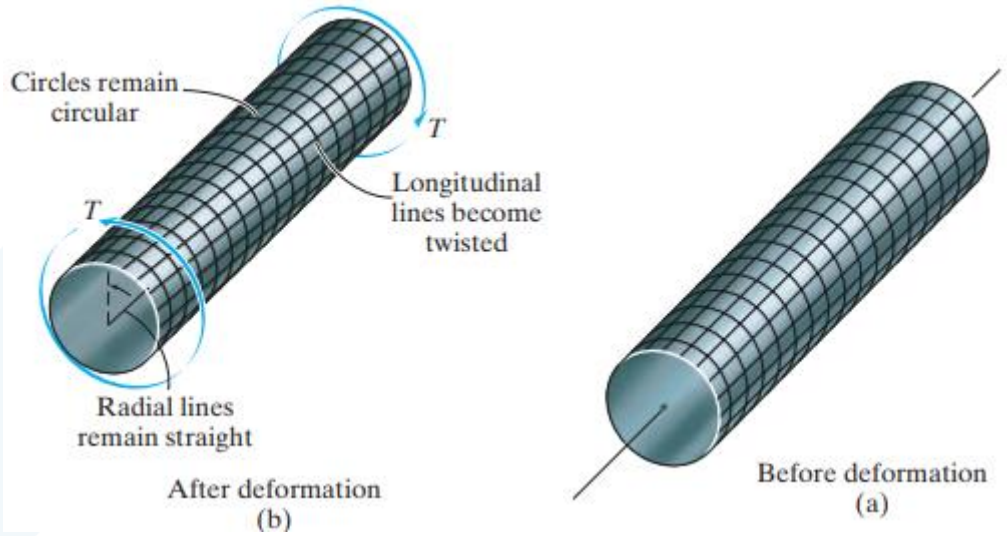
الفتل TORSION

الفتل : عبارة عن عزم يحاول ثني أو فتل العنصر حول محوره الطولاني .

يستخدم هذا المفهوم في حساب وتصميم المحاور والأعمدة المستخدمة في نقل الحركة في الآليات والعربات .

عند تطبيق عزم فتل خارجي على العمود الكبيّن في الشكل(1) ، فإن شكل شبكة الخطوط الدائرية تبقى دائرية ، وكذلك المستقيمات القطرية تبقى مستقيمة . أمّا الخطوط الطولية فتصبح مفتولة ، بزاوية معينة .



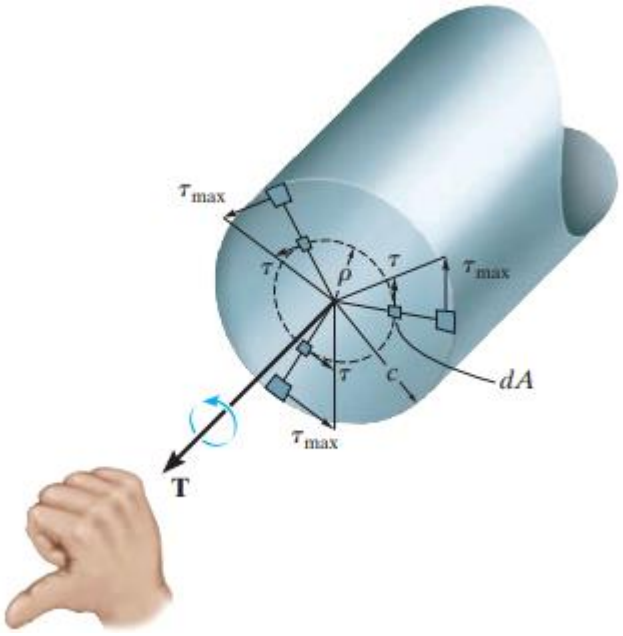
الشكل (1) – شكل شبكة الخطوط القطرية والطولية قبل الفتل وبعده .

معادلة الفتل :

إذا كانت المادة المصنوع منها العمود مرنة وخطيّة ،عندها يمكن تطبيق "قانون هوك " $\tau = G.\gamma$ (1)

ينتج لدينا تغيّر خطي في إجهاد القص على طول أي مستقيم قطري للمقطع العرضي .

