الميكانيك الهندسي (ديناميك)-المحاضرة الحادية عشرة

د. نزار عبد الرحمن

ينقسم علم الميكانيك الهندسي إلى قسمين : علم السكون (statics) الذي يهتم بدراسة القوى المؤثرة على الأجسام ووضع شروط توازن الأجسام تحت تأثير القوى والعزوم الخارجية . وعلم الديناميك (Dynamics) الذي يتضمن علم الحركة وعلم التحريك .

علم الحركة : يهتم بدراسة حركة الأجسام بدون الأخذ الاعتبار تأثير القوى المسببة للحركة .

علم التحريك : يهتم بدراسة حركة الأجسام مع الأخذ بعين الاعتبار القوى والعزوم المسببة لهذه الحركات .

مفاهيم أساسية :

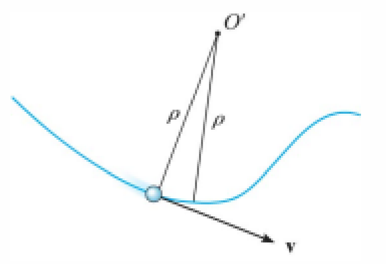
النقطة المادية : عبارة عن جسم ذو ابعاد صغيرة وكتلة صغيرة بحيث يمكن إهمالها .

الحركة : عبارة عن تغير موقع الجسم في الفراغ بمرور الزمن ، وذلك بالنسبة للأجسام الأخرى .

المسار: هو الخط المستمر الذي ترسمه النقطة المادية أثناء حركتها في الفراغ .

إذا كان المسار خطا مستقيما ، فإن الحركة تدعى بالحركة المستقيمة ، أما إذا كان المسار منحنيا فإن الحركة تدعى بالحركة المنحنية .

شعاع السرعة : هو شعاع مماس للمسار في اللحظة الزمنية المعتبرة ، ويساوي مشتق شعاع الموضع ، أي الشعاع الممتد من مبدأ جملة المحاور الإحداثية حتى موقع النقطة المادية في اللحظة الزمنية المعتبرة



Velocity
(c)

شعاع التسارع : يعبّر عن التغير الحاصل في مقدار و اتجاه شعاع السرعة بالنسبة للزمن ، ويتجه من ناحية تقعّر المسار، ورياضيا يعني أن شعاع التسارع يمثّل المشتق الأول لشعاع السرعة ، وبالتالي المشتق الثاني لشعاع الموضع .

a. تحديد شعاع السرعة بالطريقة الطبيعية :

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون مسار الحركة معلوما .

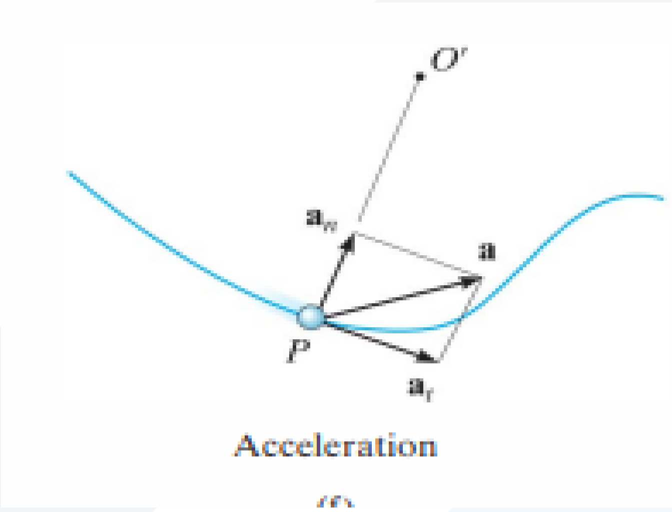
$$V = \frac{ds}{dt}.\tau \qquad V = \frac{ds}{dt} \quad ,$$

τ– شعاع الواحدة .

S- بعد النقطة المادية في اللحظة الزمنية المعتبرة .

b-تحديد شعاع التسارع بالطريقة الطبيعية :

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون مسار الحركة معلوما (مسار مستقيم أو مسار منحني) . في هذه الحالة نحلّل شعاع التسارع إلى مركبتين الأولى مماسية والثانية ناظمية على المماس .



$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

$\boldsymbol{a}_t$ - التسارع المماسي

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt} . \boldsymbol{\tau}$$

$\boldsymbol{a}_n$- التسارع الناظمي

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} . n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

ρ - نصف قطر التقوس (الانحناء)

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

أما الزاوية التي يصنعها شعاع التسارع مع الناظم على المماس فتحسب عن طريق العلاقة :

$$tg\mu = \frac{a_t}{a_n}$$

τ – شعاع الواحدة لمماس المسار.

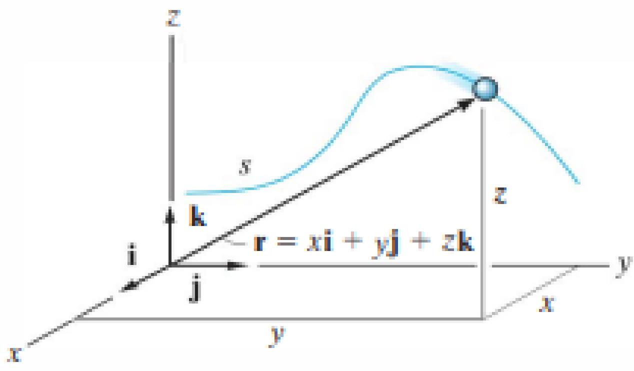
n - شعاع الواحدة الناظمي على مماس المسار.

إذا كان المسار معطى كتابع $y=f(x)$ ، عندئذ يتم تحديد نصف قطر التقوس باستخدام العلاقة :

c- تحديد شعاع السرعة بطريقة الاحداثيات :

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون المسار غير معلوم في حين تكون احداثيات النقطة المادية معلومة متابع للزمن .

