التحليل الرياضي ١

المحاضرة 1+2

ميكاترونيكس

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

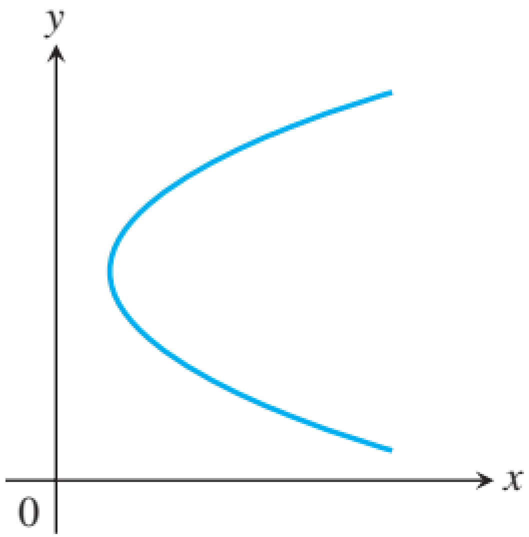
التوابع الحقيقية

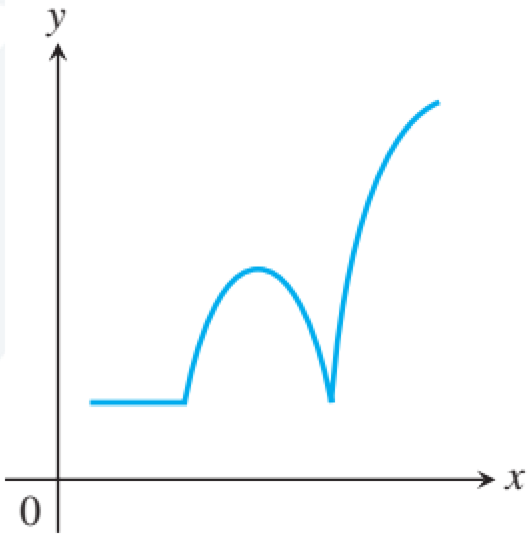
تمارين

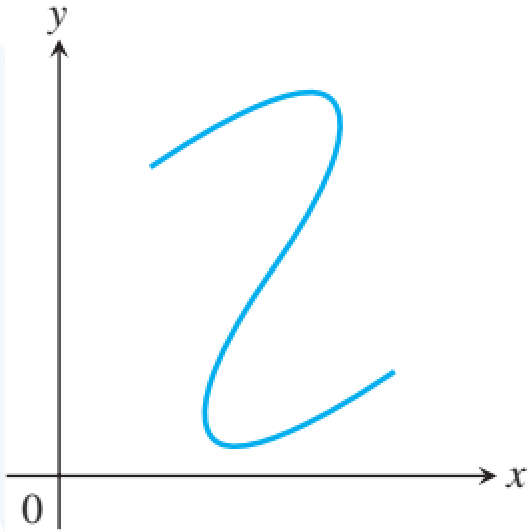
1 أوجد مجموعة تعريف ومدى كل من التوابع الآتية

$f(x) = 1 + x^2$ $\quad$ $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

2 أي من البيانات الآتية بيان لتابع لـ x وأي منها ليست بيان لتابع لـ x ، مع ذكر السبب.







تمارين

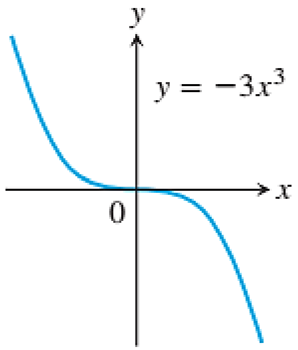
3 ادرس تزايد وتناقص التوابع الآتية

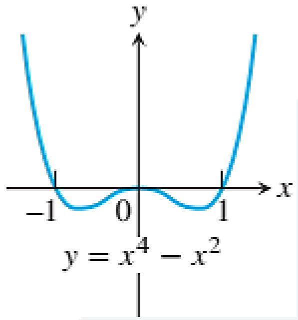
$y = -x^3$ $\quad y = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad y = -\dfrac{1}{x}$

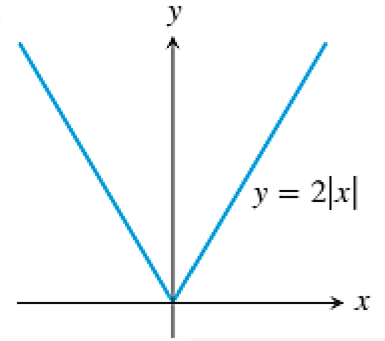
4 أي من التوابع الآتية زوجي أو فردي أو ليس فردي أو زوجي