يتغير إجهاد القص من الصفر إلى قيمة أعظمية τ_{max} عند الطبقة الخارجية . الشكل (2)



الشكل (2) –يتغير اجهاد القص خطيا على امتداد كل خط قطري للمقطع العرضي .

تعطى معادلة إجهاد القص الأعظمي بالعلاقة :

$$\tau_{max} = \frac{T.C}{J} \quad (1)$$

τ_{max} – اجهاد القص الأعظمي في العمود ، الحاصل عند الطبقة الخارجية .

T - محصلة عزم الفتل الداخلية المؤثرة على المقطع العرضي .تحدد قيمة المحصلة عن طريق تطبيق طريقة المقاطع وكتابة معادلة توازن العزم المطبّق حول المحور الطولي للعمود .

J - عزم العطالة القطبي لمساحة المقطع العرضي للعمود .

C -القطر الخارجي للعمود .

عند حساب اجهاد القص عند مسافة معينة نطبّق العلاقة (2) :

$$\tau_{max} = \frac{T.\rho}{J} \quad (2)$$

تستخدم العلاقتين (1) و(2) من أجل الأعمدة ذات المقاطع الدائرية ، وذات مادة متجانسة ، وتمتلك سلوك المرونة الخطية (قانون هوك).

نقل الاستطاعة:

تعرّف الاستطاعة على أنها العمل المبذول في واحدة الزمن .

والتي تساوي قيمة العزم المطبّق الذي يسبّب دوران العمود بزاوية θ خلال واحدة الزمن .

$$P = T\frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

السرعة الزاوية للعمود

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ينتج لدينا علاقة الاستطاعة :

$$P = T.\omega \quad (4)$$

تقدر الاستطاعة بالواط من أجل قيمة للعزم مقدرة بالنيوتن لكل متر، وسرعة الدوران بالراديان لكل ثانية ..

$$1W = 1N.m/s$$

من أجل عمود مصمت :

من أجل عمود مجوّف :

C_o-القطر الخارجي للعمود .

Ci - القطر الداخلي للعمود

في الآليات يقاس تردد العمود الدوار "f" بعدد الدورات في الدورة أو عدد الدورات في الثانية .

(1HZ=1Cycle/S) , 1Cycle = 2π rad

$$p= 2\ \pi.f.T \qquad (5)$$

تصميم العمود :

1- عندما يكون معلوماً لدينا الاستطاعة المنقولة بواسطة العمود ، وتردد الدورات (عدد الدورات في الثانية) ، يمكن حساب العزم المنقول عن طريق المعادلة (5) .

2- عندما يكون معلوم لدينا العزم وإجهاد القص المسموح به ، نستطيع حساب الأبعاد التصميمية للعمود باستخدام معادلة الفتل .

$$\frac{j}{c} = \frac{T}{\tau_{allow}}$$

زاوية الفتل :

في التطبيقات الهندسية ،من أجل أعمدة ذات مادة متجانسة تكون قيمة معامل المرونة في القص ثابتة ، ومساحة المقطع العرضي ثابتة وكذلك قيمة العزم .

عندها تعطى معادلة زاوية الفتل بالعلاقة التالية :

$$\emptyset = \frac{T.L}{J.G} \quad (6)$$

حيث :

عندما يتعرض العمود لعزوم فتل متعددة ،أو يمتلك تغيرا في مساحة المقطع العرضي . عندها يمكن تطبيق استخدام المعادلة (7) من أجل كل جزء من المقطع العرضي للعمود بحيث تكون هذه المقادير ثابتة .

تعطى زاوية الفتل لإحدى نهايتي العمود بالنسبة للطرف الآخر عن طريق المعادلة :