نقوم بتحليل شعاع السرعة إلى ثلاث مركبات متعامدة وفقا لقاعدة متوازي المستطيلات :

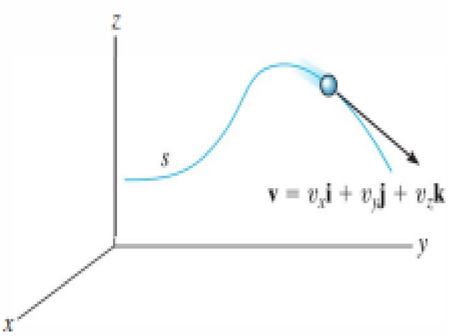


Position

$$\boxed{\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}}$$

$$\boxed{v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}}$$



Velocity

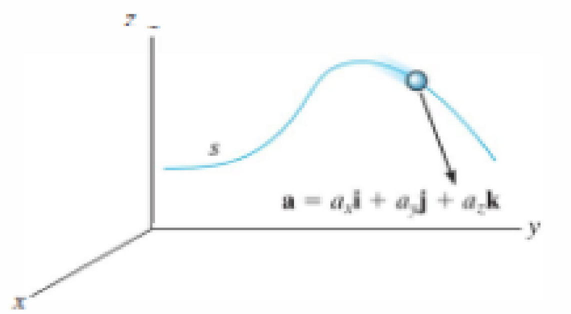
(b)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

d- تحديد شعاع التسارع بطريقة الاحداثيات :

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون المسار غير معلوم ، في حين تكون احداثيات النقطة المادية معلومة كتابع للزمن .

نحلل شعاع التسارع إلى ثلاث مركبات متعامدة وفق قاعدة متوازي الأضلاع :



Acceleration
(c)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

الحركة الخطية للنقطة المادية :

بفرض لدينا نقطة مادية تتحرك على خط مستقيم ، وبفرض أنه في اللحظة الزمنية to=0 كانت النقطة المادية في الموضع mo ، تبعد عن نقطة المبدأ مسافة so، سرعة النقطة المادية vo,.

في اللحظة الزمنية t تصبح النقطة المادية في الموضع m وبسرعة مقدارها v،

تبعد عن نقطة المبدأ بمقدار s ، ويكون شعاع التسارع في هذه اللحظة منطبقا على المسار في أية لحظة زمنية .

يتم تحديد السرعة والتسارع وفق العلاقتين التاليتين :

السرعة : $V = \frac{ds}{dt}$

التسارع :

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a}_t^2 + \boldsymbol{a}_n^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$$

$$a = a_t = \frac{dv}{dt}$$

تكون الحركة الخطية منتظمة عندما تكون السرعة ثابتة ، ويكون التسارع معدوماَ .

تكون الحركة الخطية متغيرة بانتظام عندما تتغير السرعة بانتظام ، فإذا كانت السرعة متزايدة بانتظام كان التسارع ثابت وموجب ، تدعى الحركة بالحركة المتسارعة بانتظام .

- أما إذا كانت الحركة متناقصة بانتظام فأن التسارع يكون ثابت وسالب ، وتدعى هذه الحركة بالحركة المتباطئة بانتظام .

يكون لشعاعي السرعة والتسارع نفس الاتجاه في حالة الحركة المتسارعة بانتظام ، بينما يكون لشعاعي السعة والتسارع اتجاهين مختلفين في حالة الحركة المتباطئة بانتظام .

- في حالة كون السرعة أو التسرع معطاة بعلاقات رياضية ثابتة للبارمترات المميزة للحركة (مسافة ،زمن ، سرعة) ، فإننا نحصل على ما يسمى الحركة الخطية المتغيرة بصورة غير منتظمة ، وفي هذه الحالة تحلّ المسألة باستخدام العلاقات التفاضلية العامة للسرعة والتسارع (نفاضل أو نكامل حسب المعطيات والمطلوب) .

بالاعتماد على قيمة التسارع تقسم حالات المسائل كما يلي :

أولا : حالة التسارع ثابت , في هذه الحالة نطبق قوانين نيوتن التالية :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \\ \text{Constant Acceleration} \end{array}} \qquad 1$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\, dt$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} v = v_0 + a_c t \\ \text{Constant Acceleration} \end{array}} \qquad 2$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_c\,ds$$

(ث) $$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)}$$ Constant Acceleration

3

ثانيا : حالة التسارع متغير، لدينا الحالات التالية :

A- التسارع تابع للزمن ، أو الازاحة تابعة للزمن ، أو السرعة تابعة للزمن :

نحل المسائل بالاشتقاق أو بالتكامل حسب المطلوب مع تذكير بأن التسارع هو مشتق السرعة ، والسرعة مشتق الازاحة ، وكذلك تكامل التسارع يعطي التغير في السرعة ، وتكامل السرعة يعطي التغير في الإزاحة .

B- التسارع تابع للازاحة :

نطبّق المعادلة

$$\boldsymbol{A.dS = V.dV}$$

ثم نعوض عن قيمة التسارع في المعادلة السابقة ونضع حدود التكامل ونفصل المتغيرات .

C- التسارع تابع للسرعة :

نطبق المعادلة :

$$a = \frac{dV}{dt}$$

D- السرعة تابع للازاحة :

نطبق المعادلة

$$V = \frac{dS}{dt}$$

مسألة (1): يعطى موقع جسيم وفق خط مستقيم بالعلاقة

$$s = (t^3 - 9t^2 + 15t)m$$

حيث t عبارة عن الزمن مقدرا بالثانية . احسب موقع الجسيم في اللحظة الزمنية t=6sec، واحسب السرعة والتسارع .

الحل :

$$s = (t^3 - 9t^2 + 15t)m$$

$$s = (6)^3 - 9(6)^2 + 15(6) = -18m$$

السرعة :

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 9t^2 + 15t)$$

$$V = 3t^2 - 18t + 15$$

$$V = 3(6)^2 - 18(6) + 15$$

$$V = 15m/s$$

التسارع :

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(3t^2-18t+15)$$

$$a=6t-18$$

$$=6(6)-18=18m/s^2$$

مسألة (2) : تنطلق سيارة من السكون(عند t=0 . s=0)وفق خط مستقيم ، وفي لحظة قصيرة كانت سرعتها معطاة بالعلاقة

$$\boldsymbol{v=(3t^2+2t)m/s}$$

احسب موقع السيارة وتسارعها عند اللحظة الزمنية t=3sec.