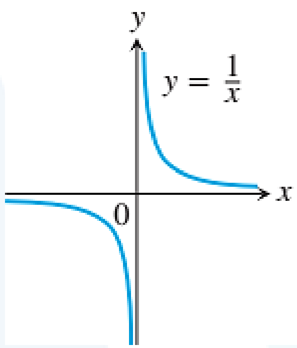
$f(x) = 3$ $\quad f(x) = x^2 + 1$ $\quad f(x) = x^{-5}$ $\quad f(x) = x^2 + x$

5 أي من التوابع الآتية متباين وأي منها غير متباين









6 أوجد التابع العكسي لكل من التابعين الآتيين إن أمكن ذلك

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$ $\quad f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

تمارين

7 أوجد صيغة $f \circ g \circ h$

$$f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

8 ليكن لدينا التابع $F(x) = \ln^2(x^2+1)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

9 ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$، أوجد $y = g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x$.

تمارين

1 أوجد مجموعة تعريف ومدى كل من التوابع الآتية

$g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ $\qquad$ $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ $\qquad$ $f(x) = 1 + x^2$

الحل

$f(x) = 1 + x^2$

مجموعة التعريف $(-\infty, \infty)$ $\qquad$ مدى التابع $[1,\infty)$

$f(x) = 1 - \sqrt{x}$

مجموعة التعريف $[0, \infty)$ $\qquad$ مدى التابع $(-\infty, 1]$

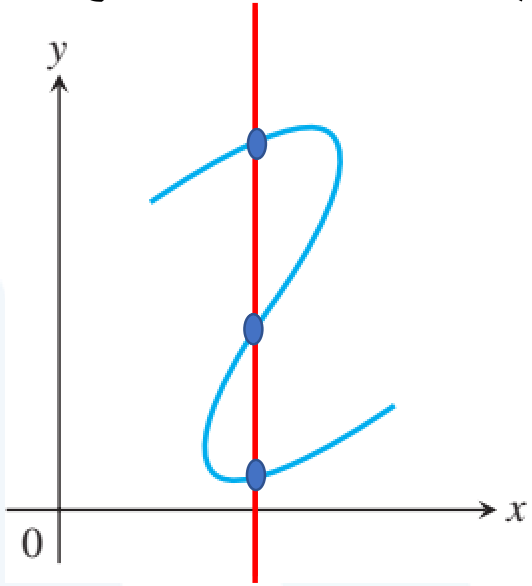
$g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

مجموعة التعريف $(-\infty, 0]\cup[3, \infty)$ $\qquad$ مدى التابع $[0, \infty)$

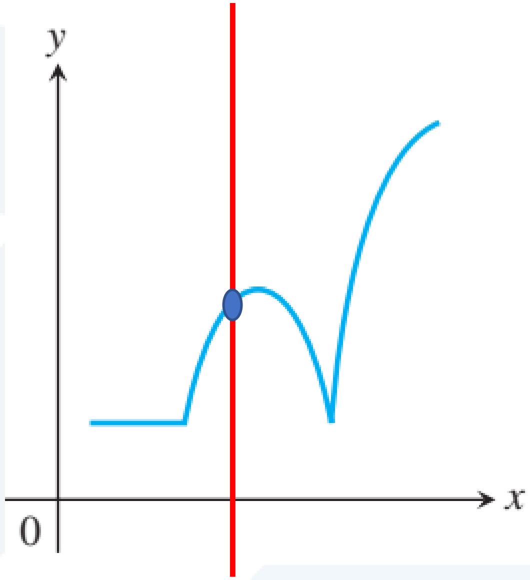
تمارين

2 أي من البيانات الآتية بيان لتابع لـ x وأي منها ليست بيان لتابع لـ x ، مع ذكر السبب.

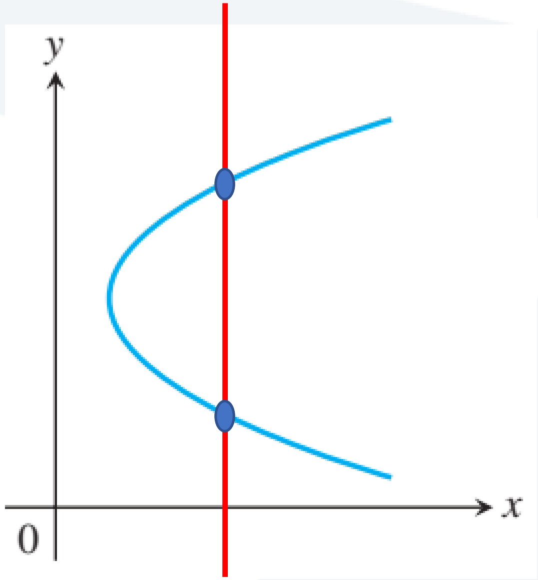
الحل



ليس بيان لتابع لأن الخط الشاقولي يقطع البيان في ثلاثة نقاط



بيان لتابع لأن أي خط شاقولي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط



ليس بيان لتابع لأن الخط الشاقولي يقطع البيان في نقطتين

تمارين

3 ادرس تزايد وتناقص التوابع الآتية

$y = -\frac{1}{x}$ $\quad y = -\frac{1}{x^2}$ $\quad y = -x^3$

الحل

$y = -x^3$

معرف من أجل $-\infty < x < \infty$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_2^3 < -x_1^3 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

التابع متناقص تماما على كامل مجال $-\infty < x < \infty$

$y = -\frac{1}{x^2}$

معرف من أجل $-\infty < x < 0$ و $0 < x < \infty$

التابع متناقص تماما على المجال $-\infty < x < 0$

$$-\infty < x < 0 \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow -\frac{1}{x_2^2} < -\frac{1}{x_1^2} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

التابع متزايد تماما على المجال $0 < x < \infty$

$$0 < x < \infty \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{x_1^2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1^2} < -\frac{1}{x_2^2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تمارين

$y = -\frac{1}{x}$

معرف من أجل $-\infty < x < 0$ و $0 < x < \infty$

التابع متزايد تماما على المجال $-\infty < x < 0$

التابع متزايد تماما على المجال $0 < x < \infty$

$-\infty < x < 0 \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$0 < x < \infty \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

تمارين

4 أي من التوابع الآتية زوجي أو فردي أو ليس فردي أو زوجي

$f(x) = x^2 + x$ $\quad f(x) = x^{-5}$ $\quad f(x) = x^2 + 1$ $\quad f(x) = 3$

الحل

$f(x) = 3$

بما أن منحنى التابع لا يمر من المبدأ أبداً وهو متناظر بالنسبة للمحور-y بالتالي التابع المعطى زوجي

$f(x) = x^2 + 1$

التابع المعطى زوجي

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

$f(x) = x^{-5}$

التابع المعطى فردي

$$f(-x) = (-x)^{-5} = \frac{1}{(-x)^5} = \frac{1}{-x^5} = -\frac{1}{x^5} = -x^{-5} = -f(x)$$

$f(x) = x^2 + x$

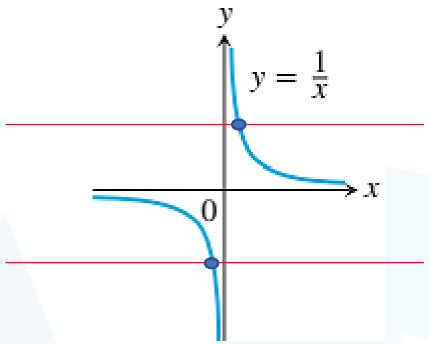
التابع المعطى ليس فردي وليس زوجي

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \begin{cases} -f(x) \\ f(x) \end{cases}$$

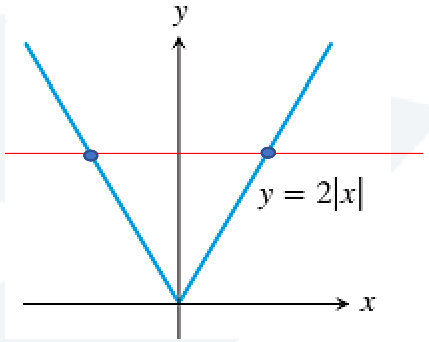
تمارين

5 أي من التوابع الآتية متباين وأي منها غير متباين

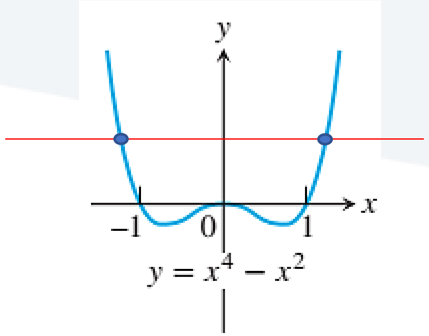
الحل



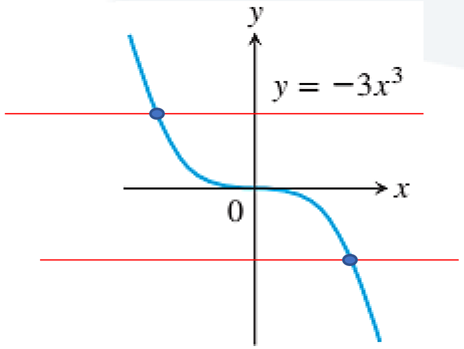
تابع متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع غير متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع غير متباين حسب اختبار الخط الأفقي



تابع متباين حسب اختبار الخط الأفقي

6 أوجد التابع العكسي لكل من التابعين الآتيين إن أمكن ذلك

$f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

الحل

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

نتحقق من كون التابع متباين على المجال المعطى

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

التابع المعطى متباين

تمارين

نحل المعادلة $y = x^2 + 1$

$$x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1} \quad ; \; y \geq 1$$

نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y = f^{-1}(x)$.

