المحاضرة التاسعة – ميكانيك النقطة المادية والجسم الصلب

د.نزار عبد الرحمن

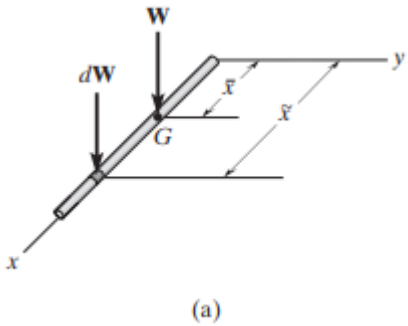
مركز الجاذبية والمركز الهندسي

مركز الجاذبية هو النقطة التي تلتقي عندها محصلة الوزن للجسيمات التي يتألف منها الجسم.

يتألف الجسم من مجموعة لانهائية من الجسيمات ذات حجم تفاضلي ووزن dw . تشكّل هذه الأوزان نظام من القوى المتوازية ،وتكون محصلة نظام القوى عبارة عن وزن الجسم الذي يمر بنقطة وحيدة "تدعى مركز الجاذبية "أو "مركز الثقل G "

من أجل تحديد موقع مركز الثقل ، نفرض قضيب بوزن dw مركزة في موقع غير محدد $\tilde{x}$.

الوزن الكلي للقضيب يساوي مجموع الأوزان الجزئية لكافة الجسيمات التي يتألف منها .

 (a)	$+\downarrow F_R = \Sigma F_z;$ $\quad W = \int dW$

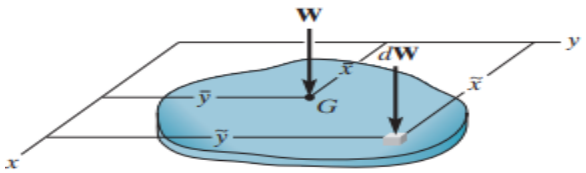
بفرض لدينا نظام مؤلف من عدد من الجزيئات ، محصلة الوزن يجب أن تساوي الوزن الكلي لكافة الجسيمات.

من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة للمحور y ، نكتب معادلة العزوم للوزن W حول المحور y، الذي يكون مساويا لعزم كافة الجزيئات حول نفس المحور:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW}$$

بنفس الطريقة إذا كان الجسم عبارة عن صفيحة (الشكل b)، نستطيع كتابة معادلات توازن العزوم حول المحورين y– x من أجل تحديد موقع المركز الثقل G(x,y) .

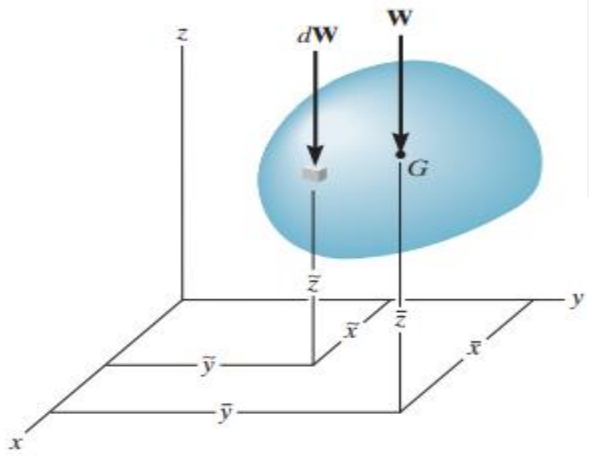


(b)

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW}$$

. وأخيرا يمكن تعميم هذه النتيجة في الفراغ ثلاثي الأبعاد (الشكل c) وكتابة معادلات العزوم حول محاور الاحداثيات الثلاث ، من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة لأية محاور احداثيات :



(c)

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

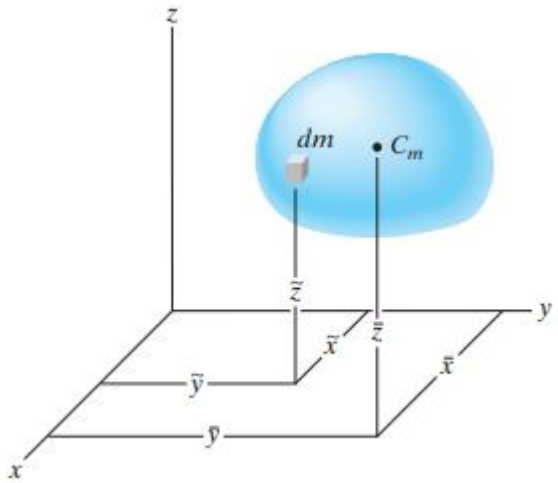
مركز الكتلة :

عند دراسة المسائل المتعلقة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى (علم الديناميك) ،من الضروري تحديد نقطة تسمى " **مركز الكتلة** "بوضع علاقة الوزن والكتلة

$dW=m.g$

في المعادلة السابقة ينتج لدينا العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dm}{\int dm}$$