الحل :

الموقع : تكتب العلاقة التي تربط v ,s ,t. وعند t =0 يكون s = 0

$(\overset{+}{\rightarrow})$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

When $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ ft}$$

التسارع : نكتب العلاقة التي تربط a.v.t

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}(3t^2 + 2t)$$
$$= 6t + 2$$

من أجل t=3s

$$a = 6(3) + 2 = 20m/s^2$$

مسألة (3):

يعطى الموقع الأفقي للبالون المبين في الشكل بالعلاقة : x= 8t ، حيث t الزمن

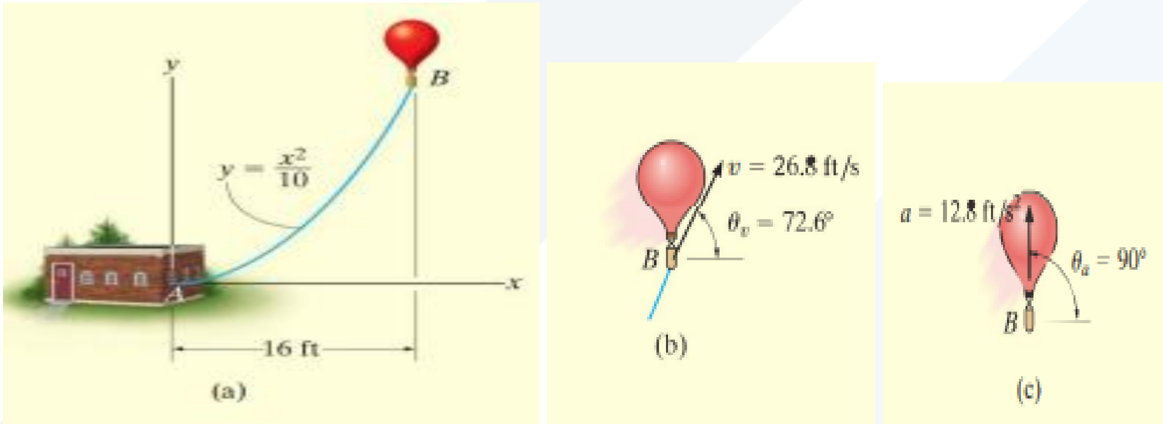
فإذا كانت معادلة المسارهي العلاقة من الشكل : $y = \frac{x^2}{10}$

أوجد في اللحظة الزمنية t =2s ما يلي :

1- بعد البالون عن المحطة .

2-مقدارومنحى شعاع السرعة .

3- مقدارومنحى شعاع التسارع .



الحل :

1- بعد البالون عن المحطة :

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

X=8t=8(2)=16m

$$y = \frac{x^2}{10} = \frac{(16)^2}{10} = 25.6m$$

$$AB = \sqrt{(16)^2 + (25.6)^2} = 30\,m$$

2- بما أن احداثيات البالون معلومة فإنه من الممكن استخدام طريقة الاحداثيات لحساب مقدارومنحى شعاع السرعة :

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$= 8m/s$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{10}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{(8.t)^2}{10}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(6.4t^2)$$

$$V_y = 2(9.4)(t) = 2(6.4)(2) = 25.6m/s^2$$

$=26.8$ m$/s$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8^2 + 25.6^2}$

$$cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{8}{26.8} \Rightarrow \alpha = 22.6$$

3- مقدارومنحى شعاع التسارع:

$$a_x = \frac{dvx}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dvy}{dt} = \frac{d}{dt}\ 2 * 6.4t$$

$$a_y = 2 * 6.4 = 12.8\text{m/s}^2$$

$$cos\alpha = \frac{a_x}{a} = 0, \Rightarrow \alpha = 90$$

الحركة النسبية – الحركة المطلقة المستقلة :

بفرض Aو Bنقطتان ماديتان تتحركان على امتداد نفس الخط المستقيم .

يحدد موضع النقطتين بالنسبة لنقطة المبدأ 0 بدلالة الاحداثيات XA و XB،

حيث يسميان بالموضعين المطلقين للنقطتين الماديتين .

يحدد موضع النقطة المادية Bبالنسبة للنقطة المادية Aالمتحركة بدلالة

الاحداثية XB/A الذي يسمى الموضع النسبي للنقطة المادية B بالنسبة للنقطة

.A

تحدد العلاقة بين هذه المو اقع كما يلي :

$$x_B = x_A + x_{B/A} (1)$$

بالاشتقاق :

$$v_B = v_A + v_{B/A} (2)$$

بالاشتقاق مرة ثانية :

$$a_B = a_A + a_{B/A} (3)$$

من المعادلات السابقة ينتج أن سرعة النقطة المادية Bالمقاسة بالنسبة للنقطة

المادية A ($v_{B/A}$) تمثل الفرق في السرعات المطلقة لكل من النقطتين Aو B.

وبصورة مماثلة يمثل التسارع ($a_{B/A}$).

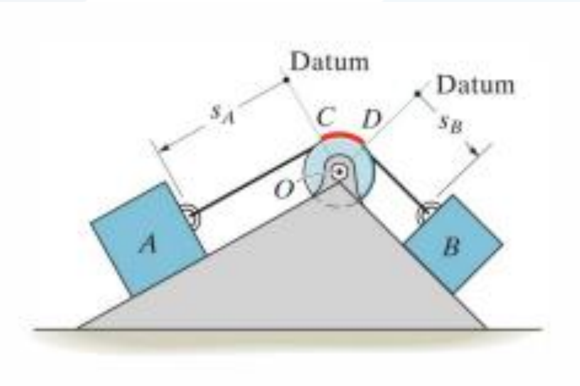
2 – الحركة المطلقة المقيّدة :

قد تكون النقطتان الماديتان غير قادرتين على التحرك بشكل مستقل ، إذ تعتمد حركة إحدى النقطتين على حركة النقطة الأخرى بشكل ما .

