جامعة المنارة

قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

الدارات الكهربائية

الدكتور المهندس

علاء الدين أحمد حسام الدين

10

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تطبيقات تحويل لابلاس في تحليل الدارات الكهربائية

Application of Laplace Transform in Circuit Analysis

تعريف تحويل لابلاس:

هو عملية يتم إجراؤها على الداول الرياضية لتحويلها من مجال إلى آخر، وعادة يكون التحويل من مجال الزمن إلى المجال الترددي، ويُستخدم لحل المعادلات التفاضلية كونه يحولها إلى معادلات جبرية. يسمى هذا التحويل بتحويل لابلاس نسبة للعالم الفرنسي سيمون لابلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر.

التعريف الرياضي:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

نفرض أن f دالة معرفة لـ $t \geq 0$ فإن تحويل لابلاس لها هو:

حيث s يمثل عامل لابلاس، وهو عدد عقدي

$$s = \sigma + j\omega$$

The Laplace transform is an integral transformation of a function $f(t)$ from the time domain into the complex frequency domain, giving $F(s)$.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تحويل لابلاس لبعض الدوال الأساسية:

1) $L\{1\} = \frac{1}{S}$

2) $L\{t^n\} = \frac{n!}{S^{n+1}}$; n = 1,2,3, … … ..

3) $L\{e^a\} = \frac{1}{S-a}$

4) $L\{sin(kt)\} = \frac{K}{S^2 + K^2}$

5) $L\{cos\ (kt)\} = \frac{S}{S^2 - K^2}$

6) $L\{sinh\ (kt)\} = \frac{S}{S^2 - K^2}$

7) $L\{cosh(kt)\} = \frac{S}{S^2 - K^2}$

يحول المؤثر $\mathcal{L}[f(t)]$ الدالة $f(t)$ بدلالة الزمن إلى دالة $F(s)$ بدلالة التردد المركب أو ببساطة بدلالة s، وبالتالي فإن الدالتين $f(t)$ و $F(s)$ يكونان زوجاً من البدائل أو المتحولات. ويوجد جداول تحتوي هذه الأزواج، والمتحولات المبينة في الجدول جانباً كافية للغرض المطلوب.

الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس هو أن الدالة $f(t)$ يجب أن تكون:

أ- قطعة متصلة، ب- ذات رتبة أسية.

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
$a \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s} \qquad s > 0$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$at \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{2}t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \qquad s > a$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2} \qquad s > \lvert\omega\rvert$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2} \qquad s > \lvert\omega\rvert$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{a^2}[1-e^{-at}(1+at)]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n = 1,2,3..$	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad s > a$	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \qquad s > a$	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad s > 0$	$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s}F(s)$
$g(t) \cdot p(t)$	$G(s) \cdot P(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$	$\delta(t)$ *unit impulse*	$1 \qquad$ *all s*
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	$\frac{d^2f}{df^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

تكون الدالة f(t) ذات رتبة أسية إذا كان $|f(t)| < a \cdot e^{\alpha t}0$ لجميع قيم $t>t_0$ حيث كل من a و t_0 ثوابت موجبة.

عندما تتحقق الشروط المذكورة فإن تكامل التحويل المباشريكون متقارباً لجميع قيم $\delta > \alpha$ وتكون F(s) موجودة. وجميع الدوال المستخدمة في تحليل الدارات الكهربائية تحقق الشرطين السابقين.

