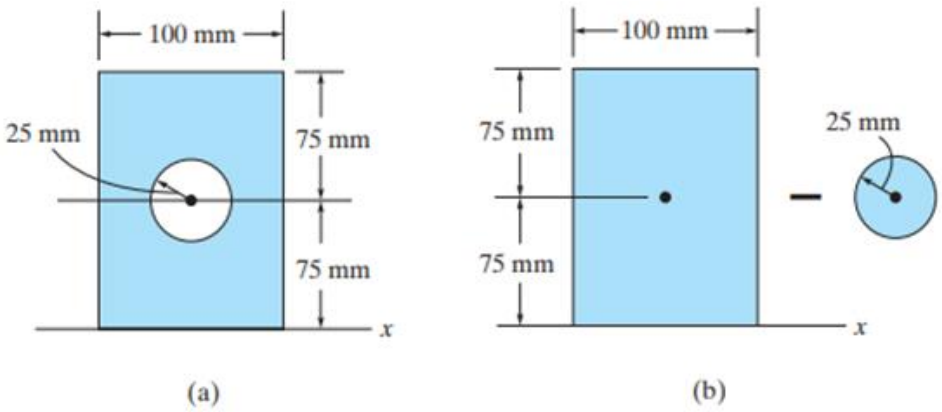
الجلسة العاشرة– ميكانيك النقطة المادية .

د.نزارعبد الرحمن

مسألة (1) : احسب عزم العطالة للمساحة المبيّنة في الشكل حول المحور X .



المساحة المركبة :

الشكل عبارة عن مستطيل مطروح منه الدائرة .

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة حول المحور X يساوي عزم العطالة حول المحور المار بالمركز، مضافا إليه مساحة الشكل مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .

عزم العطالة للدائرة :

$$I_x = \frac{1}{4}.\pi.r^4$$

عزم العطالة للمستطيل :

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3$$

Circle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

Rectangle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

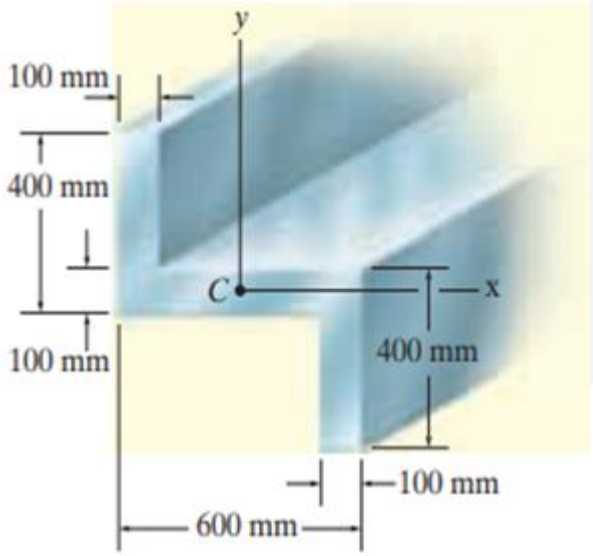
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

Summation. The moment of inertia for the area is therefore

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$

$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$

مسألة (2): احسب عزم العطالة للمقطع العرضي للمساحة حول المحورين x ,y المارين بالمركز.

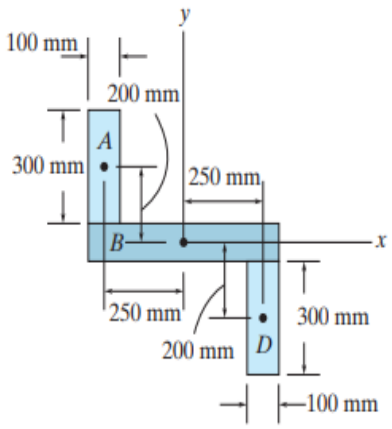


(a)

المساحة المركبة : يمكن تقسيم المساحة إلى ثلاثة مستطيلات A,B,C

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة للمستطيل حول محور يمر بمركز الثقل :

$$I_x = \frac{1}{12} . b . h^3$$



(b)

Fig. 10–9

Rectangles A and D

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

Rectangle B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

Summation. The moments of inertia for the entire cross section are thus

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

عزم عطالة الكتلة :

خاصية للجسم تقيس مقاومة الجسم للتسارع الزاوي ، تستخدم في علم الديناميك من أجل دراسة الحركة الدورانية .