يتم تقييد حركة النقاط المادية عادة عند الاتصال مع بعضهما البعض بواسطة حبال أو كابلات أو قضبان صلبة ، وعلى الرغم من أن كلتا النقطتين تتحركان بحركة مستقيمة ،لكنها ليست بالضرورة على نفس الخط المستقيم ، وينبغي تحديد الميزات الحركية لكلتا النقطتين بالنسبة لنقط المبدأ الثابتة مع تحديد اتجاه موجب لكل نقطة مادية بشكل مستقل .

يتم تشكيل المعادلة المقيدة الخاصة باحداثيات الموضع للنقطة المادية المستقلة ، ثم نشتق هذه المعادلة للحصول على علاقات تربط السرعات والتسارعات المطلقة للنقاط المادية .

إذا كان الطول الكلي للحبل LT يمكننا كتابة معادلة احداثيات الموضع :



$$x_A = L_{CD} + x_B = L_T$$

الطول L_{CD} ثابت

الطول الكلي L_T يبقى ثابت .

بالاشتقاق :

$$\frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt} = 0$$

$$v_B = -v_A$$

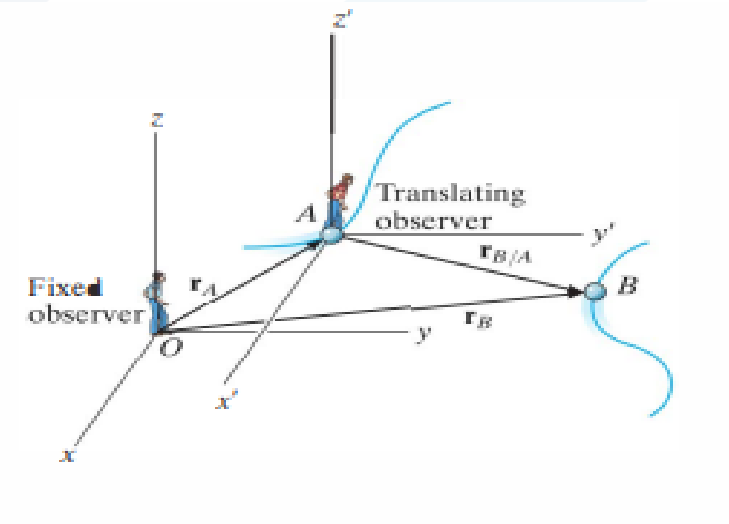
$$a_B = -a_A$$

3- الحركة النسبية لجسيمين باستخدام المحاور الانسحابية :

لدينا جسيمين يتحركان بشكل عشوائي على مسارين منفصلين .

يقاس الموضع المطلق لكل جسيم r_A و r_B من المبدأ المشترك 0 لمحاور الاحداثيات الثابتة x.y.z.

لدينا نظام احداثيات آخر x`,y`,z` ملحق بالجسم ويتحرك بحركة انسحابية فقط بالنسبة لنظام الاحداثيات الثابت .



يعطى الموقع النسبي للجسيم B بالنسبة للجسيم A عن طريق شعاع الموقع $r_{B/A}$

$$r_B = r_A + r_{B/A} \quad (4)$$

بالاشتقاق نحصل على السرعة :

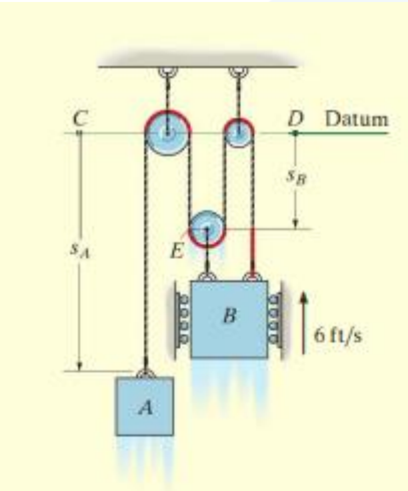
$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (5)$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على تسارع النقطة المادية B :

$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (6)$$

تمثل السرعتين v_A وv_B سرعات مطلقة للنقطتين A و B بينما تمثل السرعة $v_{B/A}$ السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A. وبنفس المفهوم بالنسبة للتسارع .

مسألة (1) : احسب سرعة الصندوق A إذا كانت سرعة الصندوق B 6m/s نحو الأسفل .



الحل : لدينا كبل واحد يلتف على ثلاث بكرات ، تستخدم الاحداثيات SA و SB من نقطة المبدأ C أو D . الأطوال باللون الأحمر هي أطوال ثابتة ولا تدخل في الحسابات .وكذلك الطول النهائي للكبل L يبقى ثابتا ،وتتغير الأبعاد SA وSB

$$S_A + 3S_B = L$$

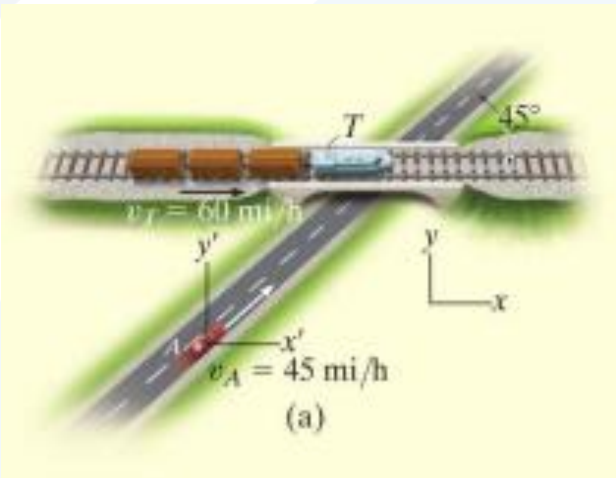
باشتقاق المعادلة السابقة :

$$V_A + 3V_B = 0$$

ينتج أن من أجل : $V_B = 6m/s$

نحو الأسفل $V_A = -18m/s$

مسألة (2) : يتحرك قطار بسرعة 60mi/h ، يعبر فوق طريق سريع حيث تعبر سيارة بسرعة 45mi/h، احسب قيمة ومنحى سرعة القطار بالنسبة للسيارة .