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad ; \; x \geq 1$$

$f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

نتحقق من كون التابع متباين على المجال المعطى

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2/3} = x_2^{2/3} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2} = \sqrt[3]{x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

التابع المعطى متباين

نحل المعادلة $y = x^{2/3}$

$$x^2 = y^3 \Rightarrow x = \sqrt{y^3} = y^{3/2}$$

$$x = f^{-1}(y) = y^{3/2} \quad ; \; y \geq 0$$

نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y = f^{-1}(x)$.

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x^3} \quad ; \; x \geq 0$$

تمارين

7 أوجد صيغة $f \circ g \circ h$

$$f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$$

الحل

$$(f\circ g\circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(\sqrt{2-x}\right)\right) = f\left(\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2+1}\right) = f\left(\frac{2-x}{3-x}\right) = \frac{\frac{2-x}{3-x}+2}{3-\frac{2-x}{3-x}} = \frac{8-3x}{7-2x}$$

8 ليكن لدينا التابع $F(x) = \ln^2\left(x^2+1\right)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

الحل

$$h(x) = x^2+1, \quad g(x) = \ln x, \quad f(x) = x^2$$

9 ليكن لدينا التابع $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$، أوجد $y = g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x$.

الحل

$$(f\circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-2} = x \Rightarrow g(x) = (g(x)-2)x = x\cdot g(x) - 2x$$

$$\Rightarrow g(x) - x\cdot g(x) = -2x \Rightarrow g(x) = -\frac{2x}{1-x} = \frac{2x}{x-1}$$

نهاية تابع عددي

تمارين

1 احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \lim_{x\to4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

2 استخدم مبرهنة الحصر لاثبات أن $\lim_{x\to0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

3 استخدم النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ لحساب النهايات الآتية:

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

4 احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to-2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \qquad \lim_{x\to-2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

تمارين

1 احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

الحل

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x\to -3}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-5)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-5) = 2-5 = -3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3)-4} = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}\frac{x(4-x)}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}\frac{x(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}x\left(2+\sqrt{x}\right) = 4(2+2) = 16$$

تمارين

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+8)-9}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{-2}{3+3}=-\frac{1}{3}$$

2 استخدم مبرهنة الحصر لاثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

الحل

$$-1\le \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\le 1 \text{ for } x\ne 0 \qquad \Rightarrow -x^2\le x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\le x^2 \xrightarrow{\lim_{x\to 0} x^2=0} \lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

3 استخدم النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ لحساب النهايات الآتية:

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

الحل

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{(2\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{0}{(2)(2)}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x(1-\cos x)}{9x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{9x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{9x}}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}(0)}{1^2}=0$$

تمارين

3 احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \qquad \lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

الحل

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

$|x+2| = (x+2)$

$x > -2$

$$\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x\to -2^+}(x+3) = ((-2)+3) = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$$

$|x+2| = -(x+2)$

$x < -2$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^-}(x+3)\left[\frac{-(x+2)}{(x+2)}\right] = \lim_{x\to -2^-}(x+3)(-1) = -(-2+3) = -1$$

استمرار تابع عددي

تمارين

1 في أي النقاط تكون التوابع الآتية مستمرة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$$

$$y = \frac{1}{x - 2} - 3x$$

2 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 في أي النقاط تكون التوابع الآتية مستمرة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$$

$$y = \frac{1}{x-2} - 3x$$

الحل

$$y = \frac{1}{x-2} - 3x$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x = 2$

$$y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$$

التابع غير مستمر عند النقاط التي تعدم المقام $x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$

التابع غير مستمر عند النقطتين $x=5$ و $x=-2$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 5 = g(3)$$

التابع المعطى مستمر في كل النقاط

تمارين

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2, x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

التابع غير مستمر عند $x=-2$ لأن النهاية غير موجودة

$$f(-2)=4$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=\infty$$

التابع مستمر عند $x=2$ لأن

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=\frac{12}{4}=3=f(2)$$

2 ما هي قيم a التي تجعل التابع الآتي مستمراً في كل النقاط x

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<3\\ 2ax, & x\geq 3\end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=(3)^2-1=8 \qquad \lim_{x\to 3^+}(2a)(3)=6a$$

بالتالي حتى يكون التابع المعطى مستمراً يجب

$$6a=8\Rightarrow a=\frac{4}{3}.$$