



مقاومة المواد وحساب

الانشاءات 1

Sem. 2

2023-2024

أ.د. نايل محمد حسن



المحاضرة التاسعة

معادلات التوازن

EQUATIONS OF EQUILIBRIUM

<https://manara.edu.sy/>

معادلات التوازن

تحديد الشروط اللازمة والكافية لتوازن الجسم الصلب:

✓ يتعرض الجسم الصلب لنظام قوى خارجية ومزدوجات عزوم تنتج عن تأثيرات قوى: الجاذبية، الكهربائية، المغناطيسية

او التماسية التي تسببها المساند والاجسام المجاورة، الشكل a

(لايبين الشكل القوى الداخلية الناتجة عن التفاعل بين ذرات المادة)، لأن هذه القوى تحدث بشكل أزواج خطية متساوية ومتعاكسة وبالتالي تلغي بعضها البعض، وهي نتيجة لقانون نيوتن الثالث

✓ كنتيجة لما عرض سابقاً، يمكن تخفيض نظام القوى وعزوم المزدوجات إلى قوة محصلة وعزم محصل لأي نقطة O داخل او خارج الجسم

✓ إذا كانت كلتا المحصلتين مساوية للصفر، فإن الجسم يكون في حالة توازن، أي أن الجسم ساكن او في حالة سرعة ثابتة

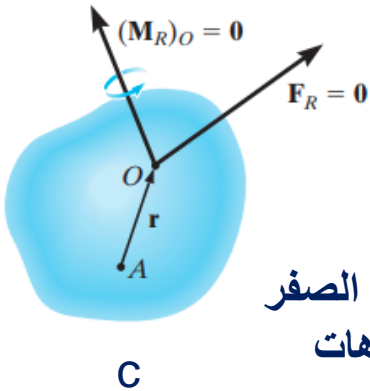
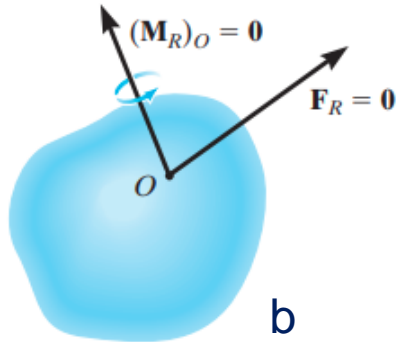
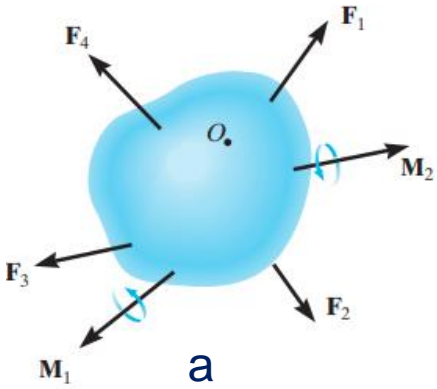
✓ يعبر عن توازن جسم رياضياً كما يلي:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

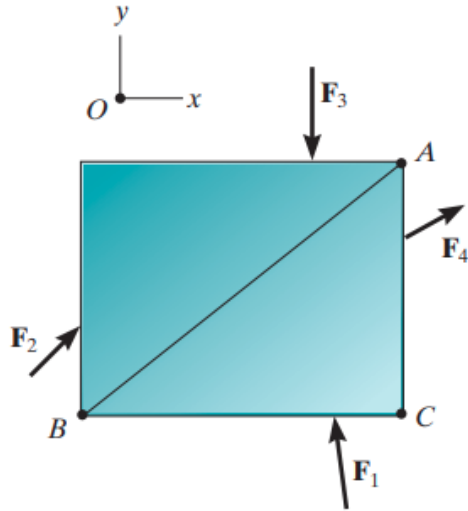
تعتبر المعادلات كافية ولازمة

- المعادلة الاولى تعبر عن مجموع كل القوى المؤثرة تساوي الصفر
- المعادلة الثانية تعني أن مجموع عزوم كل القوى والمزدوجات المؤثرة حول نقطة ما تساوي الصفر
- عند تطبيق معادلات التوازن نعتبر الجسم يبقى صلب وغير متشوه (في الواقع تكون التشوهات صغيرة ويمكن اهمالها)



شروط توازن الجسم الصلب

عندما يتعرض الجسم لمجموعة من القوى في المستوي x, y ، يمكن تحليل القوى الى مركباتها حسب x و y ، بالتالي تصبح شروط التوازن في المستوي هي:



$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0\end{aligned}$$

تمثل هنا:

المجموع الجبري لمركبات x و y لكل القوى المؤثرة على الجسم ΣF_x and ΣF_y
 المجموع الجبري لكل عزوم ومزدوجات العزوم بالنسبة لنقطة اعتبارية ΣM_O

شروط توازن الجسم الصلب

يمكن وضع مجموعتين اضافيتين من معادلات التوازن كما يلي:
المجموعة الاولى

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

عند استخدام هذه المجموعة يجب أن لا يكون الخط الواصل بين A و B
لايوازي المحور y
المجموعة الثانية

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\Sigma M_C = 0$$

عند استخدام هذه المجموعة يجب أن لا تكون النقاط A و B و C تقع على
مستقيم واحد

اجراءات التحليل

يمكن حل مسائل توازن الاجسام في المستوي كما يلي:

• رسم مخطط الجسم الحر

- ✓ ارسم جملة محاور احداثية x, y بأي اتجاه ترغب به
- ✓ أزل كل المساند وارسم الشكل الخارجي للجسم
- ✓ أوضح كل القوى والعزوم والمزدوجات المؤثرة على الجسم
- ✓ سمى كل القوى وحدد جهاتها وافرض جهات القيم المجهولة حسب المحاور x, y .
- ✓ حدد الابعاد الضرورية لاجراء الحسابات

• معادلات التوازن. Equations of Equilibrium.

- ✓ يفضل إن أمكن تطبيق معادلات العزوم حول نقطة ما بحيث يكون عزم المجاهيل الأخرى بالنسبة للنقطة معدوم بحيث يبقى مجهول وحيد يمكن حسابه مباشرة
- ✓ طبق معادلات الاسقاط حسب المحاور x, y للقوى مع الأخذ بالاعتبار جهات المحاور
- ✓ إذا تطابقت الاتجاهات المفروضة (لمركبات المساقط والعزوم) مع قيمها الموجبة للمجاهيل ، تكون الاتجاهات المفروضة صحيح والعكس صحيح

مثال 1

حدد المركبات الشاقولية والأفقية للمسند الثابت في B، والمسند المتحرك في A للجائز المبين في الشكل a. اهلل الوزن الذاتي.

الحل:

✓ مخطط الجسم الحر مبين في الشكل b

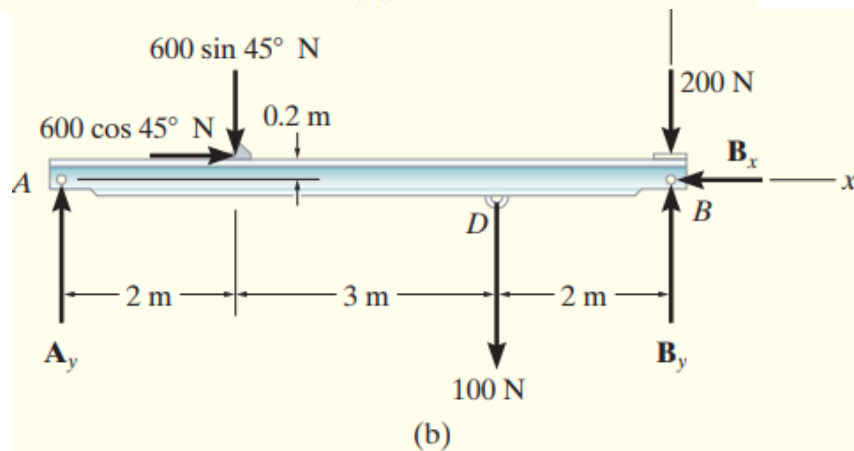
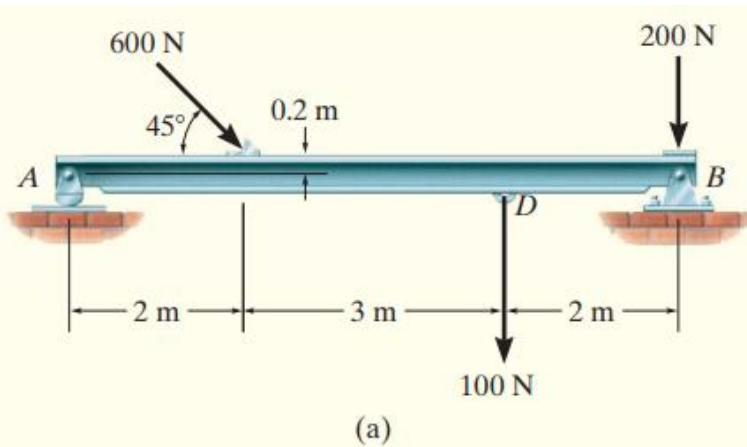
✓ 3 ردود افعال تؤثر على الجائز وهي مجهولة