الحل الأول : الطريقة الشعاعية

سرعة القطار بالنسبة للسيارة مقاسة من المحاور الانسحابية

`x`,y`المتصلة بالسيارة من العلاقة :

$$V_T = V_A + V_{TA}$$

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

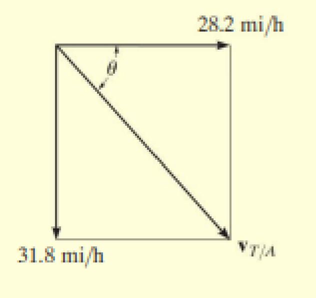
$$60\mathbf{i} = (45\cos 45^\circ\mathbf{i} + 45\sin 45^\circ\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\}\ \text{mi/h} \qquad \textit{Ans.}$$

The magnitude of $\mathbf{v}_{T/A}$ is thus

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5\ \text{mi/h} \qquad \textit{Ans.}$$

منحى شعاع السرعة :



(b)

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5^\circ \;\measuredangle$$

الحل الثاني : الطريقة العددية

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60\ \text{mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45\ \text{mi/h} \\ \measuredangle^{45^\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

عن طريق تحليل كل شعاع وفق المحورين X,Y:

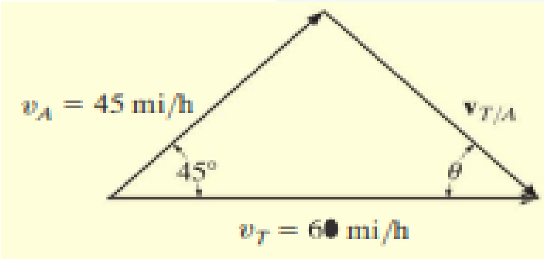
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 60 = 45\cos 45^\circ + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = 45\sin 45^\circ + 0 + (v_{T/A})_y$$

بحل المعادلتين :

$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow$$



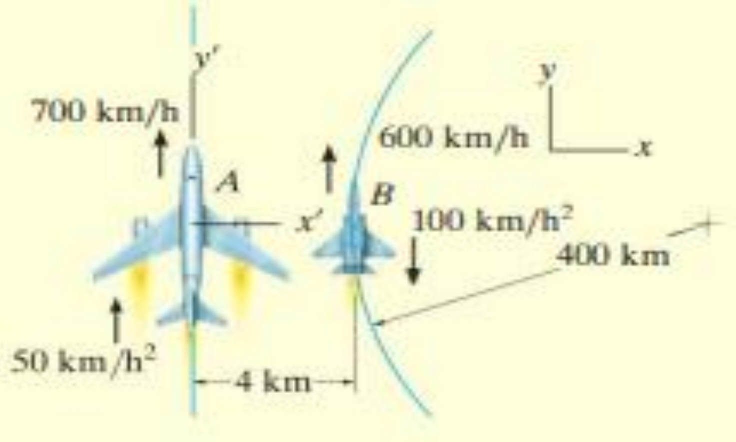
(c)

مسألة (3) : تتحرك الطائرة A وفق خط مستقيم ، بينما تتحرك الطائرة B وفق مسار دائري بنصف قطر الانحناء مقداره ρB=400Km .

احسب سرعة وتسارع الطائرة B مقاسة من طيار الطائرة A.

الحل :

السرعة : نختار نظام احداثيات x-y في نقطة اختيارية ، نفرض نظام للاحداثيات x`,y` متصل بالطائرة A .



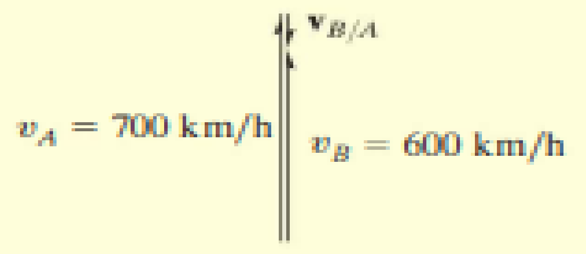
(a)

نطبق الشكل العددي للسرعة النسبية لكلتا الطائرتين ، لدينا :

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$600\ \text{km/h} = 700\ \text{km/h} + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = -100\ \text{km/h} = 100\ \text{km/h} \downarrow$$



(b)

التسارع : تمتلك الطائرة B مركبتين للتسارع : تسارع مماسي، وتسارع ناظمي.

حيث أنها تسيروفق مسارمنحني .

المركبة الناظمية للتسارع :

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600\ \text{km/h})^2}{400\ \text{km}} = 900\ \text{km/h}^2$$

نطبق علاقة التسارع النسبي لدينا :

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

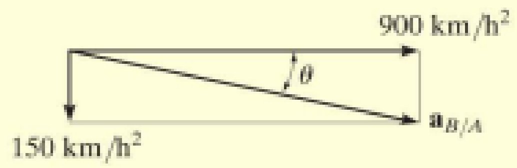
$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

Thus,

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$

من الشكل C نحسب قيمة التسارع :

$$a_{B/A} = 912\ \text{km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46^\circ$$



(c)

تحريك النقطة المادية

معادلة الحركة للنقطة المادية :

يعرّف علم التحريك بأنه جزء من علم الميكانيك الهندسي الذي يهتم بدراسة العلاقة بين القوى المؤثرة على الأجسام والحركة الناشئة بفعل هذه القوى ، أي دراسة حركة النقطة المادية مع الأخذ بعين الاعتبار القوى التي تسببت في نشوء الحركة .

القوة : هي مقياس التأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام المادية ، والقوى عبارة عن مقدار شعاعي له : شدة ومنحى و اتجاه ونقطة تأثير وحامل .

تكون الأجسام المتحركة خاضعة لنوعين من القوى ، وهي القوى الثابتة والقوى المتغيرة كتابع للزمن، أو لموضع الجسم ،أو كتابع للسرعة .

القصور الذاتي (العطالة) : يعبّر هذا المفهوم عن مقاومة أو ممانعة الجسم للتغير في السرعة ، زيادة أو نقصان ، تحت تأثير القوى لمطبقة وتعتمد درجة القصور الذاتي للجسم على مقدار ما يحتويه هذا الجسم من كتلة (مادة) ، وتعتبر الكتلة هي مقياس للقصور الذاتي للجسم أثناء حركته الخطية .