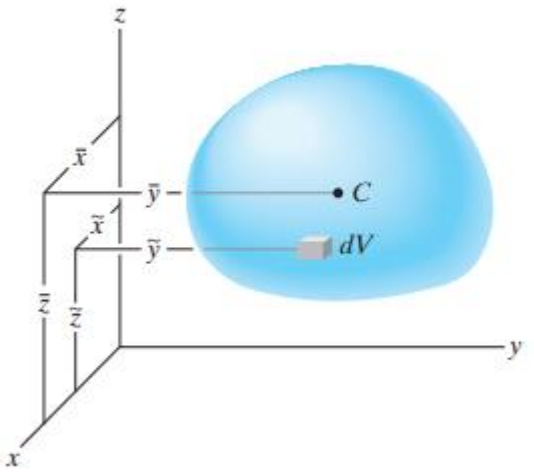


المركز الهندسي :

المركز الهندسي هو النقطة التي تعرّف مركز الجسم ويعتمد على هندسية الجسم ونميز ثلاث حالات :

المركز الهندسي للحجم : عندما يتألف الجسم من مادة متجانسة ، تكون الكثافة ثابتة $dm = \rho dv$

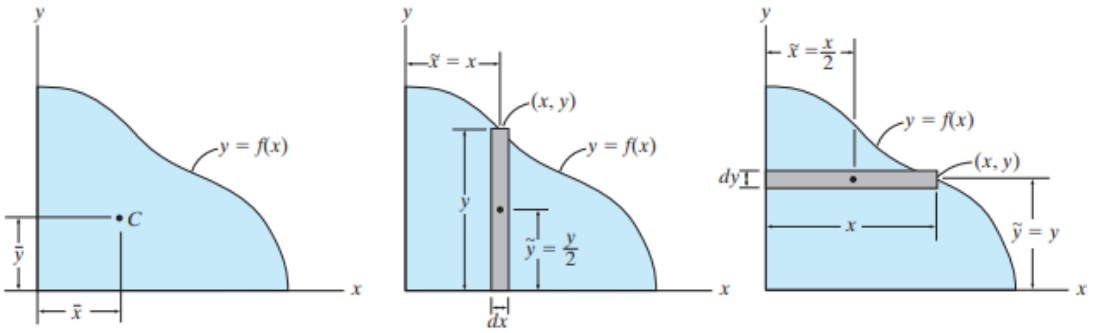
نحصل على العلاقات التي تحدد المركز الهندسي للجسم :



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV} \tag{9–3}$$

المركز الهندسي للمساحة :

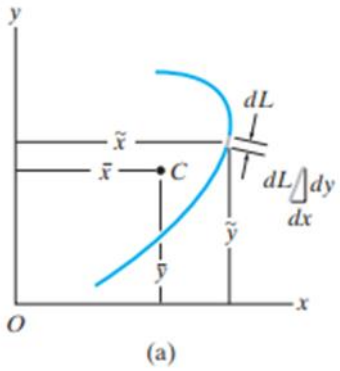
يتم تقسيم المساحة الى مساحات جزئية وحساب العزوم حول كافة محور الاحداثيات



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

الخط :

نعتبر عنصر التفاضل ونحسب العزوم حول محاور الاحداثيات.



(a)

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

or

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

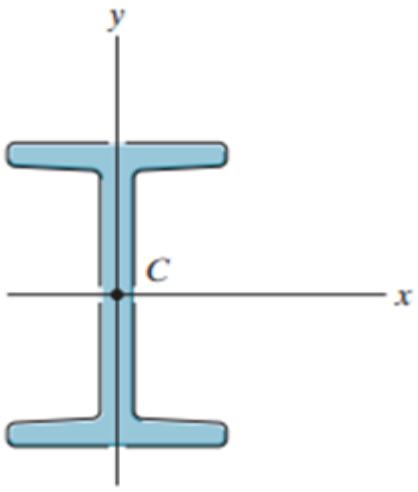
نقاط هامة :

- يمثل المركز الهندسي للجسم النقطة التي يتطابق فيها مركز الكتلة أو مركز الثقل عندما يكون الجسم متجانس .

- المعادلة المستخدمة لتحديد مركز الثقل أو المركز الهندسي عبارة عن موازنة معادلات العزوم لكافة الجسيمات التي يتألف منها الجسم ،وعزم المحصلة لنظام القوى .

- في بعض الحالات يقع المركز الهندسي للجسم خارج الجسم (من أجل حلقة مثلا).

- إذا كان الجسم يمتلك محورا تناظريا . فإن المركز الهندسي يقع على هذا المحور.



الأجسام المركبة :

من الممكن أن يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال (مستطيل ، مثلث ، نصف دائرة ...)، عندها نستطيع تقسيم الجسم إلى مجموعة من الأجسام

وحساب المركز من أجل كل قسم، بدلا من حساب علاقات التكامل نستطيع استخدام العلاقات التالية :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

حيث :

$\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{z}$ احداثيات مركز الثقل للجسم المركب .

$\tilde{x}$ ، $\tilde{y}$ ، $\tilde{z}$ - احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

$\sum W$ - مجموع الأوزان الجزئية لكافة الأجزاء التي يتألف منها الجسم .

عندما يمتلك الجسم كثافة ثابتة ، أو وزن نوعي ، عندها يتطابق مركز الثقل مع المركز الهندسي للجسم .

يمكن حساب المركز الهندسي للخط ، أو للمساحة ، أو للحجم عن طريق تطبيق علاقات مشابهه للعلاقة السابقة .