تحويل لابلاس العكسي:

إذا كانت $F(s)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث $L\{f(t)\} = F(s)$ إذن يمكن القول

بأن $f(t)$ هو تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ ويكتب $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

فيما يلي بعض تحويلات لابلاس العكسية لبعض الدوال المعروفه :

$$a)\ L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$$

$$b) L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]=t^{n}\ , n=1,2,3,\ldots.$$

$$c)\ L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

$$d)\ L^{-1}\left[\frac{k}{s^{2}+a^{2}}\right]=\sin kt$$

$$e)\ L^{-1}\left[\frac{s}{s^{2}+k^{2}}\right]=\cos kt$$

$$f)\ L^{-1}\left[\frac{k}{s^{2}\_k^{2}}\right]=\sinh kt$$

كيف تتم الدراسة باستخدام متحول لابلاس:

1. نكتب أولاً معادلات النظام المدروس (هنا الدارة الكهربائية) بدلالة متحول لابلاس، بتطبيق تحويل لابلاس المباشر.
2. نقوم بإيجاد حل المعادلات، في مجال لابلاس بسهولة اكثر من المجال الزمني باستخدام نظريات حل الدارة (عقد، حلقات....).
3. وأخيراً لإيجاد الحل الزمني للدارة نقوم بتطبيق تحويل لابلاس العكسي.

نماذج عناصر الدارة Circuit element models:

تمثيل المقاومة: تعطى علاقة الجهد بالتيار للمقاومة في المجال الزمني:

$$v(t)=R.i(t)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على العلاقة نجد:

$$V(s)=R.I(s)$$

تمثيل الوشيعة: تعطى علاقة الجهد في المجال الزمني:

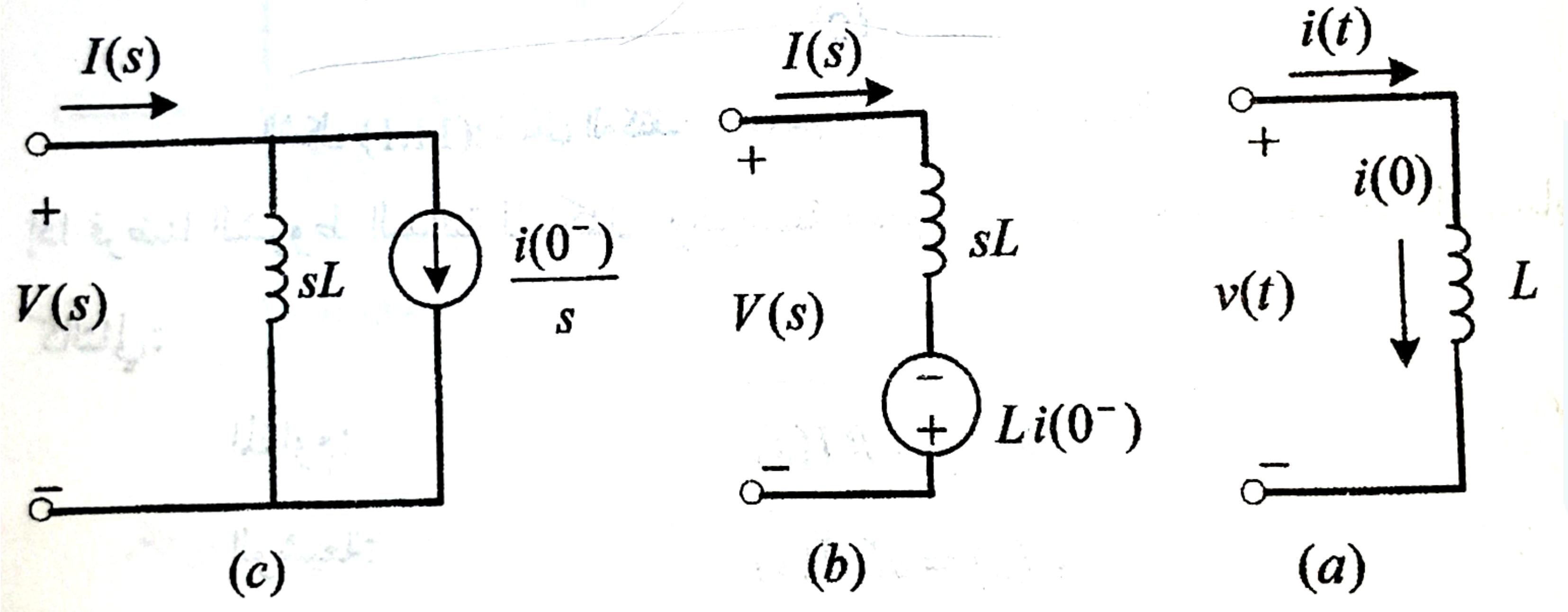
$$v(t)=L.(d\,i(t)/dt)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على العلاقة نجد:

$$V(s)=L[s.I(s)-i(0^-)]=s.L.I(s)-L.i(0^-)$$

تصبح علاقة I(s):

$$I(s)=[(1/s.L)V(s)]+[i(0^-)/s]$$



تمثيل الوشيعة (a) مجال الزمن (b,c) مجال لابلاس

تمثيل المكثف: تعطى علاقة الجهد بالتيارفي المجال الزمني:

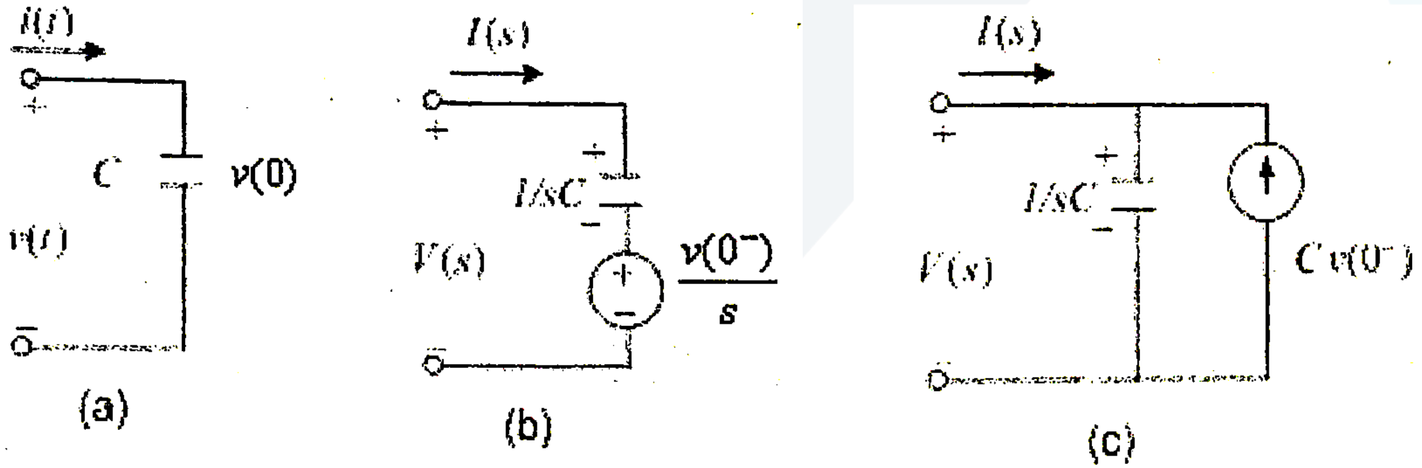
$$i(t)=C.(d\,v(t)/dt)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على العلاقة نجد:

$$I(s)=C[s.V(s)-v(0^-)]=s.C.V(s)-C.v(0^-)$$

تصبح علاقة V(s):