القانون الثاني في علم التحريك :

يمثل العلاقة بين القوى المؤثرة على الأجسام والحركة الناشئة المتمثلة بالسرعة والتسارع . حيث ينص القانون نيوتن الثاني للحركة :

إذا أثّرت قوة خارجية غير متوازنة (F) على جسم كتلته (m)، عندئذ يتحرك الجسم باتجاه القوة بتسارع مقداره (a) ويتناسب مقدار هذا التسارع مع مقدار

القوة المطبّقة ، وينطبق حامل شعاع التسارع على حامل القوة ، ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة التالية :

$$F = m.a$$

تدعى هذه المعادلة بمعادلة الحركة للنقطة المادية ، وهي من أهم المعادلات في علم الميكانيك الهندسي .

إذا خضعت النقطة المادية ذات الكتلة m لمجموعة من القوى في آن واحد ، عندئذ تتحرك النقطة المادية بتسارع a وتكون معادلة الحركة من الشكل :

$$\sum F = m.a$$

حيث :

$\sum F$ المجموع الشعاعي لجميع القوى المطبقة على الجسم ، وكذلك $\sum a$ تمثل المجموع الشعاع للتسارعات التي يكتسبها الجسم عندما تؤثر كل قوة من هذه القوى على حدة .

تستخدم معادلات الحركة لحل المسائل التي تتطلب وجود علاقة بين القوة المؤثرة على الجسيم والتسارع الذي تسببه القوة .

1- رسم مخطط الجسم الحر : نختار محاور الاحداثيات عادة x,y,z ونرسم مخطط الجسم الحر ونمثّل عليه كافة القوى المؤثرة على الجسيم ، ويمكن تحليل هذه القوى إلى مركبات وفق محاور الاحداثيات x.y,z.

- نفرض منحى و اتجاه شعاع التسارع .
- نحدّد المجاهيل في المسألة .

-2 **معادلات الحركة :** نطبق معادلات الحركة التالية :

$$F_x = m.a_x$$

$$F_y = m.a_y$$

$$F_z = m.a_z$$

-3 **قوة الاحتكاك :** العلاقة بين قوة الاحتكاك الحركية ورد الفعل الناظمي على السطح N هي :

$$F_f = \mu_k.N$$

حيث : μ_k - معامل الاحتكاك الحركي .

وإذا كان الجسم في الحالة الحرجة للسكون نستخدم معامل الاحتكاك السكوني μ_s:

$$F_f = \mu_s.N$$

-4 **النوابض :** إذا كان الجسم متصلا بنابض ، نستخدم العلاقة التالية :

$$F_s = K.S$$

حيث : K – ثابت استطالة النابض .

$S = l - l_0$ - مقدار الاستطالة . (الفرق بين الطول النهائي للنابض والطول الأصلي).

الكينيماتيك (الحركية) :

-5 إذا كان التسارع تابعا للزمن نستخدم العلاقة :

$$a = \frac{dv}{dt} \, , v = \frac{ds}{dt}$$

وبعد المكاملة نحصل على السرعة ، والإزاحة .

6- إذا كان التسارع تابعا للازاحة ، نكامل العلاقة :

$$a.ds = v.dv$$

للحصول على السرع كتابع للموضع .

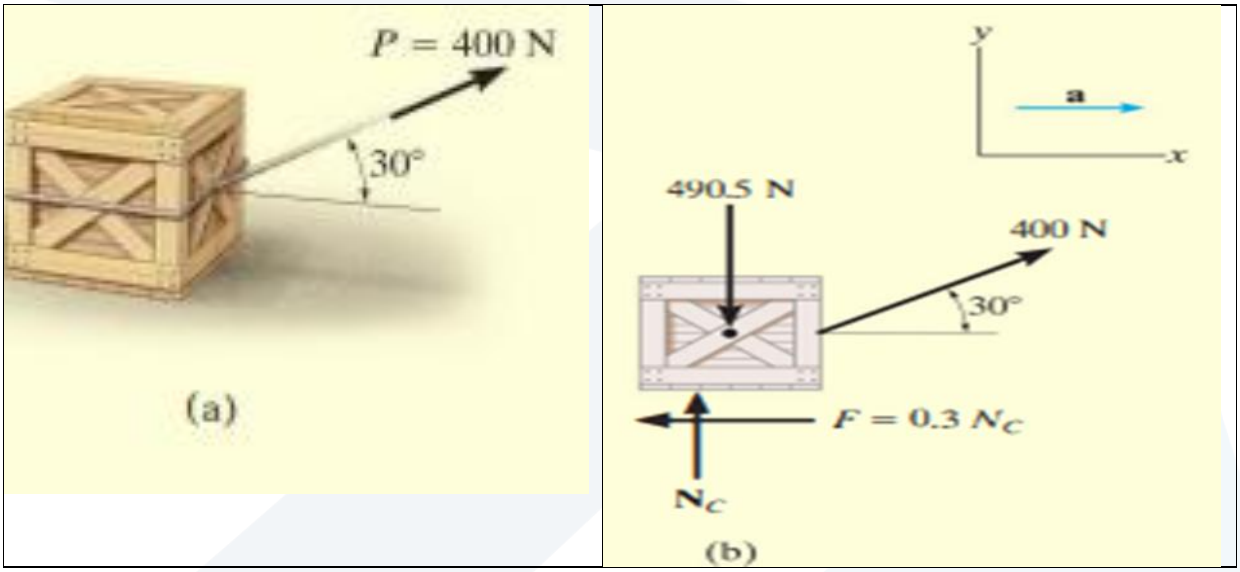
7- إذا كان التسارع ثابتا ، نستخدم العلاقات :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$
Constant Acceleration

$$v = v_0 + a_c t$$
Constant Acceleration

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$
Constant Acceleration

مسألة (1) : صندوق كتلته *50 Kg* يستند على مستوي أفقي ، حيث معامل الاحتكاك الحركي $\mu k = 0.3$. إذا كان الصندوق يتعرض لقوة جر مقدارها *400* N- احسب سرعة الصندوق بعد انقضاء 3 ثوان من السكون .