معادلات التوازن:

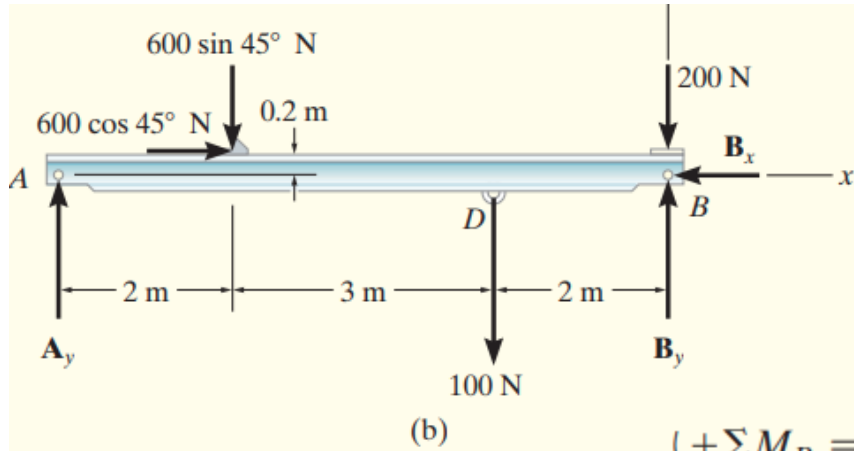
1- بتطبيق معادلة مجموع مساقط القوى

بالنسبة للمحور x تساوي الصفر:

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 600 \cos 45^\circ \text{ N} - B_x &= 0 \\ & & B_x &= 424 \text{ N} \end{aligned}$$



مثال 1



الحل:

معادلات التوازن:

2- بتطبيق معادلة عزوم حول B،

نحصل على رد الفعل الشاقول في A:

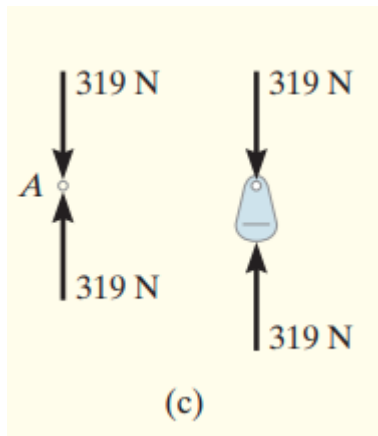
$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad 100 \text{ N} (2 \text{ m}) + (600 \sin 45^\circ \text{ N}) (5 \text{ m}) \\ - (600 \cos 45^\circ \text{ N}) (0.2 \text{ m}) - A_y (7 \text{ m}) = 0 \\ A_y = 319 \text{ N}$$

3- بتطبيق معادلة مجموع مساقط القوى بالنسبة للمحور y تساوي الصفر:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 319 \text{ N} - 600 \sin 45^\circ \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0$$

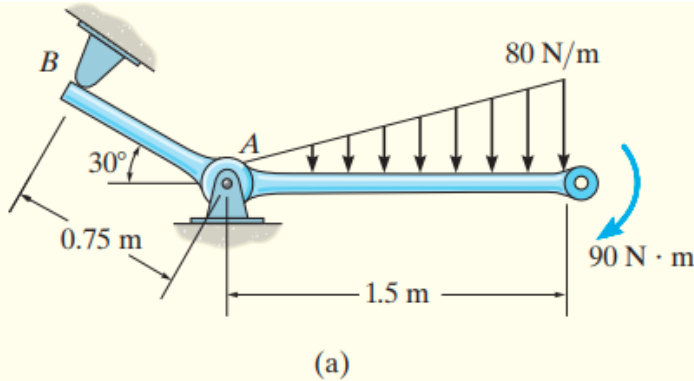
$$B_y = 405 \text{ N}$$

لاحظ أن ردود الأفعال في الشكل C تم إيجادها عند المساند
يبين الشكل C توازن القوى في المساند



مثال 2

حدد المركبات الشاقولية والأفقية لردود افعال المسند الثابت في A والمسند المتحرك في B للجائز المبين في الشكل a. اهلل الوزن الذاتي.