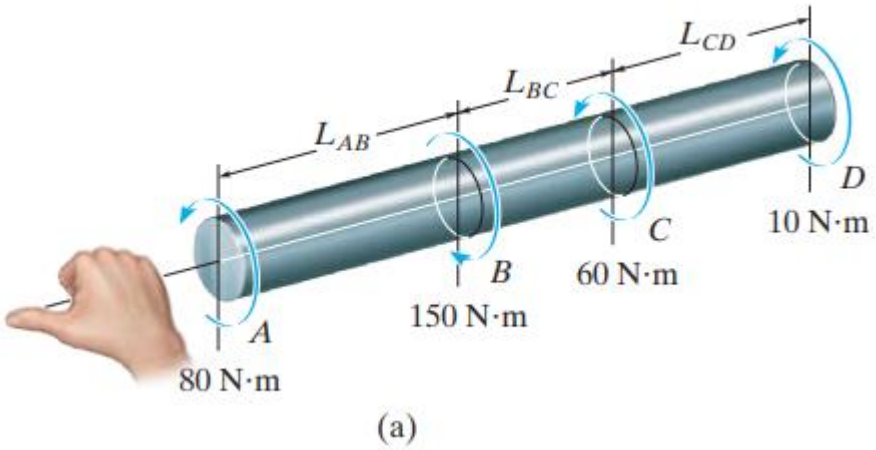
$$\emptyset = \sum \frac{T.L}{J.G} \quad (7)$$

تحديد الاتجاهات :

من أجل تطبيق العلاقة (7) لتحديد اتجاهات العزم وزاوية الفتل لإحدى نهايتي العمود بالنسبة للنهاية الأخرى ، نستخدم قاعدة اليد اليمنى :

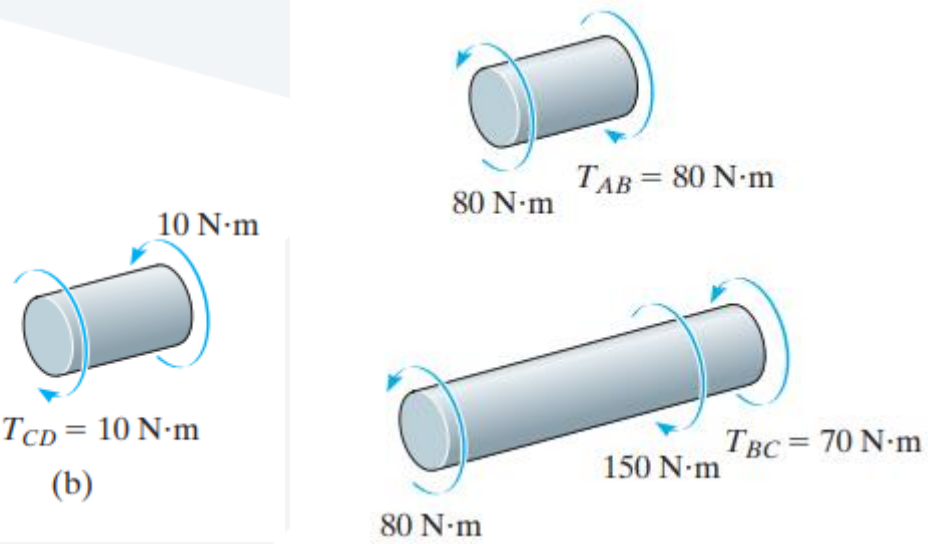
بحيث يكون كل من العزم وزاوية الفتل موجبين ، عندما تتجه أصابع اليد اليمنى خارج المقطع العرضي ، وتتجه حركة الأصابع نحو باطن الكف .

مثال : من أجل العمود المبيّن في الشكل ( ) تتغير قيمة العزم الداخلية عند النقطتين B .C .



الشكل (3)- تحديد اتجاهات عزم الفتل وزاوية الدوران .

باستخدام طريقة المقاطع نحسب قيمة عزم الفتل الداخلي لكل مقطع ، وفق قاعدة اليد اليمنى حيث يتجه اصبع الإبهام نحو الخارج لكل مقطع من المقاطع .

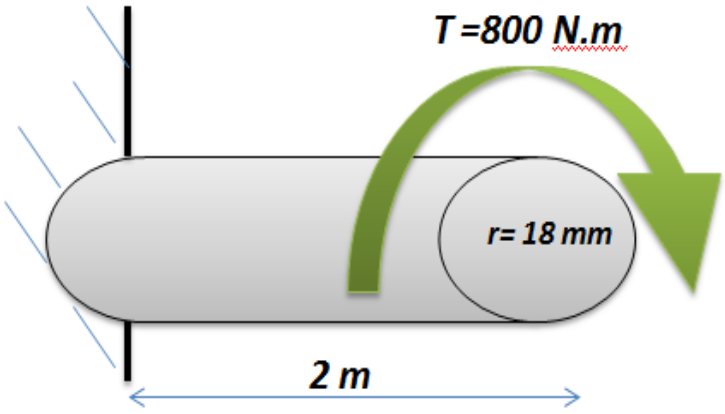


T_{AB}=+80N , T_{BC} =-70N ,T_{CD} = -10N.

