخر.

نسمي هذين الاتجاهين محوري الوسط المضاعف الانكسار.

إذا كان استقطاب الموجة موازياً للمحور الأول انتشرت الموجة بسرعة مساوية لـ $v_O = \frac{c}{n_o}$ نسمي n_o قرينة الانكسار العادية، والمحور الموافق بالمحور العادي.

أما إذا وردت الموجة باستقطاب موازٍ للمحور الآخر فتنتشر بسرعة قدرها $v_e = \frac{c}{n_e}$

نسمي n_e قرينة الانكسار غير العادية. والمحور الموافق المحور غير العادي.

توصف الأوساط التي لها هذه الخاصية بأنها غير متماثلة المناحي.

تمرين محلول: ترد موجة مستقطبة خطياً ناظمياً على صفيحة شفافة مضاعفة الانكسار، ويصنع الحقل الكهربائي للموجة زاوية θ مع المحور العادي للصفيحة. ليكن $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ شعاعي واحدة منطبقين على محوري الصفيحة العادي وغير العادي على الترتيب. ما طبيعة استقطاب الموجة بعد عبور الصفيحة؟ ناقش الحالات المختلفة.

الحل:

يُكتب الحقل الكهربائي في نقطة الدخول إلى الصفيحة:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos\theta \cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + E_0 \sin\theta \cos(\omega t)\,\mathbf{e}_2$$

وذلك بأخذ مبدأ لـ $\mathbf{r}$ وجه الصفيحة الأول حيث ترد الموجة.

تنتشر المركبة الأولى بالسرعة العادية، فينجم عن عبور الصفيحة تغير في الطور قدره $\frac{2\pi}{\lambda} n_o e$ حيث e تمثل ثخانة الصفيحة. على حين تعاني المركبة الثانية تغيراً في الطور قدره $\frac{2\pi}{\lambda} n_e e$.

ومن ثَمَّ تغدو عبارة الحقل الكهربائي في نقطة الخروج من الوجه الثاني للصفيحة:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos\theta \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o e\right)\mathbf{e}_1 + E_0 \sin\theta \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e e\right)\mathbf{e}_2$$

أي يُصبح استقطاب الموجة بعد اجتياز الصفيحة إهليلجياً بوجهٍ عام.

حالات خاصة:

ليكن $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)e$.

- ☐ إذا كان $\phi = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح يكون فرق المسير بين مركبتي الحقل مساوياً $(n_e - n_0)e = \frac{\lambda}{2} + k\lambda$ نقول في هذه الحالة عن الصفيحة إنها صفيحة نصف موجة.
- ☐ إذا كان $\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع k عدد صحيح يكون فرق المسير بين مركبتي الحقل مساوياً $(n_e - n_0)e = \frac{\lambda}{4} + k\lambda$ نقول في هذه الحالة عن الصفيحة إنها صفيحة ربع موجة.

تمرين:

1. برهن أن الصفيحة ربع الموجة تُحوّل الاستقطاب الخطي إلى دائري إذا كان هذا الاستقطاب يصنع مع أحد محوري الصفيحة الزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$.
2. برهن أن الصفيحة نصف الموجة تُحول الاستقطاب الخطي إلى آخر اتجاهه مُناظر لاتجاه الاستقطاب الأول بالنسبة إلى محوري الصفيحة.