نعرّف عزم القصور الذاتي للجسم حول محور Z

عن طريق العلاقة $I = \int_m r^2 \, dm$

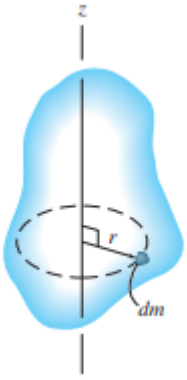
الواحدات: $kg.m^2$

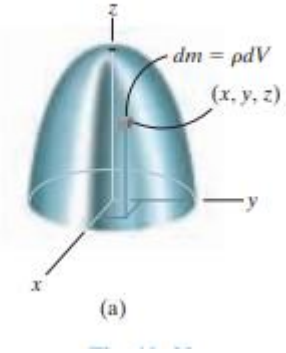
إذا كان الجسم الصلب يمتلك قيما مختلفة للكثافة عندها يمكن التعبير عن عنصر الكتلة وفق قيم الكثافة للحجم $dm = \rho dv$

$$I = \int_v r^2 \rho . dv$$

من أجل قيم ثابتة للكثافة :

$$I = \rho \int_v r^2 dv$$





نظرية المحاور المتوازية :

عندما يكون عزم القصور الذاتي لجسم حول محور يمر بمركز الكتلة معروفا ، عندها يمكننا حساب عزم القصور الذاتي للجسم حول أي محور آخر موازيا للمحور السابق .

عزم القصور الذاتي للكتلة حول محور يساوي عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل مضافا إليه الكتلة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين

$$I = I_G + md^2$$

- I_G - عزم العطالة حول محور Z يمر بالمركز G
- m - كتلة الجسم .
- d - المسافة بين المحورين المتوازين.

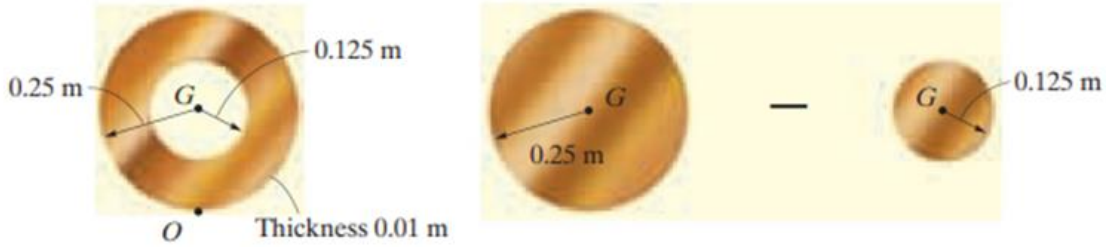
نصف قطر التدويم :

$$I = mk^2 \quad \text{or} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

الأجسام المركبة :

من أجل حساب عزم القصور الذاتي لجسم مؤلف من عدد من الأجسام البسيطة حول محور، نقوم بحساب الجمع الجبري لعزوم القصور لكل جزء حول نفس المحور.

مسألة (3): قرص مفرّغ كثافته $8000kg/m^3$ ، وسماكته 10mm، احسب عزم العطالة للكتلة حول محورعمودي على الصفحة ويمرّبالنقطة O .



(a) (b)

الحل : تتألف الصفيحة من جزأين : قرص بنصف قطر 250mm، مطروحا منه قرص بقطر 125mm يمكن حساب عزم العطالة للكتلة لكل جزء وجمع الناتج جبريا ، مع العلم أن عزم العطالة للقرص الدائري $I_G = \frac{1}{2} m.r^2$

القرص:

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\ \text{kg/m}^3\ [\pi(0.25\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 15.71\ \text{kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 + (15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 1.473\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

الثقب :

Hole. For the smaller disk (hole), we have

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3\,[\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.93\ \text{kg}$$

$$\begin{aligned}(I_O)_h &= \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(3.93\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.93\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 \\ &= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\end{aligned}$$

The moment of inertia of the plate about the pin is therefore

$$\begin{aligned}I_O &= (I_O)_d - (I_O)_h \\ &= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \\ &= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \textit{Ans.}\end{aligned}$$