بتطبيق العلاقة (7):

$$\phi_{A/D} = \frac{(+80\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{AB}}{JG} + \frac{(-70\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{BC}}{JG} + \frac{(-10\ \text{N}\cdot\text{m})\ L_{CD}}{JG}$$

مسألة (1) :من أجل العمود الاسطواني احسب اجهاد القص الأعظمي المتولد نتيجة تطبيق عزم خارجي ،إذا كان معامل المرونة في القص G=80GPa.واحسب زاوية الفتل بالدرجات و انفعال القص .



$$80Gp = 80x10^3 Mpa = 80x10^3 N/mm^2$$

اجهاد القص :

$$\tau_{max} = \frac{T\,r}{J} = \frac{T(\frac{D}{2})}{\frac{\pi}{32}D^4}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3}}$$

$$\tau_{max} = \frac{16(800x10^3)}{\pi(36)^3}\left(\frac{N.mm}{mm^3}\right) = 87.3\ N/mm^2$$

زاوية الفتل :

$$\theta = \frac{T\,L}{G\,J}$$

$$\theta = \frac{(800x10^3)(2x10^3)}{(80x10^3)\left(\frac{\pi}{32}\right)(36)^4}\left(\frac{N.mm.\ mm}{\frac{N}{mm^2}.mm^4}\right)$$

$$\theta = 0.12\left(\frac{180}{\pi}\right) = 6.87\ ^\circ \qquad \theta = 0.12\ rad$$

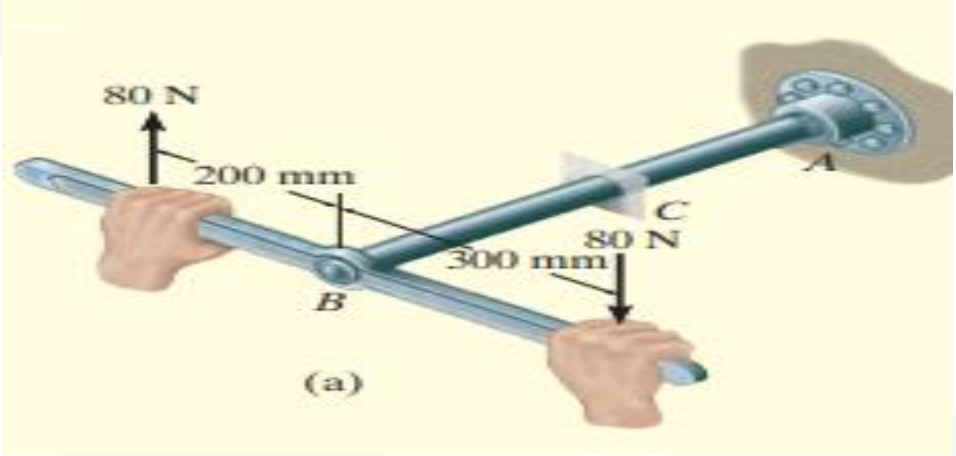
انفعال القص

$$\gamma = \frac{r\theta}{L}$$

$$\gamma = \frac{18(0.12)}{2x10^3} = 108x10^{-5}$$

مسألة(2) : انبوب قطره الداخلي 80mm والخارجي 100mm

، مثبت في حامل عند A ومعرض لعزم فتل عند B. احسب اجهاد القص المتولد على الجدران الخارجية والداخلية للأنبوب عند تطبيق قوة مقدارها 80 N على المفتاح .