مخطط الجسم الحر: في مخطط الجسم الحر تم تمثيل الوزن بعد تحويل الكتلة إلى قوة (*50*(9.81)=490.5N* ، ورد فعل الأرض الناظمي على الصندوق *NC* ، وقوة الاحتكاك الحركية $F_k = \mu_k . N_C = 0.3 . N_C$

معادلات الحركة :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30^\circ - 0.3 N_C = 50a \qquad (1)$$

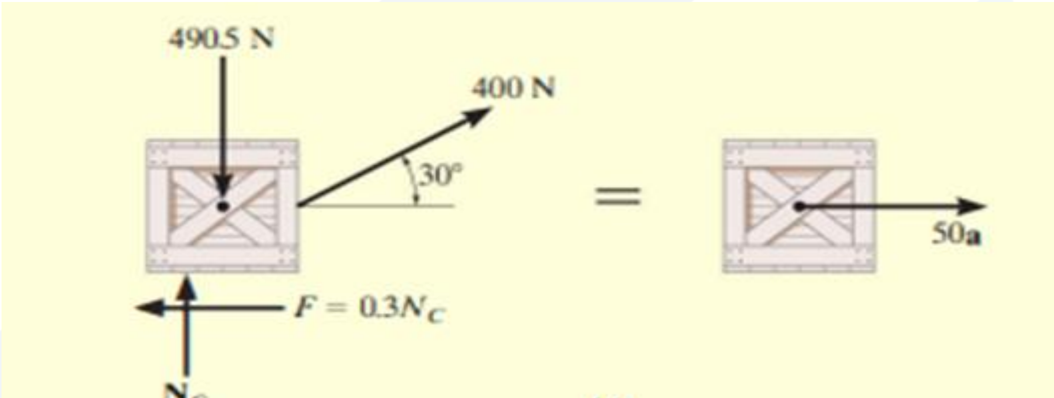
$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490.5 + 400 \sin 30^\circ = 0 \qquad (2)$$

$$N_C = 290.5 \text{ N}$$
$$a = 5.185 \text{ m/s}^2$$

الكينيماتيك (الحركية): بما أن التسارع ثابت ، وبالتالي القوة *P* ثابتة ، والسرعة الابتدائية مساوية للصفر ، وبالتالي تكون سرعة الصندوق بعد انقضاء 3 ثوان :

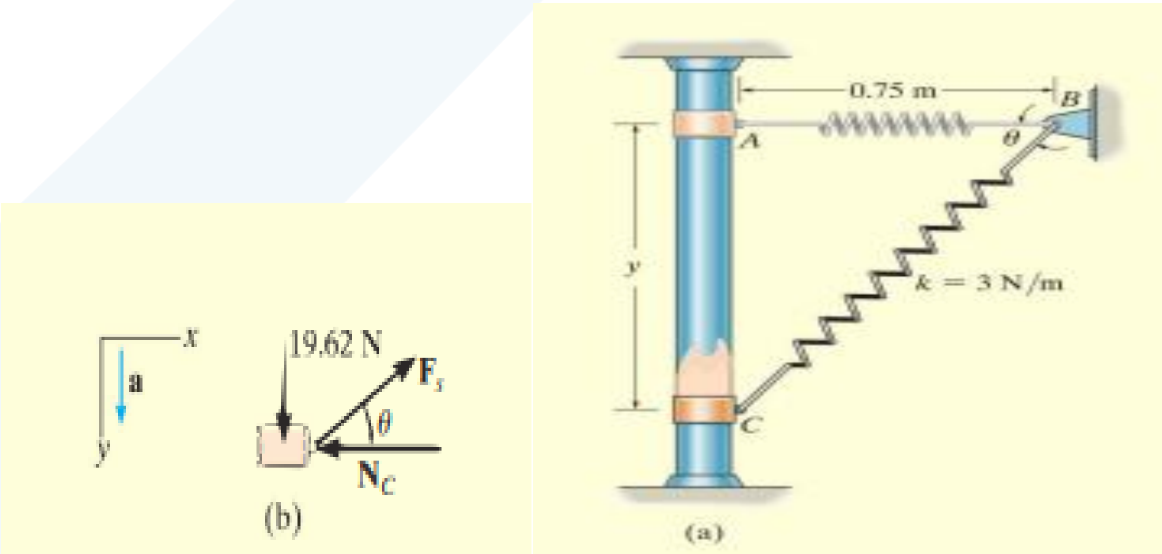
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t = 0 + 5.185(3)$$

$$= 15.6 \text{ m/s} \rightarrow$$



(c)

مسألة (2) : حلقة كتلتها *2kg* تتحرك على عمود شاقولي وتتصل بنابض طوله قبل الاستطالة *0.75 m*، وثابت الاستطالة *3N/m*. إذا تحركت الحلقة من السكون احسب تسارع الحلقة والقوة الناظمية للدليل على الحلقة على مسافة *y=1m*



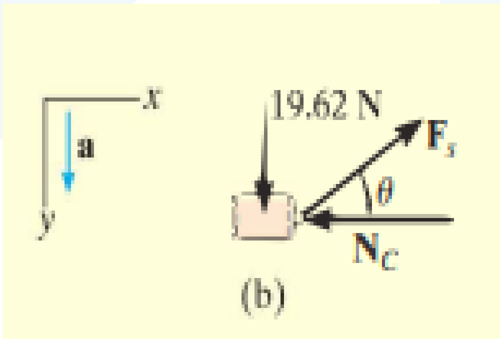
مخطط الجسم الحر:

مخطط الجسم الحرللحلقة عند مسافة ما y مبين في الشكل b ، مع ملاحظة أن وزن الحلقة $W=2(9.81)=19.62N$ ،بفرض أن تسارع الحلقة a والحركة هي نحو الأسفل في الاتجاه الموجب للمحور Y . لدينا أربعة مجاهيل : θ, a, Fs, NC.