الحل:

✓ مخطط الجسم الحر مبين في الشكل b

✓ لاحظ تم استبدال القوة الموزعة المثلثية بمحصلتها

$$\text{وهي: } \frac{1}{2}(1.5 \text{ m})(80 \text{ N/m}) = 60 \text{ N.}$$

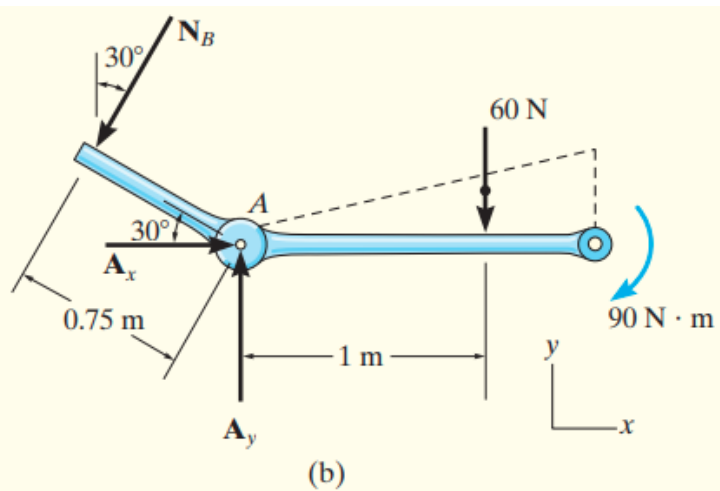
معادلات التوازن:

1- بتطبيق معادلة عزوم حول A،

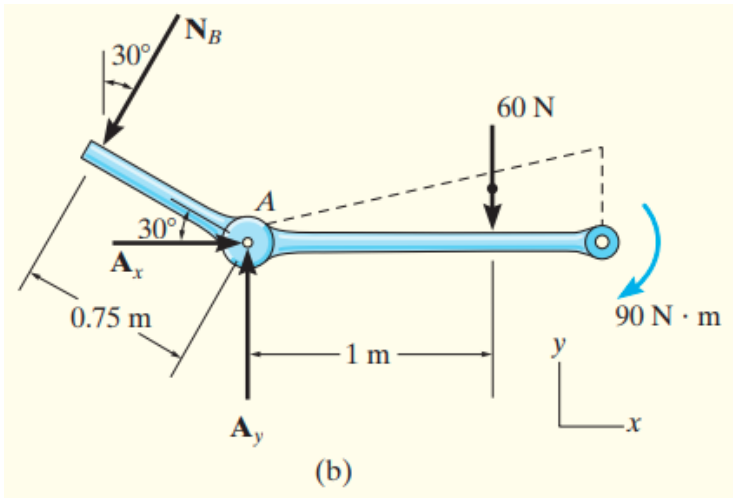
نحصل على رد الفعل في B:

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad -90 \text{ N} \cdot \text{m} - 60 \text{ N}(1 \text{ m}) + N_B(0.75 \text{ m}) = 0$$

$$N_B = 200 \text{ N}$$



مثال 2



الحل:

معادلات التوازن:

2- باستخدام القيمة السابقة وبالاسقاط بالنسبة للمحور

x نجد:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad & A_x - 200 \sin 30^\circ \text{ N} = 0 \\ & A_x = 100 \text{ N} \end{aligned}$$

3- بتطبيق معادلة مجموع مساقط القوى بالنسبة للمحور y تساوي الصفر نجد:

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad & A_y - 200 \cos 30^\circ \text{ N} - 60 \text{ N} = 0 \\ & A_y = 233 \text{ N} \end{aligned}$$

مثال 3

حدد المركبات الشاقولية والأفقية لردود افعال المساند A و B للعنصر المبين في الشكل a. اهل الوزن الذاتي.

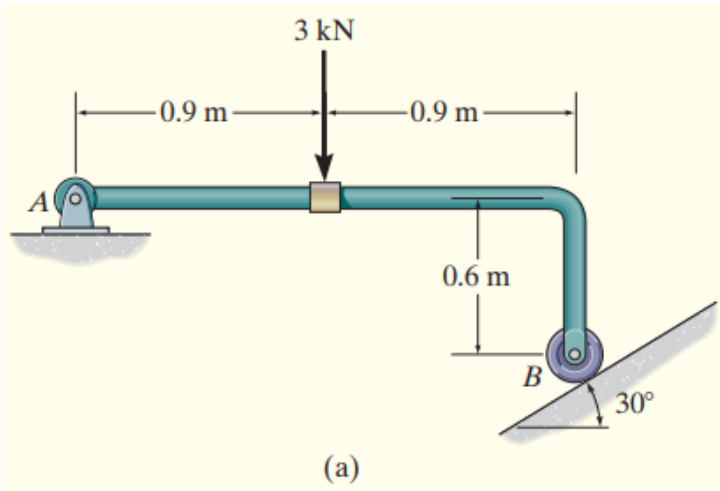
الحل:

✓ مخطط الجسم الحر مبين في الشكل b

معادلات التوازن:

1- بتطبيق معادلة عزوم حول A،

نحصل على رد الفعل في B:

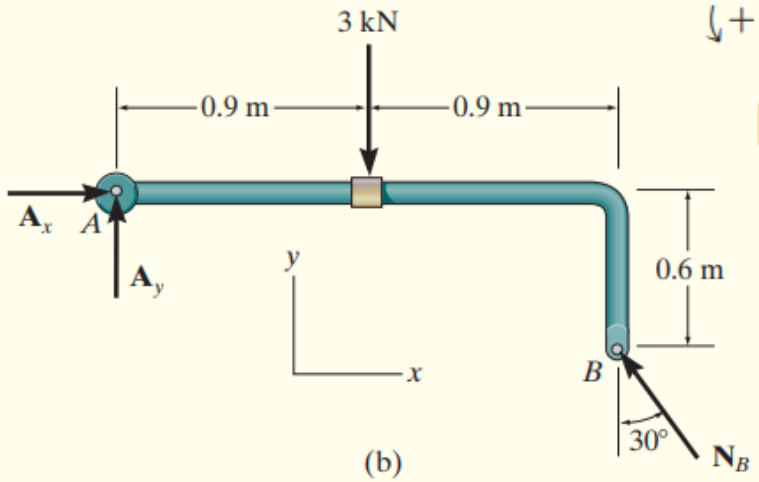


(a)

$$\downarrow + \sum M_A = 0;$$

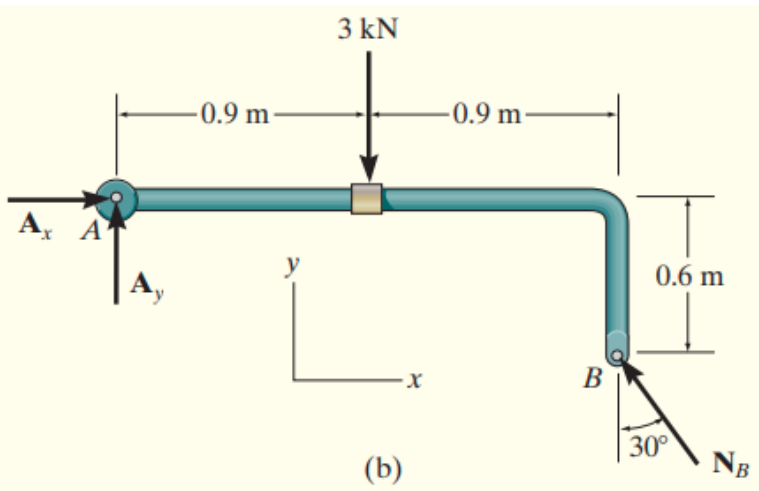
$$[N_B \cos 30^\circ](1.8 \text{ m}) - [N_B \sin 30^\circ](0.6 \text{ m}) - 3 \text{ kN}(0.9 \text{ m}) = 0$$

$$N_B = 2.1448 \text{ kN} = 2.14 \text{ kN}$$



(b)

مثال 3



الحل:

معادلات التوازن:

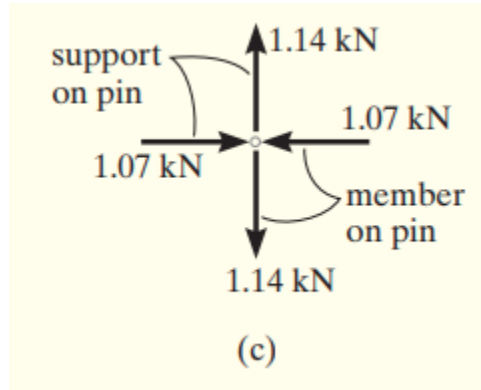
2- باستخدام القيمة السابقة وبالاسقاط بالنسبة للمحور

x نجد:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - (2.1448 \text{ kN}) \sin 30^\circ &= 0 \\ A_x &= 1.07 \text{ kN} \end{aligned}$$

3- بتطبيق معادلة مجموع مساقط القوى بالنسبة للمحور y تساوي الصفر نجد:

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + (2.1448 \text{ kN}) \cos 30^\circ - 3 \text{ kN} &= 0 \\ A_y &= 1.14 \text{ kN} \end{aligned}$$



لاحظ أن ردود الافعال في الشكل c تم ايجادها عند المساند
يبين الشكل c توازن القوى في المسند A