الحل : نأخذ مقطعا بين Aو B. المجهول الوحيد هو العزم الداخلي T،
نستطيع حسابه عن طريق تطبيق معادلة العزم حول المحور Y.

$$\Sigma M_y = 0; \quad 80\,\text{N}\,(0.3\,\text{m}) + 80\,\text{N}\,(0.2\,\text{m}) - T = 0$$
$$T = 40\,\text{N}\cdot\text{m}$$

خصائص المقطع :

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05\,\text{m})^4 - (0.04\,\text{m})^4] = 5.796(10^{-6})\,\text{m}^4$$

اجهاد القص : من أجل أية نقطة تقع على السطح الخارجي للأنبوب

$\rho = C_O = 0.05\text{m}$:

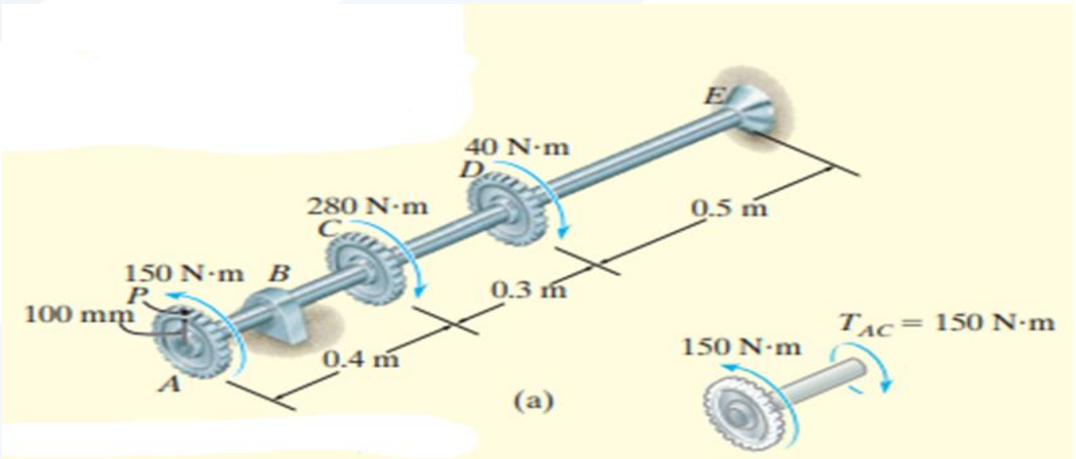
$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40\,\text{N}\cdot\text{m}\,(0.05\,\text{m})}{5.796(10^{-6})\,\text{m}^4} = 0.345\,\text{MPa}$$

من أجل أية نقطة تقع على السطح الداخلي للأنبوب

$\rho = C_i = 0.04m$

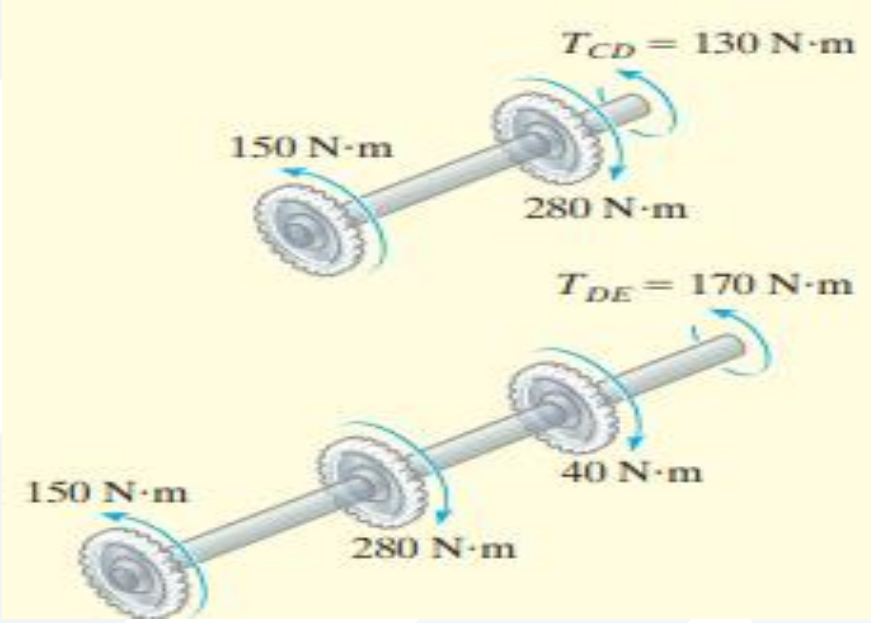
$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\ \text{N}\cdot\text{m}\ (0.04\ \text{m})}{5.796(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.276\ \text{MPa}$$

مسألة (3): مجموعة من المسننات مثبتة على عمود دوّار، إذا كان معامل المرونة في القص G=80GPa وقطر العمود 14mm. حسب زاوية الفتل للمسنن A.