معادلات الحركة :

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s \cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 19.62 - F_s \sin\theta = 2a \qquad (2)$$



من المعادلة (2) ينتج أن تسارع الحلقة يعتمد على قوة النابض. يمكن حل المعادلتين (1) و(2) بدلالة NC و θ ، حيث أن قوة النابض FS والزاوية θ معلومتان .

القوة المؤثرة في النابض تابعة للاستطالة S ،

$$F_S = K.S$$

الطول الأصلي للنابض AB =0.75m *وبالتالي تكون قيمة الاستطالة :*

$$s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75.$$

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75\right) \quad (3)$$

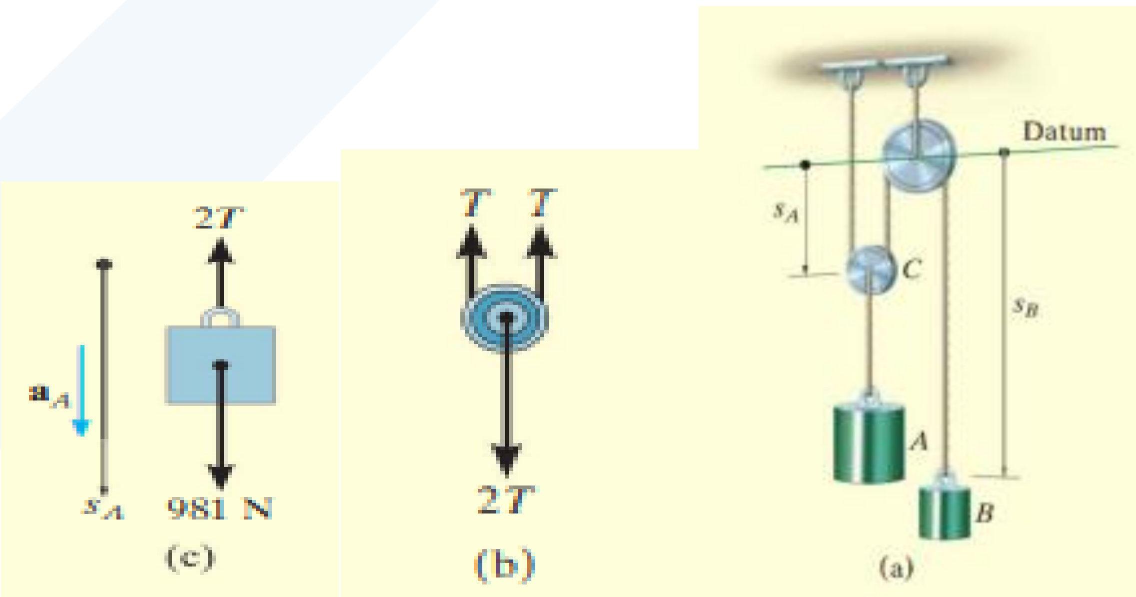
$$\tan\theta = \frac{y}{0.75} \quad (4)$$

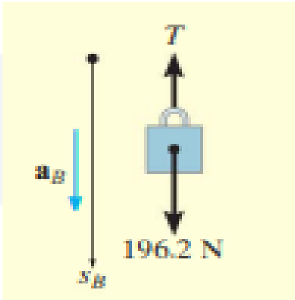
بتعويض قيمة *y=1m* في المعادلتين 3 و4 نحصل على قيمة القوة المؤثرة في النابض والزاوية θ : $\theta = 53.1$, $FS = 1.50N$

بالتعويض في المعادلتين (1) و(2) :

$$N_C = 0.900\ \text{N}$$
$$a = 9.21\ \text{m/s}^2 \downarrow$$

مسألة(3) : إذا كانت كتلة الصندوق *A*، *100 kg* ويبدأ الحركة من السكون . إذا كانت كتلة الصندوق *B* *20Kg*، احسب سرعته بعد انقضاء ثانيتين من بدء الحركة .





(d)

الحل : إذا كانت كتل البكرات والكابلات مهملة ،عندها من أجل البكرة *C* , *m.a= 0* ونستطيع تطبيق المعادلة :

$$\sum F_y = 0$$

كما هومبين في الشكل b.مخطط الجسم الحر للصندوقين A و B مبينة في الشكلين c و d . من أجل بقاء الكتلة A في حالة سكون يلزم قوة T=490.5N، وكذلك بالنسبة للكتلة *B* تحتاج إلى قوة *T=196.2N* . الكتلة *A* تتحرك نحو الأسفل ، في حين أن الكتلة *B* تتحرك نحو الأعلى . هنا نفرض كلتا الكتلتين تتسارع نحو الأسفل بالاتجاه الموجب ل , *SA* و*SB* . المجاهيل الثلاث هي : *T, aA* *Ab*,.

معادلات الحركة :

الكتلة *A* :

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 981 - 2T = 100a_A \qquad (1)$$

الكتلة *B* :

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 196.2 - T = 20a_B \qquad (2)$$

الكينيماتيك(الحركية) :

المعادلة الثالثة الضرورية للحل هي علاقة تسارع الكتلة A بالنسبة للكتلة B ، وهذا يتم عن طريق تطبيق مفهوم الحركة المقيدة ، الاحداثيات SA و SB تقيس موقع A و B من نقطة المبدأ الثابت :

$$2s_A + s_B = l$$

حيث L الطول الكلي للكبل وهو طول ثابت .

باشتقاق هذه المعادلة :

$$2a_A = -a_B \quad (3)$$

عند كتابة المعادلات من 1- 3 يكون الاتجاه الموجب المفروض هو دوما نحو الأسفل .

بحل المعادلات :

$$\begin{aligned} T &= 327.0 \text{ N} \\ a_A &= 3.27 \text{ m/s}^2 \\ a_B &= -6.54 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

هنا الكتلة A تتسارع نحو الأسفل بينما الكتلة B تتسارع نحو الأعلى .

بما أن تسارع الكتلة B ثابت ، تكون سرعة الكتلة B بعد انقضاء 2 ثانية :

$$(+\downarrow) \qquad v = v_0 + a_B t$$
$$= 0 + (-6.54)(2)$$
$$= -13.1 \text{ m/s}$$

تدل الاشارة السالبة على أن الكتلة B تتحرك نحو الأعلى