$$V(s)=[(1/s.C)I(s)]+[v(0^-)/s]$$



تمثيل المكثف (a) مجال الزمن (b,c) مجال لابلاس

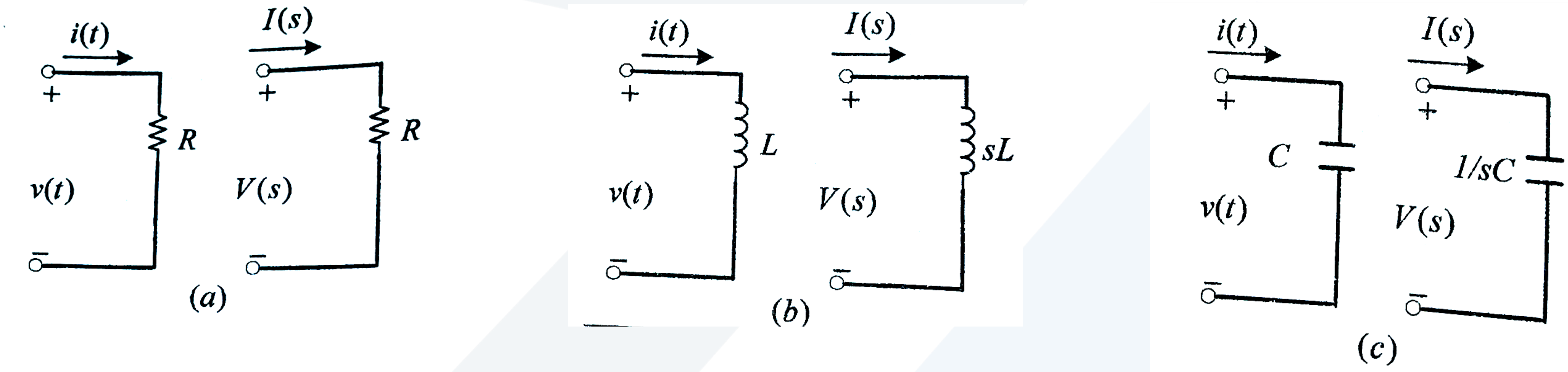
إذا فرضنا الشروط الابتدائية للمكثف والوشيعة معدومة، تصبح العلاقات السابقة كما يلي:

المقاومة : $V(s)=R.I(s)$

الوشيعة : $V(s)=s.L.I(s)$

المكثف : $V(s)=(1/s.C)I(s)$

ويبين الشكل التالي الدارات المكافئة لهذه العناصر بشروط ابتدائية معدومة.



i(t)
v(t)
R
I(s)
V(s)
R
(a)
i(t)
v(t)
L
I(s)
V(s)
sL
(b)
i(t)
v(t)
C
I(s)
V(s)
1/sC
(c)

نعرف الممانعة والسماحية في مجال لابلاس Z(s) بالعلاقات:

$$Z(s) = V(s)/I(s) \quad , \quad Y(s)=1/Z(s)$$

V(s)- تابع الجهد مكتوباً بدلالة لابلاس.

I(s) - تابع التيارمكتوباً بدلالة لابلاس.

وبالتالي نجد تمثيل العناصركما يلي:

Resister: $Z(s)=R$

Inductor: $Z(s)=s.L$

Capacitor: $Z(s)=1/s.C$

توابع النقل Transfer functions

يعد تابع النقل المفتاح في معالجة الإشارة، إذ يشير إلى كيفية سلوك الإشارة عبر الدارة. نعرف تابع النقل H(s) بنسبة استجابة الخرج (Output response) Y(s) إلى إشارة الدخل (Input excitation) X(s) مع شروط ابتدائية معدومة:

$$H(s)=Y(s)/X(s)$$

من أجل دارة كهربائية ما توجد أربعة احتمالات لتابع النقل:

ربح الجهد $H(s)=\text{voltage gain} = V_0(s)/V_i(s)$

ربح التيار $H(s)=\text{current gain} = I_0(s)/I_i(s)$

الممانعة $H(s)=\text{Impedance}= V(s)/I(s)$

السماحية $H(s)=\text{Admittance}= I(s)/ V(s)$

ولمعرفة التابع الزمني لتابع النقل H(t) يكفي تطبيق تحويل لابلاس العكسي:

$$h(t) = L^{-1}[H(t)]$$

حدد تابع النقل $H(s)= V_0(s)/I_0(s)$ للدارة المبينة بالشكل