الحل : مقدار العزم عند الأقسام AC ,CD ,DE:

T_{AC}= 150N.m , T_{CD}=-130N.m , T_{DE}=-170N.m



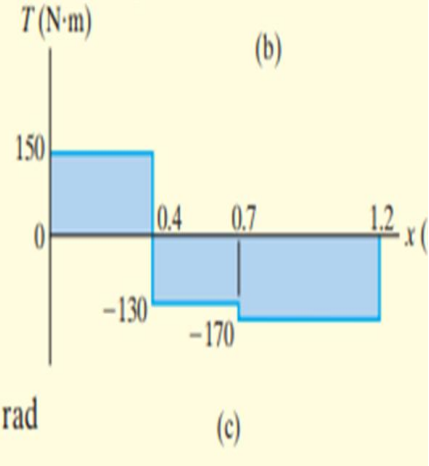
T_{AC}= 150N.m , T_{CD}=-130N.m , T_{DE}=-170N.m

خصائص المقطع :

$$J = \frac{\pi}{2}(0.007\ \text{m})^4 = 3.771(10^{-9})\ \text{m}^4$$

زاوية الدوران :

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150\ \text{N}\cdot\text{m})(0.4\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} + \frac{(-130\ \text{N}\cdot\text{m})(0.3\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]} + \frac{(-170\ \text{N}\cdot\text{m})(0.5\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]} = -0.2121\ \text{rad}$$



مسألة (4):عمود ذو مقطع دائري ينقل استطاعة مقدارها 300 KWعند عدد دورات 250 r.p.m. اجهاد القص المسموح به 30N/mm2،زاوية الفتل θ = 1 درجة. الطول 2متر.احسب قطر العمود إذا كان معامل المرونة في حالة القص

$$G = 1 * 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$P = \frac{2\pi f T}{60}$$

$$T = \frac{P*60}{2\pi f} = \frac{300*10^3*60}{2\pi*250} = 11.46 * 10^3 \text{ N.m} =$$

$$11.46 * 10^6 \text{ N.mm}$$

بالاعتماد على معيار المقاومة :

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau_a}{r} \Rightarrow \frac{11.46*10^6}{\frac{\pi}{32}.D^4} = \frac{30}{\frac{D}{2}}$$

τ_a – الاجهاد المسموح به

D=124.83mm

بالاعتماد على معيار الجساءة:

$$\frac{T}{J}=\frac{G.\theta}{L}\Rightarrow\frac{11.46*10^6}{\frac{\pi}{32}D^4}==\frac{1*10^5*\frac{\pi}{180}}{2000}\Rightarrow D=107.5m$$

نختار القطر الأكبر حيث أنه بزيادةالقطر تزداد المساحة ، أما قيمة الإجهاد فتتناقص.

مسألة (5): احسب الاستطاعة الأعظمية المنقولة بواسطة عمود قطره 6cm وطوله 1 متر، عدد الدورات 1200r.p.m. اجهاد القص المسموح به 12N/mm2، زاوية الفتل = 0.25درجة .معامل المرونة في القص $G=0.8*10^5\ N/mm^2$

الحل : الاستطاعة المنقولة

$$p=\frac{2\pi fT}{60}$$

1- بالاعتماد على معيار المقاومة :

$$=\frac{\tau_a}{r}\Rightarrow T=\frac{\tau_{a.J}}{r}=\frac{12*\frac{\pi}{32}*(60)^4}{\frac{60}{2}}\Rightarrow T=508.94*10^3 N.mm\frac{T}{J}$$

2-بالاعتماد على مبدأ الجساءة :

$$\frac{T}{J}=\frac{G.\theta}{L}\ ,\ T=\frac{G.J.\theta}{l}=\frac{0.8*10^5*\frac{\pi}{32}*(60)^4 4.36*10^{-3}}{10^3}=$$

$444.10^3 N.mm$

من القيمتين السابقتين نختار القيمة الأصغر للعزم:

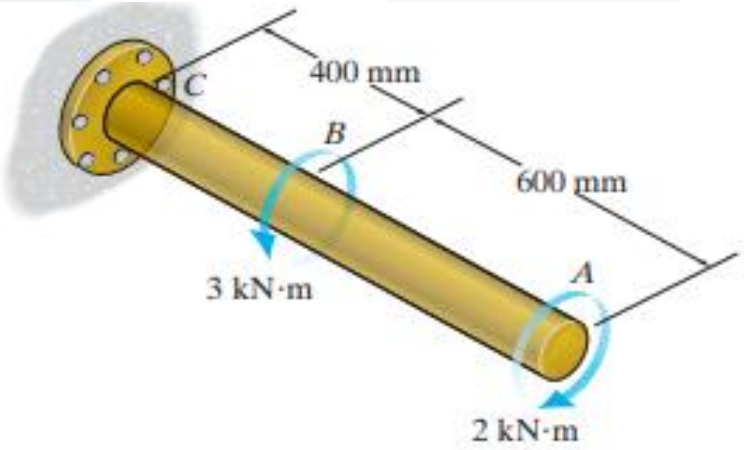
T=444.08N.m

$$=55.8*10^3\ wp = \frac{2\pi*1200*444.08}{60}$$

الاستطاعة مقدرة بالحصان $=\frac{55.810^3}{746}$=74.8Hp

1حصان = 746 واط 1Hp= 746 W,

مسألة (6):عمود بقطر $60mm$ معرض لعزوم خارجية . احسب زاوية الفتل للنهاية A بالنسبة للنقطة C. معامل المرونة في القص = $75GPa$

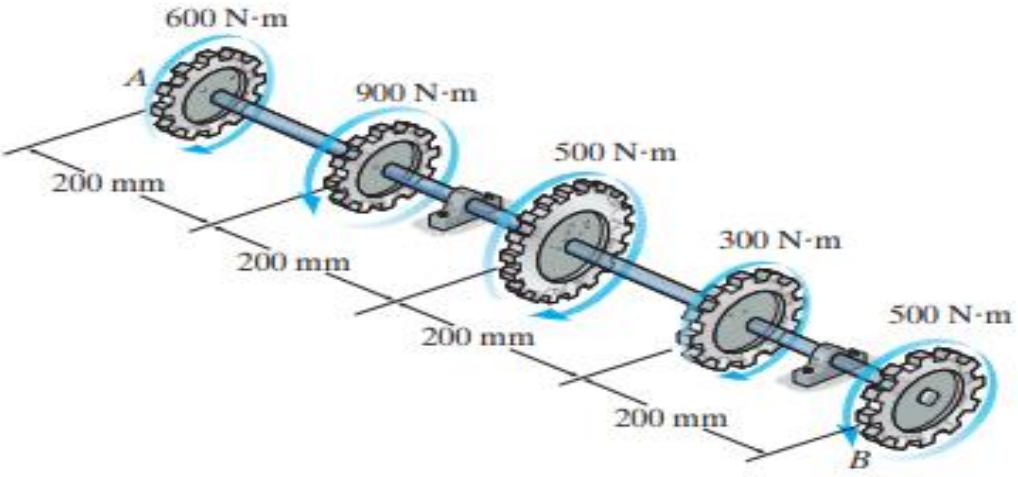


$$J = \frac{\pi}{2}(0.03^4) = 0.405(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$\phi_{A/C} = \frac{1}{[0.405(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\{[-2(10^3)](0.6) + 1(10^3)(0.4)\}$$

$$= -0.00838 \text{ rad} = -0.480°$$

مسألة (7): مجموعة من المسننات مثبتة على عمود من الفولاذ قطره 40mm احسب زاوية الفتل للمسنن B بالنسبة للمسنن A. معامل المرونة في القص = 75GPa



$$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$\phi_{B/A} = \frac{0.2}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}[600 + (-300) + 200 + 500]$$

$$= 0.01061 \text{ rad} = 0.608°$$